

مجلة Maths 5min

● من انجاز الأستاذ: شعبان أسامة



70 دقيقة

#مع حلول نموذجية

30 دقيقة

#تجميعية_تمارين_رمضان_2020

#جميع_المحاور_المدرسية

للشعب: ● علوم تجريبية ● تقني رياضي ● رياضيات

#تلمسان_ماي_2020



Google/ Instagram/ Telegram/ Facebook: 5min maths



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

خلال شهر رمضان الكريم قدمت برنامج تداولت فيه
تدريسين مرفقين بالحل لمدة ثلاثين يوم متواصلة شملت
جميع المحاور تم اختيارها من مقترحات لهفتشين و
امتحانات رسمية أجنبية و محلية

اذا كنت قد اطلعت عليها من قبل فهذا جيد و أكيد
استفدت من أفكارها و اذا لم تطلع عليها فأعلم أن هذا
هو برنامج المراجعة في مادة الرياضيات خلال شهر كامل
قم بحل تدريسين كل يوم و ستلاحظ الفرق في المستوى
و اكتساب مهارات مبهرة

تحياتي لكم جميعا شعبان أسامة



تجربة تمارين برنامج رمضان 2020

شملت المحاور التالية

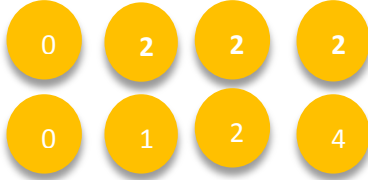
- الدالة العددية 9 تمارين
- الدالة الأسية 9 تمارين
- الدالة اللوغاريتمية 7 تمارين
- المعادلات التفاضلية 2 تمارين
- المتتاليات العددية 12 تمارين
- الاحتمالات 13 تمارين
- الأعداد و الحساب 5 تمارين
- الأعداد المركبة 13 تمارين

التمرين

①

بكالوريا مغربية

يحتوي صندوق على ثمانية (08) كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل كل واحدة منها عددا كما هو موضح في الشكل المقابل:



نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1. نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الثلاثة المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0".

الحدث B : "جاء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 8".

$$\text{بين أن: } P(A) = \frac{5}{14} \text{ و أن: } P(B) = \frac{1}{7}.$$

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجاء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة.

$$\text{أ-بين أن: } P(X = 16) = \frac{3}{28}.$$

ب-الجدول المرفق أسفله يتعلق بقانون الاحتمال المتغير العشوائي.

أتمم الجدول معللا اجابتك.

x_i	0	4	8	16
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$

التمرين

②

بكالوريا فرنسية

ا. الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$.

1. أ-أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب-احسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرها. 2. أ-بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال

$]0; +\infty[$ ثم أعط حصر α سعته 10^{-2} .

ب-عين إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases}$$

1. أ-أدرس استمرارية واشتقاقية الدالة g عند 0.

ب-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2. لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g . من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، أحسب $g'(x)$ ثم تحقق أن: $g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. أ-استنتج إشارة $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

ب-شكل جدول التغيرات للدالة g .

4. أ-بين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$.

ب-استنتج دالة أصلية للدالة f .

✓ التمرين ① :

نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

$$card\Omega = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

عدد الامكانيات الممكنة هو:

1. نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الثلاثة المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0".

$$cardA = C_6^3$$

عدد الكرات ماعدا التي تحمل الرقم 0 هي 6 اذن:

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

منه:

الحدث B : "جاء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 8".

يعني اما ثلاث كرات تحمل الرقم 2 أو كرة تحمل 2 وكرة 4 وكرة 1.

$$cardB = C_4^1 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 4$$

$$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

اذن:

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجاء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة.

$$P(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

أ-تبيان أن:

ب-الجدول المرفق أسفله يتعلق بقانون الاحتمال المتغير العشوائي .

أتمام الجدول :

x_i	0	4	8	16
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

✓ التمرين ② :

الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$.

1. أ-أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$$

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ و $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$$

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \ln(x) = +\infty \end{cases}$

ب- احسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرها.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{2x+1}{2x}$$

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $2x > 0$ و $2x+1 > 0$ و بالتالي: $f'(x) > 0$. إذن الدالة f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

زمنه يكون جدول التغيرات كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2.أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ ثم أعط حصر α سعتة 10^{-2} .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α

حيث: $1.72 < \alpha < 1.73$. لا حظ أن $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$ إذن

ب- عين إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases}$$

1. أ-دراسة استمرارية الدالة g عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8} x^2 + x - \frac{1}{4} x^2 \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7}{8} x^2 + x - \frac{1}{4} x^2 \ln x = 0 = g(0) \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8} x^2 + x \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} x^2 \ln x \right) = 0 \end{cases}$$

اذن الدالة مستمرة عند 0. (لا تنسى: $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ نهاية شبيهة).

دراسة اشتقاقية الدالة g عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-7}{8} x + 1 - \frac{1}{4} x \ln x \right) = 1$$

وبالتالي الدالة قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = 1$.

ب-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-7}{8} x^2 + x - \frac{1}{4} x^2 \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-7}{8} x^2 + x \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} x^2 \ln x \right) = 0 \end{cases}$$

2. لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g . من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

أحسب $g'(x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث:

$$g'(x) = \frac{-7}{4} x + 1 - \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{4} = -2x - \frac{1}{2} x \ln x + 1$$

$$g'(x) = x \left(-2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x$$

لدينا:

$$g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{ثم تحقق أن: } g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. أ-استنتج إشارة $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

$$g'(x) = x.f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ لدينا:}$$

نعلم أن: $x > 0$ فان: $g'(x)$ من اشارة $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

من جدول اشارة الدالة f نجد:

اذا كان $\frac{1}{x} < \alpha$ يعني: $x > \frac{1}{\alpha}$ يصبح لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ وبالتالي: $g'(x) < 0$

اذا كان $\frac{1}{x} = \alpha$ يعني: $x = \frac{1}{\alpha}$ يصبح لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ وبالتالي: $g'(x) = 0$.

اذا كان $\frac{1}{x} > \alpha$ يعني: $x < \frac{1}{\alpha}$ يصبح لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ وبالتالي: $g'(x) > 0$.

ب-شكل جدول التغيرات للدالة g .

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$g(\alpha)$	$-\infty$

4.أ-بين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$.

نقوم باشتقاق الدالة $x \mapsto x \ln x - x$

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x$$

ب-استنتج دالة أصلية للدالة f

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x) \text{ لدينا:}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}(x \ln(x) - x) + c, c \in \mathbb{R} \text{ ومنه:}$$

خاص بالتقني رياضي + رياضيات

التمرين

1

الجبر

- يملك أحمد n قرصا مضغوطة ، اذا قسمها الى مجموعات تضم 17 قرصا يبقى له 9 أما اذا قسمها الى مجموعات تضم 5 أقراص يبقى له 3 أقراص.
1. بين أن : $n \equiv 43[85]$.
2. عين حيث : $900 \leq n \leq 1000$.

الشعب العلمية

التمرين

2

المعادلات التفاضلية

- I. نعتبر المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = -2x^2 + 6x - 4$ (E).
1. بين أن الدالة u المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $u(x) = (x-1)^2$ حل للمعادلة التفاضلية (E).
2. حل المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 0$ (E₀).
3. بين أن دالة v معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} تكون حلا للمعادلة (E) اذا وفقط اذا كانت الدالة $v - u$ حلا للمعادلة (E₀) ، ثم استنتج كل حلول المعادلة التفاضلية (E).
4. عين الدالة φ حل المعادلة التفاضلية (E) والتي تحقق: $\varphi'(0) = 0$.
- II. في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقطة $A(1;0)$ و (Γ) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالدستور: $f(x) = e^x$.
1. عين B نقطة من المنحنى (Γ) حيث تكون AB^2 أصغرا ما يمكن ، محددنا في هذه الحالة المسافة AB .
2. هل مماس المنحنى (Γ) عند النقطة B متعامد مع المستقيم (AB) ؟ برر اجابتك.

✓ التمرين ① :

1. بين أن : $n \equiv 43[85]$.

$$\begin{array}{l} \text{لدينا: } n \equiv 9[17] \text{ و } n \equiv 3[5] \\ \text{لدينا: } 34 \equiv 0[17] \text{ و } 40 \equiv 0[5] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{لدينا: } n \equiv 9 + 14[17] \text{ و } n \equiv 3 + 40[5] \\ \text{لدينا: } n \equiv 43[17] \text{ و } n \equiv 43[5] \end{array}$$

بما ان العددين 5 و 17 أوليان فيما بينهما فان : $n - 43 \equiv 0[5 \times 17]$ أي : $n - 43 \equiv 0[85]$ ومنه : $n \equiv 43[85]$

2. عين حيث : $900 \leq n \leq 1000$.

$$\text{لدينا: } n \equiv 43[85] \text{ أي: } n = 85k + 43, k \in \mathbb{N}$$

$$900 \leq n \leq 1000 \text{ معناه } 900 \leq 85k + 43 \leq 1000$$

$$\text{يكافئ: } \frac{900 - 43}{85} \leq k \leq \frac{1000 - 43}{85} \text{ ومنه: } 10,08 \leq k \leq 11,26 \text{ وبما أن } k \in \mathbb{N} \text{ فان: } k = 11$$

$$\begin{array}{l} \text{وبالتالي: } n = 85(11) + 43 \\ n = 978 \end{array}$$

✓ التمرين ② :

1. نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E) \dots y' - 2y = -2x^2 + 6x - 4$.

1. بين أن الدالة u المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $u(x) = (x-1)^2$ حل للمعادلة التفاضلية (E) .

$$\begin{array}{l} u'(x) = 2(x-1) = 2x - 2 \\ 2u(x) = 2(x-1)^2 \end{array} \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R}$$

$$u'(x) - 2u(x) = 2x - 2 - 2(x-1)^2 = -2x^2 + 6x - 4 \text{ نجد: } (E) \text{ المعادلة}$$

اذن الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (E) .

2. حل المعادلة التفاضلية: $(E_0) \dots y' - 2y = 0$.

حلول المعادلة (E_0) هي الدوال من الشكل $x \mapsto \lambda e^{2x}$ مع: $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. تبين أن دالة v معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} تكون حلاً للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $v-u$ حلاً للمعادلة (E_0) ، ثم استنتج كل حلول المعادلة التفاضلية (E) .

✓ نفرض أن v حل للمعادلة (E) إذا

$$u'(x) - 2u(x) = -2x^2 + 6x - 4 \text{ ولدينا: } v'(x) - 2v(x) = -2x^2 + 6x - 4$$

$$\text{ومنه: } v'(x) - 2u(x) - u'(x) + 2u(x) = 0$$

$$\text{وهذا يعني أن: } v'(x) - u'(x) - 2[v(x) - u(x)] = 0 \text{ تكافئ } (v' - u')(x) - 2[(v - u)(x)] = 0$$

$$\text{أي: } (v - u)'(x) - 2[(v - u)(x)] = 0 \text{ إذن الدالة } v - u \text{ حلاً للمعادلة } (E_0).$$

✓ نفرض الآن $v - u$ حلاً للمعادلة (E_0) معناه:

$$(v - u)'(x) - 2[(v - u)(x)] = 0 \text{ وهذا يعني}$$

$$v'(x) - u'(x) - 2[v(x) - u(x)] = 0$$

$$\begin{aligned} v'(x) - 2v(x) - u'(x) + 2u(x) &= 0 \\ v'(x) - 2v(x) &= u'(x) - 2u(x) \end{aligned} \text{ يكافئ}$$

وبما أن u حل للمعادلة (E) .

$$\text{فإن } u'(x) - 2u(x) = -2x^2 + 6x - 4$$

$$\text{و } v'(x) - 2v(x) = -2x^2 + 6x - 4 \text{ وبالتالي فإن } v \text{ حلاً للمعادلة } (E).$$

مما سبق نستنتج أن: $v(x) - u(x) = \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v(x) &= u(x) + \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \\ v(x) &= (x-1)^2 + \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \text{ ومنه:}$$

4. عين الدالة φ حل المعادلة التفاضلية (E) والتي تحقق: $\varphi'(0) = 0$.

$$v'(x) = 2(x-1) + 2\lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$v'(0) = -2 + 2\lambda \text{ وبالتالي: } v(x) = (x-1)^2 + e^{2x}.$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

II. نعتبر النقطة $A(1;0)$ و (Γ) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالدستور: $f(x) = e^x$.

1. عين B نقطة من المنحنى (Γ) حيث تكون AB^2 أصغر ما يمكن، محددا في هذه الحالة المسافة AB .

$$B \text{ نقطة من المنحنى } (\Gamma) \text{ معناه احداثياتها } B(x, e^x) \text{ } AB^2 = (x-1)^2 + (e^x - 0)^2 = \varphi(x)$$

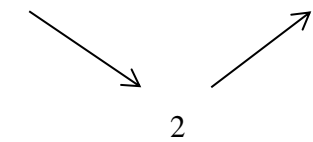
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2(x-1) + 2e^{2x} \\ \varphi''(x) &= 2 + 4e^{2x}\end{aligned}$$

ندرس اتجاه تغير الدالة φ .

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $\varphi''(x) > 0$ إذن الدالة φ' متزايدة تماماً على \mathbb{R} وبما أن: $\varphi'(0) = 0$

$$\varphi'(x) < 0 \text{ على المجال }]-\infty; 0] \text{ و } \varphi'(x) > 0 \text{ على المجال } [0; +\infty[.$$

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $\varphi(x) \geq \varphi(0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$			

ومنه $B(0; e^0)$ أي: $B(0; 1)$.

$$\begin{aligned}AB^2 &= \varphi(0) = 2 \\ AB &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

تحديد المسافة AB :

2. هل مماس المنحنى (Γ) عند النقطة B متعامد مع المستقيم (AB) ؟ برر اجابتك.

لدينا: $f'(0) = e^0 = 1$ إذن معامل توجيه المماس هو 1.

ولدينا معامل توجيه المستقيم (AB) هو: $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$ وبالتالي المستقيمان غير متوازيان

لكن معامل توجيههما متعاكسان إذن مماس المنحنى (Γ) و المستقيم (AB) متعامدان.

التمرين

①

الدالة النسبية + المتتاليات العددية

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

ب- بين ان الدالة k حيث: $k(x) = (2-x)e^x - x$ دالة أصلية للدالة g على المجال $[0; +\infty[$.

ج- استنتج حساب $\int_0^1 g(x)dx$.

2. f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :

$f(0) = 1$ ومن أجل كل يختلف عن الصفر: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. أ- أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ب- عين نهاية الدالة f عند 0، ثم استنتج أن f مستمرة عند الصفر من اليمين .

ج- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

ب- استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

ج- أرسم المنحنى (C_f) .

4. لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $u_n = \frac{1}{n} \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right]$

أ- برهن أن: $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ ثم استنتج أن: $u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$

ب- استنتج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$

التمرين

②

الاحتمالات

يتكون رقم الهاتف من 9 أرقام . الرقم الاول هو 0 و الأرقام الثمانية الاخرى كيفية الكتاب الهدرسي تمرين 220/22

1. ما عدد أرقام الهواتف الكلية ؟

2. ما عدد أرقام الهواتف التي تضم :

(أ) 3 مرات الرقم 1 ؟

(ب) على الأقل ثلاث مرات الرقم 1 ؟

(ج) مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 1 ؟

(د) 5 أرقام زوجية فقط ؟

3. ما عدد أرقام الهواتف التي لا تضم الرقمين 6 و 9 ؟

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

أ- دراسة تغيرات الدالة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x - 1 = -\infty \text{ و } g(0) = 0 \text{ لدينا:}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0; +\infty[$ لدينا: $g'(x) = -xe^x$

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[0; +\infty[$

و جول تغيراتها يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$-\infty$

استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

من جدول التغيرات نلاحظ \ أن $g(x) \leq 0$ على المجال $[0; +\infty[$

ب- تبين ان الدالة k حيث: $k(x) = (2-x)e^x - x$ دالة أصلية للدالة g على المجال $[0; +\infty[$.

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0; +\infty[$ لدينا: $k'(x) = (1-x)e^x - 1 = g(x)$

وبالتالي k دالة أصلية للدالة g على المجال $[0; +\infty[$.

ج- استنتاج حساب $\int_0^1 g(x)dx$.

$$\int_0^1 g(x)dx = k(1) - k(0) = [k(x)]_0^1 = (e-1) - 2 = (e-3)ua$$

2. f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(0) = 1$ و من أجل كل يختلف عن الصفر: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

$$\text{أ- أثبت أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

باستعمال خاصية العدد المشتق: نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+a) - g(a)}{x-a} = g'(a)$ يكفي أن نضع $g(x) = e^x$.

ومنه \: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = (e^x)'(0) = e^0 = 1

ب- عين نهاية الدالة f عند 0،

لدينا \: f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}

اذن \: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)} = \frac{1}{1} = 1

\: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 أي \:

استنتاج أن f مستمرة عند الصفر من اليمين . لدينا \: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1

ج- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \right)$$

نهاية شهييرة

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ومنه $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث:

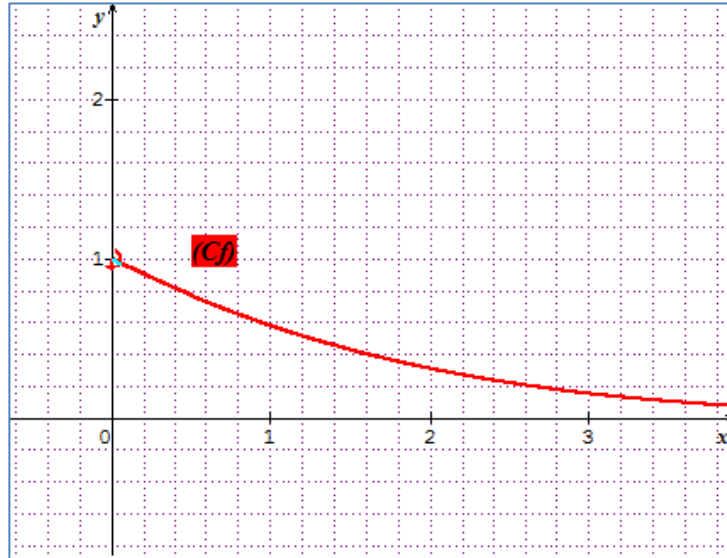
$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - e^x \times x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب- استنتاج تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا \: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$ و مما سبق $g(x) \leq 0$ و $(e^x - 1) > 0$ اذن: $f'(x) < 0$ أي أن الدالة متناقصة تمانا على $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	$-\infty$

ج- رسم المنحنى (C_f) .



4. لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $u_n = \frac{1}{n} \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right]$

أ- برهن أن: $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

هو مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسة حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها $q = e^{\frac{1}{n}}$ $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

وبالتالي: $S_n = 1 \times \frac{1-e^{\left(\frac{1}{n}\right)^n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1-e^1}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ حدد الحدود هو n .

ثم استنتج أن: $u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$ لدينا: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ أي: $f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right)$ $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$

$$u_n = -\frac{1}{n} \left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right) = (1-e) \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right) = -(1-e) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

ومن جهة أخرى:

$$u_n = (e-1) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

ب-استنتاج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$.

بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ولدينا مما سبق $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ وبالجداء والتركيب نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e-1$ فالمتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$.

✓ التمرين ②:

يتكون رقم الهاتف من 9 أرقام . الرقم الاول هو 0 و الأرقام الثمانية الاخرى كيفية

1. عدد أرقام الهواتف الكلية :

بما أن الرقم الأول هو 0 فان كل رقم هاتف فهو عبارة عن قائمة 8 أرقام من بين 9 ومنه عدد أرقام الهواتف الكلية هو :

$$9^8 = 43046721$$

2. عدد أرقام الهواتف التي تضم :

أ- 3 مرات الرقم 1:

كل رقم هاتف الذي رقمه الأول 0 ويضم 3 مرات الرقم 1 هو عبارة عن قائمة 5 أرقام من بين 8 أرقام مع مراعاة أوضاع الرقم 1 ومنه عدد أرقام الهواتف التي تضم 3 مرات الرقم 1 هو: $8^5 \times C_8^3$

$$\text{حيث } C_8^3 = 1835008 \text{ هو عدد أوضاع الأرقام الثلاثة 1 ومنه عدد الرقام في هذه الحالة هو } 8^5 \times C_8^3$$

ب- على الأقل ثلاث مرات الرقم 1 :

عدد أرقام الهواتف التي على الأقل تضم ثلاث مرات الرقم 1 :

$$9^8 - (8^6 \times C_8^2 + 8^7 \times C_8^1) = 18929473$$

ج- مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 2 :

$$\text{عدد أرقام الهواتف التي تضم مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 1: } 7^5 \times C_8^1 = 134456$$

د- 5 أرقام زوجية فقط : $4^4 \times 5^4 \times C_8^4 = 11200000$

3. عدد أرقام الهواتف التي لا تضم الرقمين 6 و9 هو: $7^8 = 5764801$.

تدريبات مقترحة من طرف المرحوم "جمال تاويرت" #مفتش التربية الوطنية سابقا (رحمه الله)

التدريبات

①

النقطة المركبة

1. المستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0 \dots (E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صريين مترافقين.

2. نعتبر النقط A, B, C التي لواحدها على الترتيب: $z_A = -i\sqrt{3}$, $z_B = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$.

1. عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

2. عين زاوية الدوران r الذي مركزه A ويحول B الى C ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. أ- عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوى النقطة M' من

المستوي حيث: $\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$.

ب- عين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T .

التدريبات

②

المتتاليات العددية

جدول التغيرات أدناه هو للدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 2$.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	-1	$+\infty$

1. برر كل العناصر الواردة في جدول التغيرات الدالة g .

2. أ- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$ حيث: $1 \leq \alpha \leq 2$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

3. نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N} : $u_n \geq \alpha$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4- برر لماذا المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

١. لتكن في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0 \dots (E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين

لدينا: $(E) : z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0 \dots$

نفرض أن: αi و $-\alpha i$ هما الحلان الصرفيان المترافقان مع $\alpha \in \mathbb{R}$.

وعليه لدينا من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z) = (z - \alpha i)(z + \alpha i)(az^2 + bz + c)$$

$$P(z) = (z^2 + \alpha^2)(az^2 + bz + c)$$

$$P(z) = az^4 + bz^3 + (\alpha^2 a + c)z^2 + \alpha^2 bz + c\alpha^2$$

$$\alpha^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ \alpha^2 a + c = 24 \Rightarrow a = 1, b = -6, \alpha^2 = 3, c = 21 \\ \alpha^2 b = -18 \\ \alpha^2 c = 63 \end{cases}$$

بالمطابقة ينتج: $a = 1, b = -6, \alpha^2 = 3, c = 21$

$$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (z^2 + 3) = 0 \Rightarrow z = i\sqrt{3}, z' = -i\sqrt{3} \\ (z^2 - 6z + 21) = 0 \Rightarrow z = 3 - 2i\sqrt{3}, z' = 3 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

اذن:

$$S = \{-i\sqrt{3}, 3 - 2i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 3 + 2i\sqrt{3}\}$$

٢. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -i\sqrt{3}, z_B = -3 + 2i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$.

١. عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

$$z_C - z_A = 3 + 3i\sqrt{3} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_B - z_A = -3 + 3i\sqrt{3} = 6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \text{ وعليه}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

٢. تعين زاوية الدوران r الذي مركزه A ويحول B إلى C .

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)} \quad \text{لدينا:}$$

$$z_C - z_A = (z_B - z_A) e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

وهذا يعني: أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow (AC = AB)$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \left(\frac{-\pi}{3}\right) \quad \text{تعني: ان:} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

وبهذا نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$$

4. أ- تعين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

لدينا: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ومنه: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{GM'} - \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{MG}$

وبالتالي: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ نستنتج أن النقطة M' هي صورة نقطة M بالتحاكي الذي مركزه النقطة G ونسبته -2

من العلاقة: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ يكون لدينا:

$$z' - z = (z_A - z) + (z_B - z) + (z_C - z)$$

$$z' = -2z + (z_A + z_B + z_C) \quad \text{أي:}$$

$$z' = -2z + 3z_G$$

ب- تعين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T .

$$z_D = -2z_A + 3z_G$$

$$z_D = 5i\sqrt{3} \quad \text{أي:}$$

✓ **التمرين ②:**

جدول التغيرات أدناه هو للدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 2$.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	-1	$+\infty$

1. تبرر كل العناصر الواردة في جدول التغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x - 2)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{و } g(0) = -1$$

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) = -e^{-x} + 1$.

من أجل: $x \geq 0$ يكون $-x \leq 0$ وبالتالي: $e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

2. أ- البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$ حيث: $1 \leq \alpha \leq 2$.

$$\begin{cases} g(1) \approx -0,63 \\ g(2) \approx 0,14 \end{cases} \Rightarrow g(2) \times g(1) < 0 \quad \text{و } [0; +\infty[\text{ مستمرة ورتيبة تماما على } [0; +\infty[$$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$ حيث: $1 \leq \alpha \leq 2$.

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

3. نعتبر المتتالية العددية (u_n) بعدها الأول $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N} ، $u_n \geq \alpha$.

نسي P_n الخاصية: "من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N} ، $u_n \geq \alpha$ "

لدينا: $u_0 = 5$ ومنه $u_0 \geq \alpha$ لأن: $1 \leq \alpha \leq 2$

اذن P_0 صحيحة.

نفرض أن P_n صحيحة أي $u_n \geq \alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن أن P_{n+1} أي $u_{n+1} \geq \alpha$.

$$-u_n \leq -\alpha$$

$$e^{-u_n} \leq e^{-\alpha} \Rightarrow 2 - e^{-u_n} \geq 2 - e^{-\alpha}$$

$$2 - e^{-\alpha} \geq \alpha \Leftrightarrow 2 - e^{-\alpha} = \alpha$$

$$u_{n+1} \geq \alpha$$

وبما أن: $g(\alpha) = 0$ فان:

اذن P_{n+1} صحيحة.

وبالتالي الخاصية وراثية وعليه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فان من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq \alpha$.

ب- البرهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = 2 - e^{-u_n} - u_n = -g(u_n)$

وبما أن: $u_n \geq \alpha$ فان: $g(u_n) \geq 0$ (لاحظ جدول اشارة $g(x)$)

وعليه: $-g(u_n) \leq 0$ اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
 $u_{n+1} - u_n \leq 0$

4- تبرير لماذا المتتالية (u_n) متقاربة ،

(u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة تماما اذن فهي متقاربة

تعين نهايتها:

بما أن (u_n) متتالية متقاربة نضع: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ومنه:
 $2 - e^{-l} - l = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-l} = l$
 $\Rightarrow g(l) = 0$

وهذا يعني أن $l = \alpha$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

لتكن الدالة f_k المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.
و (C_k) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم: $\|\vec{i}\| = 5cm, \|\vec{j}\| = 10cm$.

الجزء (أ):

1. الدالة f_1 معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$. احسب $f_1'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f_1 واستنتج اتجاه تغيرها.
2. بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$. ثم استنتج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

الجزء (ب):

1. احسب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f_k .
2. من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$. ثم استنتج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.
3. أ- شكل جدول تغيرات الدالة f_k ..
ب- بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$.
4. عين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O .
5. ليكن p و m عددا حقيقيا موجبا تماما حيث $p < m$. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m) .
6. ارسم المماسين (T_1) ، (T_2) والمنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب.

- نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
1. أ- نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب: $a = 2$ و $b = 3 + i\sqrt{3}$ و $c = 2i\sqrt{3}$. حدد قياس الزاوية \hat{ABC} .
ب- استنتج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1 + i\sqrt{3}$.
 2. لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 \end{cases}$$
 من أجل كل n من \mathbb{N} ، نضع النقطة A_n التي لاحقتها z_n .
أ- بين أن النقط A_2, A_3, A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3 + i\sqrt{3}$ ، $2 + 2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.
(لاحظ أن: $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ ، $A_4 = C$).
ب- قارن أطوال القطع $[A_1A_2]$ ، $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.
 3. أ- بين أن من أجل كل n من \mathbb{N} : $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega)$.
ب- استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته وعناصره المميزة.
ج- بين أن من أجل كل n من \mathbb{N} : $A_{n+6} = A_n$ ثم حدد لاحقة A_{2012} .
د- حدد طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$.

الجزء (أ):

الدالة f_k المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

الجزء (أ):

1. الدالة f_1 معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

حساب $f_1'(x)$: الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ،

$$f_1'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \frac{e^x + 1 - e^x - x}{e^x + x} = \frac{1 - x}{e^x + x}$$

واستنتج اتجاه تغيرها:

لدينا: $f_1'(x) = \frac{1 - x}{e^x + x}$ ، بما أن: $x \geq 0$ فان اشارة $f_1'(x)$ من اشارة البسط أي: $1 - x$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-

وبالتالي: f_1 متزايدة على المجال $[0; 1]$ ومتناقصة على المجال $[1; +\infty[$

2. بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(e^x + x) - x = \ln\left(e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x \\ &= x + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) \end{aligned}$$

استنتج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$$

3. شكل جدول تغيرات الدالة f_1 :

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$		$f_1(1)$	

	0	0
--	---	---

حيث: $f_1(0) = 0, f_1(1) = \ln(e+1) - 1$

الجزء (ب):

حساب $f'_k(x)$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$:

الدالة f_k قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ،

$$f'_k(x) = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = \frac{e^x + k - e^x + kx}{e^x + kx} = \frac{k(1-x)}{e^x + kx}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f_k :

لدينا: $x \geq 0$ و $k > 0$ وبالتالي $f'_k(x)$ من نفس إشارة $1-x$:

مما سبق نجد أن: f_k متزايدة على المجال $[0; 1[$ و متناقصة على المجال $]1; +\infty[$

2. بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \ln(e^x + kx) - x = \ln\left(e^x \left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) - x \\ &= x + \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) - x = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) \end{aligned}$$

استنتاج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(k \frac{x}{e^x}\right) = 0, k > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$$

3.أ- شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

x	0	1	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	0	$f_k(1)$	0

حيث: $f_k(0) = 0, f_k(1) = \ln(e+k) - 1$

ب- اثبات أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

$$f_k(x) \leq f_k(1)$$

من جدول التغيرات نلاحظ أن: $f_k(1) = \ln(e+k) - 1 = \ln(e+k) - \ln e = \ln\left(\frac{e+k}{e}\right)$

$$\text{اذن: } f_k(x) \leq \ln\left(\frac{e+k}{e}\right) \text{ ، نعلم أنه من أجل } x > 0 \text{ لدينا: } \ln(x) \leq x \text{ وبالتالي:}$$

$$f_k(x) \leq \ln\left(\frac{e+k}{e}\right) \leq \frac{k}{e}$$

4. تعيين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O .

$$\begin{aligned} (T_k): y &= f'_k(0)x + f_k(0) \\ (T_k): y &= kx \end{aligned} \quad \text{معادلة المماس } (T_k):$$

5. ليكن $0 < p < m$. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m) .

ندرس إشارة الفرق: $f_p(x) - f_m(x)$ ، نجد:

$$\begin{aligned} f_p(x) - f_m(x) &= \ln(e^x + px) - x - \ln(e^x + mx) + x \\ &= \ln(e^x + px) - \ln(e^x + mx) = \ln\left(\frac{e^x + px}{e^x + mx}\right) \end{aligned}$$

$$e^x + px < e^x + mx$$

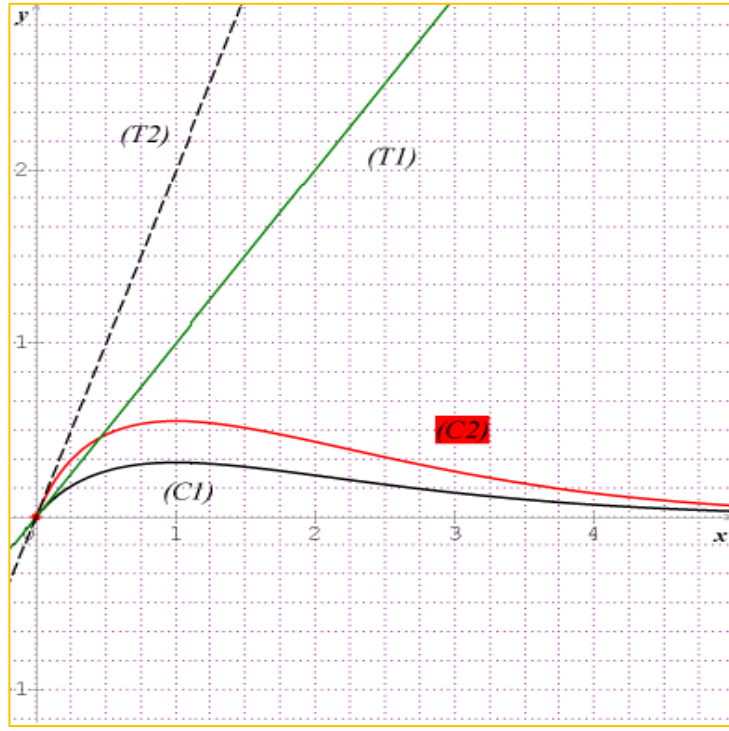
$$\frac{e^x + px}{e^x + mx} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^x + px}{e^x + mx}\right) < 0 \quad \text{نستنتج أن:} \quad \begin{matrix} e^x + px > 0 \\ e^x + mx > 0 \end{matrix} \quad \text{بما أن: } 0 < p < m \text{ فإن:}$$

وبالتالي: $f_p(x) - f_m(x) < 0$ اذن المنحنى (C_p) يقع تحت (C_m) من أجل $0 < p < m$.

6. رسم المماسين (T_1) ، (T_2) والمنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب.

$$(T_1): y = x$$

$$(T_2): y = 2x$$



✓ التمرين ②:

1. أ- تحدد قياس الزاوية \hat{ABC} . نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب: $a = 2$ و $b = 3 + i\sqrt{3}$ و $c = 2i\sqrt{3}$.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)$$

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}}$$

لدينا:

$$= -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

ب- استنتاج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1 + i\sqrt{3}$.

بما أن المثلث ABC قائم في B فإن $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC وبالتالي: $\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

2. لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 \end{cases}$ من أجل كل n من \mathbb{N} . نضع النقطة A_n التي لاحقتها z_n .

أ- بين أن النقط A_2, A_3, A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3 + i\sqrt{3}$ ، $2 + 2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ و $A_4 = C$).

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_0 + 2 = 2 = a$$

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_1 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (2) + 2 = 1+i\sqrt{3} + 2 = 3+i\sqrt{3} = b$$

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_2 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (3+i\sqrt{3}) + 2 = 2+2i\sqrt{3}$$

$$z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_3 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (2+2i\sqrt{3}) + 2 = 2i\sqrt{3} = c$$

ب- مقارنة أطوال القطع $[A_3A_4]$ و $[A_2A_3]$, $[A_1A_2]$.

$$A_3A_4 = |z_4 - z_3| = 2 \quad A_2A_3 = |z_3 - z_2| = 2 \quad A_1A_2 = |z_2 - z_1| = 2$$

اذن: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

أ.3- اثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega)$

$$\begin{aligned} z_{n+1} - \omega &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - (1+i\sqrt{3})) \\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega) \end{aligned} \quad \text{ليكن } n \in \mathbb{N}$$

ب- استنتاج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته وعناصره المميزة.

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega) \quad \text{بما أن :}$$

$$z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_n - \omega) \quad \text{أي:}$$

فان A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج- اثبات أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$

$$\begin{aligned} v_n &= -\omega \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^n = -\omega e^{in\frac{\pi}{3}} \\ v_0 &= -\omega \quad \text{وحدها الأول} \quad \text{اذن:} \quad v_n = z_n - \omega \quad \text{لدينا:} \quad (v_n) \quad \text{متتالية هندسية أساسها} \quad e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$z_n = \omega - \omega e^{in\frac{\pi}{3}}$$

$$z_{n+6} = \omega - \omega e^{i\frac{(n+6)\pi}{3}} = \omega - \omega e^{i\frac{(n+6)\pi}{3}} = \omega - \omega e^{in\frac{\pi}{3}} e^{i2\pi} = \omega - \omega e^{in\frac{\pi}{3}} = z_n$$

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$z_{2012} = \omega - \omega e^{i\frac{(2012)\pi}{3}} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}$$

د-تحدد طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$:

$$d_n = A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| \text{ نضع}$$

بحساب d_{n+1} نجد: $d_{n+1} = d_n$ اذن: (d_n) متتالية ثابتة ومنه: $d_n = d_1 = A_1 A_2 = 2$
 $A_n A_{n+1} = 2$

بكالوريا فرنسية (التمرين 2)

التمرين ①

الاحتمالات

يحتوي صندوق على عشر كريات لا يمكن التمييز بينها باللمس ثلاثة منها تحمل الرقم 0 وثلاثة أخرى تحمل الرقم π والأربعة المتبقية تحمل الرقم $\frac{\pi}{6}$.

نسحب عشوائيا وعلى التوالي دون إرجاع كرتان من الصندوق ونسجل العددين الظاهرين. نرمز لهذين العددين بـ α و β .

(1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة العدد $\cos(\alpha + \beta)$.

أ. عرف قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X .

ب. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(2) نقوم الآن باللعبة الآتية: يربح اللاعب $100DA$ عند حصوله على $\cos(\alpha + \beta) = 1$ ويخسر $50DA$ في باقي الحالات.

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة.

أ. عين قانون الاحتمال لـ Y .

ب. يكرر اللاعب هذه اللعبة ثلاث مرات بحيث يعيد اللاعب الكرتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة: ما هو احتمال أن يربح اللاعب $150DA$.

التمرين ②

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$ و $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. بين أنه من أجل كل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة.

2. أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

3. أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha \in]0; 1[$.

ب- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4. شكل جدول تغيرات الدالة f .

5. لتكن النقطتين $I\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$ و $J(1; 1)$.

أ- بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J .

ب- عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T) .

6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C). (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.8$)

7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$.

8. أحسب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $y = 0$ و $x = e$.

عشر كريات لا يمكن التمييز بينها باللمس ثلاثة منها تحمل الرقم 0 وثلاثة أخرى تحمل الرقم π والأربعة المتبقية تحمل الرقم $\frac{\pi}{6}$.

1. X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة العدد $\cos(\alpha + \beta)$.

أ- قانون الإحتمال لهذا المتغير العشوائي X .

عدد امكانيات سحب كرتين من بين 10 كريات هو: $C_{10}^2 = 45$.

نقوم بالاحصاء الامكانيات الممكنة نجد:

$$\cos(0+0) = \cos(0) = 1$$

$$\cos(0+\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\cos\left(0+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\pi+\pi) = \cos(2\pi) = 1$$

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

و بالتالي قيم المتغير العشوائي هي: $X = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$p\left(X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}$$

$$p(X = -1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{9}{45}$$

$$p\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$$

$$p\left(X = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}$$

$X = x_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$p(X = x_i)$	$\frac{12}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$

ب. حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{12}{45}\right) - \frac{9}{45} + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{45}\right) + \frac{6}{45} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{12}{45}\right) = 0$$

$$E(X) = 0$$

2) أ. تعين قانون الإحتمال لـ $Y = \{-50, 100\}$.

$$p(Y = -50) = p\left(X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + p(X = -1) + p\left(X = \frac{1}{2}\right) + p\left(X = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{39}{45}$$

$$p(Y = 100) = p(X = 1) = \frac{6}{45}$$

$Y = y_i$	-50	100
$p(Y = y_i)$	$\frac{39}{45}$	$\frac{6}{45}$

ب. احتمال أن يربح اللاعب $150DA$. معناه يربح مرتين $100DA$ و يخسر مرة $50DA$. أي:

$$p(Y = 150) = p(Y = 100) \times p(Y = 100) \times p(Y = -50)$$

$$p(Y = 150) = \left(\frac{6}{45}\right)^2 \times \frac{39}{45}$$

✓ التمرين ②:

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$ و $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1. اثبات أنه من أجل كل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة.

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}^*: f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}\right) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2} = \frac{g(x)}{3x^2}$$

اذن: $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$ ولدينا $x \in \mathbb{R}^*$ يعني: $3x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس الإشارة $g(x)$.

2. دراسة تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} : $g'(x) = 6x^2 + 2x$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(-\frac{1}{3}\right)$	$g(0)$	$+\infty$

$$g(0) = -1$$

$$g\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-26}{27} \text{ حيث:}$$

3.أ- اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha \in]0;1[$.

$$g(0) = -1 < 0$$

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0;1[$ و $g(1) = 2 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α . (لم يطلب تعيين حصر له).

ب- استنتاج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

4. شكل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow f(\alpha)$	$f(\alpha) \rightarrow +\infty$	$+\infty$

نحسب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

5. لتكن النقطتين $I\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

أ- اثبات أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J . حيث: $I\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

نعين معادلة المستقيم (IJ) :

$$\text{معامل توجيه المستقيم } (IJ) \text{ هو: } a = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \text{ وبالتالى المستقيم } (IJ) \text{ من الشكل: } y = \frac{2}{3}x + b.$$

$$(IJ): y = \frac{2}{3}x + 1 \text{ ومنه: } J \in (IJ)$$

من جهة ثانية نعين معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة J أي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ونجد: $y = \frac{2}{3}x + 1$.

المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J.

ب-تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I.

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$(T): y = \frac{-2}{3}(x+1) + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$$

ج-دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T).

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ نجد:

$$f(x) - y = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{-2}{3}x - 1\right) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x}$$

باستعمال القسمة نحصل: نلاحظ ان (-1) جذر للبسط

$$f(x) - y = \frac{(x+1)^2(x+1)}{3x}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x+1	-	0	+	
3x		-		+
f(x)-y	+	0	-	+

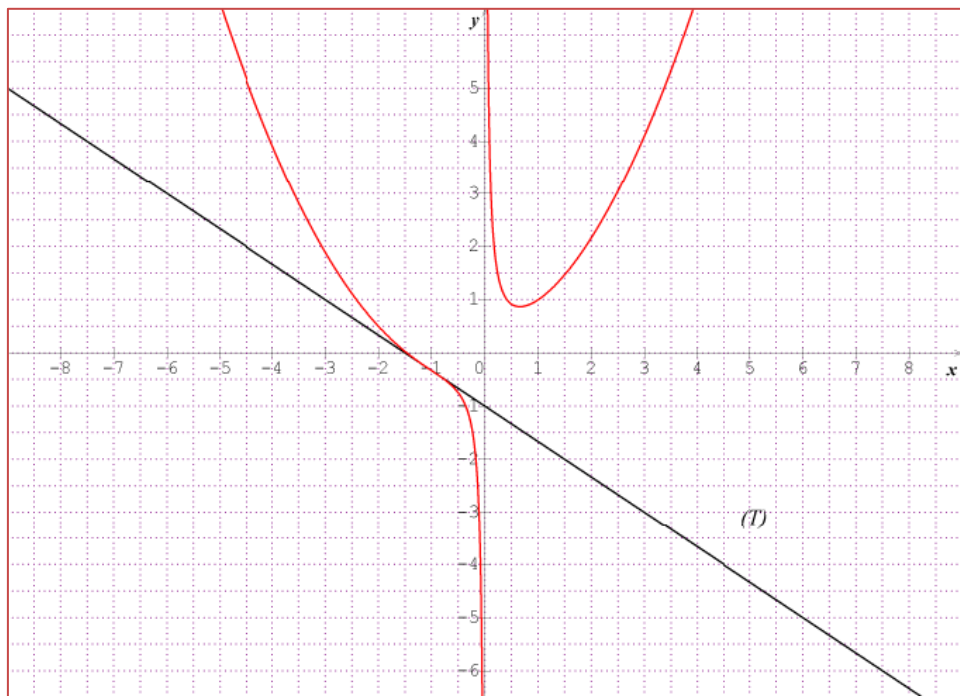
اذن من أجل $x \in]-\infty; -1[$ (C) يقع فوق المماس (T).

من أجل $x \in]-1; 0[$ (C) يقع تحت المماس (T).

من أجل $x \in]0; +\infty[$ (C) يقع فوق المماس (T).

المنحنى (C) يتقاطع مع المماس (T) في النقطة $I\left(-1; \frac{-1}{3}\right)$.

6.رسم المماس (T) والمنحنى (C). (نأخذ $f(x) \approx 0.8$).



7. المناقشة

$$\begin{aligned}
 x^3 + x^2 - 3mx + 1 &= 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + 1 = 3mx \\
 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{x} &= 3m \quad \text{لدينا:} \\
 \Rightarrow \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) &= m \Rightarrow f(x) = m
 \end{aligned}$$

حلول هذه المعادلة بيانيا هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى مع (C) المستقيم ذا المعادلة: $y = m$.

لما $m \in]-\infty, f(\alpha)[$ يوجد حل واحد .

لما $m = f(\alpha)$ يوجد حلان أحدهما حل وحيد مضاعف

لما $m \in]f(\alpha), +\infty[$ يوجد ثلاث حلول

8. حساب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$

لدينا من أجل $x \in [1; e]$ ، $f(x) > 0$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^e f(x) - y dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^e \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^e = \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} + \ln e \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} + 1 \right) - \frac{5}{18} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} \right) - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} \right) u.a
 \end{aligned}$$

بكالوريا فرنسية (التمرين 1)

بكالوريا مغربية (التمرين 2)

التمرين

①

متتاليات عددية

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحددهما الأول $u_0 = 1$ و $v_0 = 6$ من أجل كل n عدد طبيعي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

1. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة كما يلي: $w_n = v_n - u_n$ ، من أجل كل n من \mathbb{N} .

بين أن المتتالية (w_n) هندسية ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n

2. نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل n عدد طبيعي كما يلي: $t_n = 8v_n + 3u_n$

بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج عبارة حددها العام.

3. عبر عن v_n بدلالة w_n و t_n . ثم استنتج v_n بدلالة n واحسب نهايتها.

4. ما هي نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين

②

أعداد مركبة

1- نعتبر العدد المركب $Z = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

$$Z = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

3. أ- باستعمال قوانين موافرين أن: $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$.

ب- بين أن: $Z = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن: $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$) ثم أكتب العدد

المركب Z على شكله المثلثي.

$$Z^6 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^6 i$$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما

$\omega = \sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكون h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2.

1. بين أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4 + \sqrt{3}) + 2i$.

2. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |Z|$.

التمرين

③

إثبات

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 (✓ خاص بالتقني رياضي و الرياضي فقط)

2. بين أن العدد: $2 - 2017^{1438} - 1438^{2017}$ يقبل القسمة على 7.

3. عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد: $1 + 15n^2 + 2017^{6n+3} - 1438^{6n+5}$ يقبل القسمة على 7.

4. عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد: $0 \equiv [7] 4^{6n+1} + 3^{6n+2} \times (4n+3)$.

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحددهما الأول $u_0 = 1$ و $v_0 = 6$ من أجل كل n عدد طبيعي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

1 اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية :

بما أن: $w_n = v_n - u_n$ ، من أجل كل n من \mathbb{N} . و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n$ و $v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n$.

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n \\ &= -\frac{1}{12}u_n + \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{12}w_n \end{aligned}$$

و بالتالي : المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 6 - 1 = 5$.

استنتاج عبارة w_n بدلالة n : $w_n = w_0 \times q^n = 5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

2. لدينا من أجل كل n عدد طبيعي : $t_n = 8v_n + 3u_n$

تبيان أن المتتالية (t_n) ثابتة:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 8\left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) + 3\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right) = 8v_n + 3u_n = t_n \\ &\Leftrightarrow t_{n+1} = t_n = t_0 \end{aligned}$$

و بالتالي المتتالية (t_n) ثابتة

$$\begin{aligned} t_n &= t_0 = 8v_0 + 3u_0 = 51 \\ t_n &= 51 \end{aligned}$$

3. التعبير عن v_n بدلالة w_n و t_n :

$$\text{لدينا: } \begin{cases} w_n = v_n - u_n \\ t_n = 8v_n + 3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3w_n = 3v_n - 3u_n \dots\dots\dots (1) \\ t_n = 8v_n + 3u_n \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$11v_n = 3w_n + t_n \Rightarrow v_n = \frac{3}{11}w_n + \frac{1}{11}t_n$$

استنتاج v_n بدلالة n .

$$v_n = \frac{3}{11} \left(5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \right) + \frac{1}{11}(45) = \frac{15}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{51}{11}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{15}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 51$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{15}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0 \\ (0 < q < 1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{51}{11}$$

حساب نهاية (v_n) :

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \right) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{3}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

لدينا:

$$\frac{51}{11} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{3}{4} \left(\frac{51}{11} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{51}{11}$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{51}{11}$

✓ التمرين ②:

1- نعتبر العدد المركب $Z = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. بين أن طويـلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$|Z| = |2 + \sqrt{3} + i| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

2. التحقق من أن: $Z = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$Z = 2 + \sqrt{3} + i = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \cdot 2 \frac{1}{2} = 2 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

3-أ. اثبات أن: $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$.

نعلم أن:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2e^{2i\theta} \cdot e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4}$$

ومنه:

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} [\cos(2\theta) + 1]$$

$$\Rightarrow 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$$

$$Z = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

ب- اثبات ان:

(نذكر أن: $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

$$\begin{aligned}
Z &= 2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) + 2i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \\
&= 2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{12} \right) \right) + 2i \sin \left(\frac{2\pi}{12} \right) \\
&= 2 \times 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) + i 2 \times 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \text{ لدينا:} \\
&= 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) + 4i \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \\
&= 4 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right]
\end{aligned}$$

كتابة العدد المركب Z على شكله المثلثي: بما أن:

$$\begin{aligned}
4 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) > 0 &\Rightarrow |Z| = 4 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \\
Z &= 4 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$Z^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 i \text{ ج-اثبات أن:}$$

$$\begin{aligned}
Z^6 &= \left(|Z| \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right] \right)^6 \\
&= |Z|^6 \times \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right]^6 \\
&= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 \left[\cos \left(\frac{6\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{6\pi}{12} \right) \right] \text{ ومنه حسب موافق:} \\
&= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \\
Z^6 &= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 i
\end{aligned}$$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما

$$\omega = \sqrt{3} \text{ و } Z \text{ على الترتيب ليكون } h \text{ التحاكي الذي مركزه } \Omega \text{ ونسبته } 2.$$

1. البرهان على أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

$$\begin{aligned}
d - \omega &= 2(p - \omega) \\
\text{أي: } d &= 2p - \omega \quad \text{اذن: لاحقة النقطة } D \text{ صورة النقطة } P \text{ بالتحاكي } h \text{ هي } (4+\sqrt{3})+2i. \\
d &= (4+\sqrt{3})+2i
\end{aligned}$$

2. تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |Z|$.

$$|z-d|=2\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{تكافئ} \quad |z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$$

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها النقطه D ونصف قطرها $4(2+\sqrt{3})$.

✓ التمرين ③:

(✓ خاص بالتقني رياضي و

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7

(الرياضي فقط)

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]

2. اثبات أن العدد: $1438^{2017} - 2017^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.

نفرض العدد المعطى هو A_n لدينا:

$$A_n = 0[7] \text{ أي: } A_n \equiv 3 - 1 - 2[7] \text{ ومنه: } A_n \equiv 3^{6k+1} - 1^{1438} - 2[7] \text{ ومنه: } 2016 \equiv 1[7] \text{ و } 1438 \equiv 3[7]; 2017 = 6k + 1$$

3. تعين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد: $1438^{6n+5} - 2017^{6n+3} + 15n^2 + 1$ يقبل القسمة على 7.

نفرض العدد المعطى هو B_n لدينا:

$$\begin{aligned} B_n &\equiv 0[7] \text{ يكافئ: } 3^{6n+5} - 1^{6n+3} + 15n^2 + 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه: } 5 - 1 + n^2 + 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه: } \\ n^2 + 5 &\equiv 0[7] \text{ ويكافئ: } n^2 - 9 \equiv 0[7] \text{ ومنه: } (n-3)(n+3) \equiv 0[7] \text{ ولأن 7 عدد أولي نجد: } n+3 \equiv 0[7] \text{ أو } \\ n-3 &\equiv 0[7] \text{ وأخيرا: } n = 7k + 4; n = 7k + 3; \end{aligned}$$

4. تعين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد: $(4n+3) \times 3^{6n+2} + 4^{6n+1} \equiv 0[7]$.

نفرض العدد المعطى C_n

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } C_n &\equiv 0[7] \text{ يكافئ: } (4n+3) \times 3^{6n+2} + 4^{6n+1} \equiv 0[7] \text{ ومنه: } (4n+3) \times 2 + (-3)^{6n+1} \equiv 0[7] \text{ ومنه: } \\ 8n+6+(-1)^{6n+1} \times 3^{6n+1} &\equiv 0[7] \text{ ومنه: } n+6-1 \times 3 \equiv 0[7] \text{ نجد: } n-3 \equiv 0[7] \text{ وأخيرا: } n = 7k + 3 \end{aligned}$$

التمرين

①

أسئلة في الدالة العددية

أجب عن الأسئلة التالية:

①. دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

أ.1- احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب- أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

②. دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

أ- أثبت أن الدالة g زوجية.

③. دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = |f(x)|$.

بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقاً من (C_f) . ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$.

④. دالة للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$: $x \neq 2$ و $f(2) = m$

عين قيمة m حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.

⑤. أ- احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

ب- احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) منحنى الدالة f حيث: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ و

محور الفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ و $x=1$.

⑥. الدالة المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$: $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ و $f(0) = 0$

1. بين أن f مستمرة عند القيمة 0.

2. بين أن f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0.

⑦. احسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

في كل حالة من الحالات الخمس الآتية اقترحت أربع اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل:

①. z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ ، الشكل الجبري للعدد هو:

أ- $2i - \frac{8}{3}$ ، ب- $2i - \frac{8}{3}$ ، ج- $2i + \frac{8}{3}$ ، د- $2i + \frac{8}{3}$.

②. في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات الاحقة $z = x + iy$ التي تحقق: $|z-1| = |z+i|$ هي المستقيم ذو المعادلة:

أ- $y = x - 1$ ، ب- $y = -x$ ، ج- $y = -x + 1$ ، د- $y = x$.

③. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه n من الشكل :

أ- $3k+1$ ، ب- $3k+2$ ، ج- $3k$ ، د- $6k$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$.

④. نعتبر المعادلة $(E): z = \frac{6-z}{3-z}$ مع $z \in \mathbb{C}$ ، حل للمعادلة (E) هو:

أ- $-2-i\sqrt{2}$ ، ب- $2+i\sqrt{2}$ ، ج- $1-i$ ، د- $-1-i$.

⑤. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. اللاحقة

z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ هي:

أ- $-i$ ، ب- $2i$ ، ج- $\sqrt{3}+i$ ، د- $\sqrt{3}+2i$.

التصحيح النموذجي المقترح

✓ التمرين ①:

①. k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

1. أ- حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$

ومنه: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -5$

ولدينا: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$

ومنه: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3$

نستنتج أن: k الدالة دالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن العدد المشتق من اليمين (-3) لا يساوي العدد المشتق من اليسار (-5).

بما أن البدالة k قابلة للاشتقاق من اليمين وقابلة للاشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ملاحظة: يمكن القول أن النقطة $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k .

②. g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

أ- اثبات أن الدالة g زوجية:

تذكير: f دالة معناه: من أجل كل x من D_f و $-x$

من D_f لدينا: $f(-x) = f(x)$.

$$g(-x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= g(x)$$

ومنه: الدالة g زوجية.

شرح طريقة الرسم:

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

أي: إذا كان $x > 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) .

إذا كان $x < 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

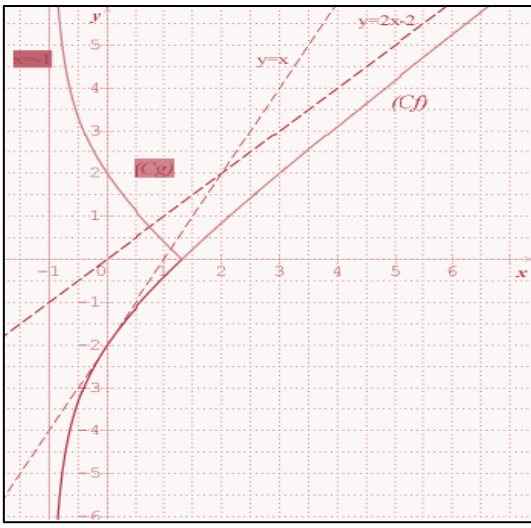
③. g دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = |f(x)|$.

كيفية انشاء (C_g) انطلاقاً من (C_f) :

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} g(x) = f(x), & x > x_0 \\ g(x) = -f(x), & x < x_0 \end{cases}$$

وبالتالي:

من أجل $x > x_0$ (C_g) منطبق على (C_f) .



من أجل (C_g) $x < x_0$ نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

ناقش بياناً، عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$.

لدينا من أجل :

$m = 0$ للمعادلة حل وحيد موجب $(x = x_0)$.

$0 < |m| < \sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين.

$|m| = \sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجب والآخر معدوم.

$|m| > \sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة.

④ . تعيين قيمة m :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}, & x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

f مستمرة عند $x_0 = 2$ يعني: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ومنه: $m = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

نحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \quad \text{لدينا:}$$

بالتعويض المباشر نجد "ح ع ت" من الشكل $\frac{0}{0}$.

لرفع "ح ع ت" نقوم بضرب وقسمة في مرافق بسط ومقام عبارة $f(x)$.

تذكير: a و b عددان حقيقيان، مرافق العدد $\sqrt{a} + b$ هو $\sqrt{a} - b$ مثال: مرافق العدد $\sqrt{2} - 1$ هو $\sqrt{2} + 1$

أي:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})}{(\sqrt{4x+1}-3)} \times \frac{(x + \sqrt{x+2})}{(x + \sqrt{x+2})} \times \frac{(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{18}{16} \end{aligned}$$

و بالتالي: $m = \frac{9}{8}$.

٥. أ- حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

ب- المساحة:

$$S = 4 \cdot \int_0^1 f(x) dx = 4 cm^2 \times \left(\int_0^1 1 - \frac{x}{x^2+1} dx \right) cm^2$$

$$S = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) cm^2 \text{ ومنه:}$$

$$S = (4 - 2 \ln 2) cm^2 \text{ أي:}$$

٦. 1. الدالة f مستمرة عند القيمة 0 لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x) \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = 0$ و $f(0) = 0$.

2. الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

٧. لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$. تظهر لنا حالة عدم التعيين من الشكل: $\frac{+\infty}{+\infty}$.

بما أن: $x \mapsto +\infty$ فإن: $x > 0$ ومنه: $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \text{ ومنه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1 \text{ إذن}$$

✓ التمرين ٢:

١. z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$

يكفي التعويض في الشكل الجبري في العلاقة المعطاة نجد: $\frac{8}{3} + 2i + \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 4} = \frac{8}{3} + 2i + \frac{10}{3} = 6 + 2i$

الشكل الجبري للعدد هو: $\frac{8}{3} - 2i$ الإجابة (أ)

2. ليكن عدد مركب z ، نضع $z = x + iy$.

معناه: $|z - 1| = |z + i|$

$$|z - 1|^2 = |z + i|^2$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$y = -x$$

الإجابة (ب)

3. n عدد طبيعي،

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

أي:

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n = 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه: $2^n \sin\frac{n\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi$ الإجابة (ج).
 $n = 3k, (k \in \mathbb{N})$

4. حل للمعادلة (E):

$$z = \frac{6 - z}{3 - z} \Leftrightarrow \frac{z(3 - z)}{3 - z} = \frac{6 - z}{3 - z} \Leftrightarrow 3z - z^2 = 6 - z$$

الإجابة (ب)

$$\Rightarrow z^2 - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i\sqrt{2} \\ z_2 = 2 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

ومنه:

5. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة

C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$ هي:

ABC مثلث متقايس الأضلاع اذا كانت C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A)$$

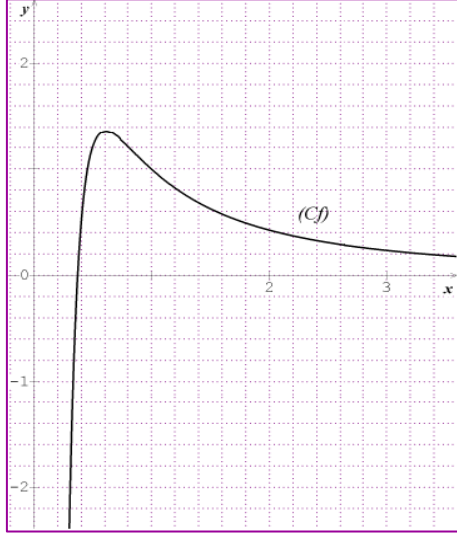
بعد النشر نجد: $z_C = \sqrt{3} + 2i$ الاجابة (د).

$$z_C - i = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\sqrt{3} - i)$$

بكالوريا مغربية (التدريب 1)

التدريب ①

الدالة الوغاريتمية



I. لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ ، وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (أنظر الشكل المقابل)

1. أ- أحسب نهاية الدالة f عند 0 على اليمين، فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

ب- حل في $]0; +\infty[$ المتراجحة: $1 - 2 \ln x > 0$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعيين إحداثياتها.

ب- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n مساحة الحيز المحصور بين (C_f) وحامل محور الفواصل و

المستقيمين الذين معادلتهم: $x = \frac{1}{e}$ و $x = n$.

1- بين أن: $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$

2- بين أن دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$

3- أحسب I_n بدلالة n .

4- أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

التدريب ②

الاحتمالات

يحتوي صندوق على 10 بطاقات منها 5 بطاقات كتب على كل بطاقة الرمز α و 3 بطاقات كتب على كل بطاقة الرمز β و بطاقتين كتب على كل بطاقة الرمز γ . البطاقات لانفرق بينهما أثناء اللمس، نسحب من الصندوق بطاقتين في آن واحد و نعتبر اللعبة :

- إذا حصلنا على بطاقة تحمل الرمز α نربح 5 نقاط.

- إذا حصلنا على بطاقة تحمل الرمز β نربح نقطتين.

- إذا حصلنا على بطاقة تحمل الرمز γ نخسر نقطة واحدة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية المجموع الجبري للنقط المسجلة على البطاقتين المسجلتين.

1. عين قيم X المتغير العشوائي الممكنة.

2. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

3. أحسب الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري.

✓ التمرين ①:

1. لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.

$$1.1 \text{ - حساب } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} (1 + \ln x) = -\infty$$

التفسير: $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

التفسير: $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2. إثبات أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]0; +\infty[\text{، } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$\text{اذن: } f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$$

ب- حل في $]0; +\infty[$ المتراجحة: $1 - 2 \ln x > 0$

$$-1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow -2 \ln x > 1$$

$$\text{أي: } S = \left] 0; e^{-\frac{1}{2}} \right[\Leftrightarrow 2 \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ من إشارة البسط أي: $1 - 2 \ln x$ أي:

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

3.أ- اثبات أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة .

نقوم بحل المعادلة: $f(x) = 0$ أي:

$$\frac{1 + \ln x}{x^2} =$$

$$1 + \ln x = 0, [x^2 \neq 0, x \in]0; +\infty[$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

وبالتالي احداثيا النقطة هي: $\left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ ، نلخصها في الجدول التالي:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين

معادلتهما: $x = \frac{1}{e}$ و $x = n$.

1. اثبات أن: $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$ على المجال $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$ لدينا: $0 \leq f(x) \leq \frac{e}{2}$ وبالتالي

$$0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx$$

$$0 \leq I_2 \leq \frac{e}{2} \int_{\frac{1}{e}}^2 1 dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \quad \text{لأن} \quad 0 \leq I_2 \leq \frac{e}{2} [x]_{\frac{1}{e}}^2 \quad \text{أي:}$$

$$0 \leq I_2 \leq \frac{e}{2} \left[2 - \frac{1}{e} \right]$$

$$0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$$

2- تبين أن $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا الدالة $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، حيث:

$$F'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (-2 - \ln x)}{x^2} = \frac{-1 + 2 + \ln x}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2} = f(x).$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x).$$

3- حساب I_n بدلالة n .

على المجال $\left[\frac{1}{e}; n \right]$ لدينا:

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx = \left[\frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^n = \left(\frac{-2 - \ln(n)}{n} \right) - \left(\frac{-2 - \ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} \right)$$

$$= \left(\frac{-2 - \ln(n)}{n} \right) - (-e)$$

$$I_n = e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$$

4- حساب نهاية (I_n) عند $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n} \right], \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e \quad \text{لدينا:}$$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية المجموع الجبري للنقط المسجلة على البطاقتين المسجلتين.

1. تعين قيم X المتغير العشوائي الممكنة: $X = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$.

2. تعين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$p(X = -2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45} \quad \text{هو احتمال الحصول على بطاقتين تحملان الرمز } \gamma.$$

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \quad \text{هو احتمال الحصول بطاقة تحمل الرمز } \beta \text{ وأخرى تحمل الرمز } \gamma.$$

$p(X = 4)$ هو احتمال الحصول بطاقتين أحدهما تحمل الرمز α والأخرى تحمل الرمز γ

$$p(X = 4) = \frac{C_5^1 \times C_2^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{13}{45} \quad \text{أو الحصول على بطاقتين تحملان الرمز } \beta.$$

$$p(X = 7) = \frac{C_5^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{3} \quad \text{هو احتمال الحصول على بطاقتين أحدهما تحمل الرمز } \alpha \text{ والأخرى تحمل الرمز } \beta.$$

$$p(X = 10) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9} \quad \text{هو احتمال الحصول على بطاقتين تحملان الرمز } \alpha.$$

نعرف قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	-2	1	4	7	10
p_i	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

$$E(x) = -2\left(\frac{1}{45}\right) + 1\left(\frac{2}{15}\right) + 4\left(\frac{13}{45}\right) + 7\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{261}{45} = 5.8 \quad \text{حساب الأمل الرياضي:}$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (-2)^2\left(\frac{1}{45}\right) + 1^2\left(\frac{2}{15}\right) + 4^2\left(\frac{13}{45}\right) + 7^2\left(\frac{1}{3}\right) + 10^2\left(\frac{2}{9}\right) - 33.64 = 9.76$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9.76} \approx 3.12 \quad \text{الانحراف المعياري:}$$



تلمسان: 2020/05/03 ✍️

تمرين للتخصير: ينشر الحل غدا ان شاء الله

يحتوي كيس على $n + 8$ كرية لا نفرق بينهما باللمس، 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2)

1..نسحب على التوالي كرتين مع ارجاع الكرية المسحوبة في كل مرة الى الكيس بحيث نربح دينارا من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة و نخسر دينارين من أجل كل كرية سوداء مسحوبة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح الجبري .

أ-ماهي قيم المتغير العشوائي الممكنة.

ب-أكتب بدلالة n قانون احتماله.

ج-أحسب أمله الرياضيائي.

د-هل توجد قيمة للعدد n تجعل الأمل الرياضيائي معدوما؟ أحسبها.

2.نفرض أننا سحبنا كرتين على التوالي من دون ارجاع، ليكن A_n حادث الحصول على كرتين من نفس اللون . B_n حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين.

أ-احسب $p(A_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

ب- احسب $p(B_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(B_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

مقترح من طرف المفتش ممدود مفتاح

التمرين

①

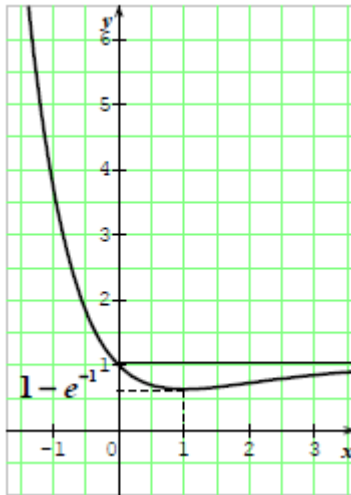
الدعوات

- يحتوي كيس على $n + 8$ كرية لا نفرق بينهما باللمس، 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2)
1. نسحب على التوالي كرتين مع ارجاع الكرية المسحوبة في كل مرة الى الكيس بحيث نريح دينارا من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة ونخسر دينارين من أجل كل كرية سوداء مسحوبة .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح الجبري .
أ- ماهي قيم المتغير العشوائي الممكنة.
ب- أكتب بدلالة n قانون احتمالته.
ج- أحسب أمله الرياضيائي.
د- هل توجد قيمة للعدد n تجعل الأمل الرياضيائي معدوما؟ أحسبها.
 2. نفرض أننا سحبنا كرتين على التوالي من دون ارجاع، ليكن A_n حادث الحصول على كرتين من نفس اللون . B_n حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين.
أ- احسب $p(A_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$ ، فسر هذه النتيجة.
ب- احسب $p(B_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(B_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

التمرين

②

الدالة النسبية



- I. f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = a + bxe^{-x}$.
الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
بقراءة بيانية عين العددين الحقيقيين a و b .
- II. نعتبر g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - xe^{-x}$.
1. احسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g .
3. شكل جدول تغيرات الدالة g .
4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة التي ترتيبها 1.
5. بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.
- III. نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (x + 1)e^{-x}$.
1. احسب $h'(x)$ مستنتجا دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} .
2. احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمتين التي معادلاتها: $x = 0$ و $x = 1$ ، $y = 1$.

$$Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$$

حقيقي.

بين أن العدد $z.z' + 1 \neq 0$ و $|z| = |z'| = 1$.



سؤال اليوم

✓ التمرين ①:

عند سحب كرتين يمكن أن تكونا بيضاويتين و بالتالي الربح الجبري هو 2 أو سوداويتين و يكون الربح الجبري -4 أو من لونين مختلفين و يكون الربح الجبري -1 فقيم المتغير العشوائي هي : $X = \{-4, -1, 2\}$.

ب- قانون الاحتمال:

x_i	-4	-1	2
$p(X_i = x_i)$	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

الأمل الرياضيائي:

$$E(X) = \frac{-n^2 - 16n + 128}{(n+8)^2} = \frac{4}{(n+8)^2} (-n^2 - 4n + 32)$$

$$E(X) = 0$$

$$\frac{4}{(n+8)^2} (-n^2 - 4n + 32) = 0 \quad \text{الأمل الرياضيائي معدوم معناه:}$$

$$-n^2 - 4n + 32 = 0 \begin{cases} n = -8 \notin \mathbb{N} \\ n = 4 \end{cases}$$

ومنه: $n = 4$.

2.أ- حساب $p(A_n)$ بدلالة n :

$$p(A_n) = \frac{n(n-1) + 8 \times 7}{(n+8)(n+7)} = \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56}$$

$$\text{النهاية: } \lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56} = 1$$

التفسير: عندما يؤول n الى $+\infty$ يصبح حادث الحصول على كرتين سوداويتين شبه أكيد فاحتماله يقترب القدر الكافي من 1.

ب- حساب $p(B_n)$ بدلالة n :

$$p(B_n) = \frac{8n}{(n+8)(n+7)} = \frac{8n}{n^2 + 15n + 56}$$

$$\text{النهاية: } \lim_{n \rightarrow +\infty} p(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n}{n^2 + 15n + 56} = 0$$

تفسير النتيجة: عندما يؤول n الى $+\infty$ تصبح معظم الكرات سوداء و يصبح حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين شبه مستحيل فاحتماله يقترب من 0.

I. f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = a + bxe^{-x}$.

تعين العددين a و b : بقراءة بيانية لدينا:

$$f(x) = 1 - xe^{-x} \quad \text{اذن:} \quad \begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow a = 1 \\ f(1) = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow 1 + be^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

II. g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 + xe^{-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + xe^{-x} = 1 \quad \text{حساب نهايات الدالة } g$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} : $g'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-1)$

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} ، $e^{-x} > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$. أي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	

3. جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$1 - e^{-1}$	$+\infty$

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة التي ترتيها 1:

بما أن: $g(0) = 1$ فبالتالي نكتب معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 0:

$$(T): y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$y = -x + 1$$

5. بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف: لدينا: من أجل كل x من \mathbb{R} .

نلاحظ أن $g''(x)$ تنعدم وتغير من إشارتها عند 2. اذن: أي: $\omega(2; g(2))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_g) .

$$g'(x) = e^{-x}(x-1)$$

$$g''(x) = e^{-x}(2-x)$$

III. نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. حساب $h'(x)$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث: $h'(x) = -xe^{-x}$.

استنتاج دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} .

نلاحظ أن:

$$g(x) = 1 + h'(x)$$

$$G(x) = x + h(x) + c, (c \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه:}$$

$$G(x) = x + (x+1)e^{-x} + c, (c \in \mathbb{R})$$

2. مساحة الحيز A :

على المجال $[0;1]$ المنحني (C_g) يقع تحت المستقيم ذا المعادلة: $y = 1$ و بالتالي:

$$A = \int_1^2 1 - g(x) dx = \int_0^1 xe^{-x} dx = \int_0^1 -h'(x) dx = -[h(x)]_0^1 = -[h(1) - h(0)]$$

$$A = \left(1 - \frac{2}{e}\right) u.a$$

حل السؤال ؟:

ليكن z و z' عدنان مركبان يحققان: $|z| = |z'| = 1$ و $z.z' + 1 \neq 0$.

$$\text{العدد } Z = \frac{z+z'}{1+zz'} \text{ حقيقي معناه: } Z = \bar{Z}$$

$$\text{اذن: } \bar{Z} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{1 + \bar{z}\bar{z}'} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} = Z$$

لأن: $\bar{z} = \frac{1}{z}$ و $\bar{z}' = \frac{1}{z'}$.

وبالتالي: العدد $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي

التمرين ①

التعداد المركبة

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$.

2. أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2 - 4z + 16 = 0$.

ب- استنتج في المجموعة \mathbb{C} حلول المعادلة: $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

3. نعتبر العدد المركب z_k المعروف كما يلي: $z_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح.

أ- بين أن: $z_{2013} = 0$ ثم استنتج أن: $z_k = \frac{i}{2^{k-1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

ب- أكتب العدد z_{2015} -2^{2015} على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي يطلب تحديده.

4. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B ذات الاحقتين على الترتيب:

$z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_C = 5 - 2^{2015} z_{2015}$

أ- تحقق أن: $z_C = \frac{3}{2} z_B + z_A$.

ب- بين أن: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -2^{2015} z_{2015}$ ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B معينا عناصره المميزة

ثم جد العبارة المركبة له.

5. لتكن A_0 النقطة ذات الاحقة $\sqrt{3} - i$ $z_0 = \sqrt{3} - i$ من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث z_n لاحقة A_n .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0 A_1 \\ u_n = A_n A_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n . $(A_0 A_1)$ يمثل الطول بين النقطتين

أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين ②

المتتاليات

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} كما يلي:

(نذكر أن: $0! = 1$ و $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$) $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ و $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

1. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة.

1. بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} $u_n < v_n$.

استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان.

3. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n$. ماذا يمكنك القول عن المتتاليتان (u_n) و (v_n)

التمرين ③

التكامل

نعتبر التكاملين التاليين: $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ و $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$

1. احسب I .

2. احسب: $I + J$ ثم استنتج J .

الح. التكامل

✓ التمرين ①:

1. تعين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$.

لدينا: بالمطابقة نجد: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + 2ai - 1 = 2+2i\sqrt{3}$
 $2ai = 2i\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$

بنفس العملية: $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3} \Rightarrow b^2 - 2bi - 1 = 2-2i\sqrt{3}$
 $-2bi = -2i\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3}$

وبالتالي: $a = b = \sqrt{3}$.

2. أ- حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 4z + 16 = 0$

$z^2 - 4z + 16 = 0$
 $\Delta = -48 = (4i\sqrt{3})^2$
 أي: $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}, z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
 $S = \{2 + 2i\sqrt{3}; 2 - 2i\sqrt{3}\}$

ب- استنتاج حلول المعادلة: $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

نضع: $z' = z^2$ المعادلة: $z'^2 - 4z' + 16 = 0$ تصبح: $z'^2 - 4z' + 16 = 0$

معناه مما سبق: $z_1'^2 = z_1' = 2 + 2i\sqrt{3}$
 $z_2'^2 = z_2' = 2 - 2i\sqrt{3}$

علينا حساب الجذران التربيعيان لكل من: z_1' و z_2' .

نلاحظ من السؤال 1. لدينا: الجذر التربيعي للعدد $2 + 2i\sqrt{3}$ هو: $\sqrt{3} + i$ أو $-\sqrt{3} - i$

الجذر التربيعي للعدد $2 - 2i\sqrt{3}$ هو: $\sqrt{3} - i$ أو $-\sqrt{3} + i$.

وبالتالي: $S = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i; \sqrt{3} - i; -\sqrt{3} + i\}$.

3. أ- لدينا: $z_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$

اثبات أن:

$$\begin{aligned}
z_k &= \left(\frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^k - \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^k \\
z_k &= \left(\frac{1}{2} \right)^k \left[\left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right) - \left(\cos \frac{k\pi}{3} - i \sin \frac{k\pi}{3} \right) \right] \\
&= z_k = \frac{1}{2^k} 2i \sin \left(\frac{k\pi}{3} \right) \\
z_k &= \frac{i}{2^{k-1}} \sin \left(\frac{k\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

استنتاج أن: $z_{2013} = 0$

$$z_{2013} = \frac{i}{2^{2013-1}} \sin \left(\frac{2013\pi}{3} \right) = \frac{i}{2^{2012}} \sin(\pi) = 0$$

ب- كتابة العدد $-2^{2015} z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n .

$$\begin{aligned}
-2^{2015} z_{2015} &= -2^{2015} z_{2015} = -2^{2015} \frac{i}{2^{2014}} \sin \left(\frac{2015\pi}{3} \right) \\
&= -2i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) + 671\pi = -2i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) = \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

و بالتالي: $n = 3$

4. $z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_C = 5 - 2^{2015} z_{2015}$

أ- التحقق أن: $z_C = \frac{3}{2} z_B + z_B$.

لدينا: $z_C = 5 - 2^{2015} z_{2015} = 5 + i\sqrt{3}$ و لدينا كذلك:

$$\begin{aligned}
z_C &= \frac{3}{2} z_B + z_B \\
&\text{أي:} \\
z_C &= \frac{3}{2} (2 + 2i\sqrt{3}) + (2 - 2i\sqrt{3}) = 5 + i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ب- اثبات أن:

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= -2^{2015} z_{2015} \\
\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 5 - i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3} - 5 - i\sqrt{3}} = \frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \\
&= i\sqrt{3} = -2^{2015} z_{2015}
\end{aligned}$$

تعين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B .

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_B - z_C = i\sqrt{3}(z_A - z_C)$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ . } \left\{ \begin{array}{l} |z_B - z_C| = \sqrt{3}|z_A - z_C| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CB = \sqrt{3}CA \\ (\overline{CB}; \overline{CA}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

العبارة المركبة: تكتب من الشكل:

$$Z' = a'Z + b'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = i\sqrt{3} \\ b' = z_C(1 - a') \Rightarrow b' = 8 - 4i\sqrt{3} \end{array} \right. \Rightarrow Z' = i\sqrt{3}Z + 8 - 4i\sqrt{3}$$

5. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = A_0.A_1 \\ u_n = A_n.A_{n+1} \end{array} \right.$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أبين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q .

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |i\sqrt{3}z_{n+1} + 8 - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3}z_n - 8 + 4i\sqrt{3}| \\ u_{n+1} &= |i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}z_n| = |i\sqrt{3}(z_{n+1} - z_n)| = |i\sqrt{3}||z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}u_n \quad \text{و بالتالي:} \\ \Rightarrow u_{n+1} &= \sqrt{3}u_n \end{aligned}$$

اذن: $q = \sqrt{3}$ هو أساس هذه المتتالية و حدها الأول:

$$\begin{aligned} u_0 &= A_0.A_1 = |z_1 - z_0| = |i\sqrt{3}z_0 + 8 - 4i\sqrt{3} - z_0| \\ z_0 &= \sqrt{3} - i \quad \text{نعلم أن:} \\ u_0 &= |i\sqrt{3}(\sqrt{3} - i) + 8 - 4i\sqrt{3} - (\sqrt{3} - i)| = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n = u_0 \times q^n = (\sqrt{3})^n \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$

ج- حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) \\ S_n &= \sqrt{128 - 32\sqrt{3}} \left(\frac{1 - (\sqrt{3})^{n+1}}{1 - (\sqrt{3})} \right) = \left[\frac{\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}} \right] (1 - (\sqrt{3})^{n+1}) \end{aligned}$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1. \text{ نذكر أن: } v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

1. اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \\ u_{n+1} - u_n &> 0 \end{aligned}$$

المتتالية (v_n) متناقصة:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n(n!)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \\ v_{n+1} - v_n &< 0 \end{aligned}$$

اذن المتتالية (v_n) متناقصة .

1. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n < v_n$.

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= u_n + \frac{1}{n(n!)} - u_n = \frac{1}{n(n!)} \\ \text{لدينا: } v_n - u_n &= \frac{1}{n(n!)} > 0 \\ \text{معناه: } u_n &< v_n \\ v_n - u_n &> 0 \end{aligned}$$

استنتاج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان.

بما أن المتتالية (v_n) متناقصة لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $v_n \leq v_0$ وبالتالي: $u_n \leq v_0$

اذن نلاحظ أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد v_0 وبما أنها متزايدة اذن (u_n) متقاربة.

و نفس الكيفية لدينا:

المتتالية (u_n) متزايدة معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n \geq u_0$ ، وبالتالي: $u_0 \leq v_n$

اذن نلاحظ أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد u_0 وبما أنها متناقصة اذن (v_n) متقاربة.

3. حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n!)} = 0$$

بما أن: المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة وكذلك $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

نستنتج المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان اذن هما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

✓ التمرين ③:

نعتبر التكاملين التاليين: $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ و $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

1. حساب I : نلاحظ أن: $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ مكتوبة من الشكل $\frac{u'}{u}$ بحيث: $u(x) = e^x + 1$ ومنه: (تذكر $\int \frac{u'}{u} = \ln u$)

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$$

2. حساب $I + J$:

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$$

$$I + J = 1$$

$$J = 1 - I \Rightarrow J = 1 - \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$$

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = ax - 1 - \frac{b \ln x}{x}$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان وليكن (C) تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الشكل).

الجزء الأول:

بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1. عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2. عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم على يمين العدد 0.

3. عين حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثاني:

1. أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

2. أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعيته بالنسبة إلى (C) .

3. أ- ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda \geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$.

ب- عين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda) > \frac{1}{2}$.

الجزء الثالث: نعتبر F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -\frac{1}{2}$. وليكن (C_F) تمثيلها

البياني في المعلم السابق.

بدون حساب عبارة $F(x)$ أجب عما يلي:

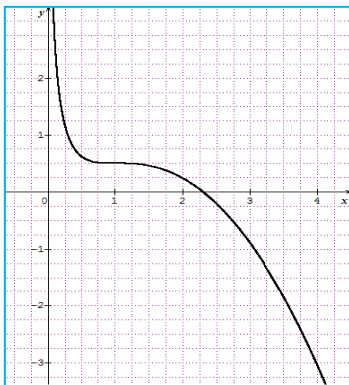
1. حدد اتجاه تغير الدالة F .

2. يبين أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

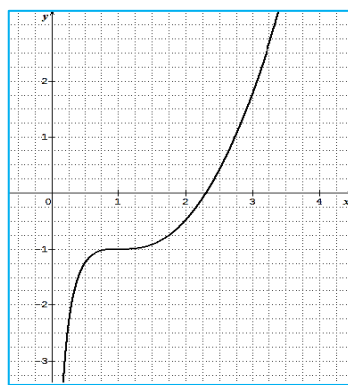
3. أ- يبين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{-1}{2}$.

ب- استنتج وضعية (C_F) بالنسبة إلى المماس (T) .

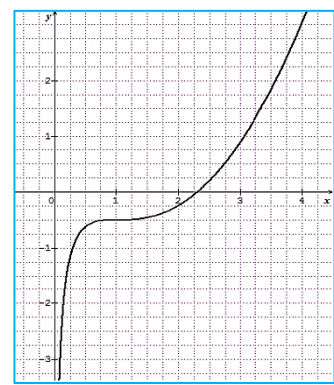
4. من بين المنحنيات الثلاثة التالية عين المنحنى (C_F) مع التبرير.



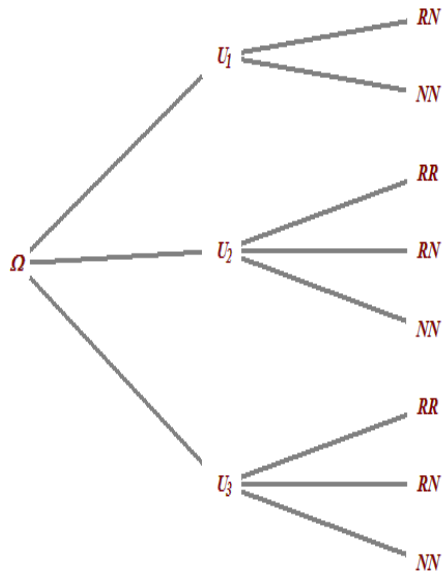
(3)



(2)



(1)



لدينا ثلاثة صناديق U_1 ، U_2 و U_3 حيث الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء .

الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء.

الصندوق U_3 يحتوي على 3 كرات حمراء و 17 سوداء.

نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق المختار.

نسمي: RR "حادثة الحصول على كرتين حمراوين" ،

NN "حادثة الحصول على كرتين سوداوين.

RN "حادثة الحصول على كرتين مختلفتين.

1. أنقل الشجرة موضحا عليها كل الاحتمالات.

2. ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي

عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أحدد قيم المتغير العشوائي X .

ب-بين أن احتمال الحادثة ($X = 2$) يساوي $\frac{2}{285}$.

ج-بين أن احتمال الحادثة ($X = 1$) يساوي $\frac{53}{285}$.

د-استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 .

التصحيح النموذجي المقترح

التمرين ①:

1. بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1. تعين $f(1)$ و $f'(1)$:

لدينا: $f(1) = 0$ و $f'(1) = 0$ (لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 موازي لمحور الفواصل)

2. نهاية الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

3. تعين حسب قيم x اشارة $f'(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		0	

II. 1. أثبات أن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

لدينا: $f(1) = 0$ و $f'(1) = 0$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a - 1 - \frac{b \ln 1}{1} = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{b - b \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow b = 1$$

وبالتالي: $a = b = 1$ إذن: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

2. أثبات أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

إذن: $y = x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) .

دراسة الوضعية بالنسبة إلى (C) :

$$f(x) - y = \frac{-\ln x}{x} \quad \text{ندرس اشارة الفرق: } f(x) - y \quad \text{نجد:}$$

نعلم أن: $x > 0$ وبالتالي حسب اشارة $-\ln x$ أي:

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	--

إذن:

من أجل $0 < x < 1$ المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ) .

من أجل $x > 1$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ) .

لما $x = 1$ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A(1; 0)$.

3. أ- ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda \geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = \lambda$.

على المجال $[1; \lambda]$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ) وبالتالي:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda y - f(x) dx = \int_1^\lambda x - 1 - x + 1 + \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^\lambda = \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2 \text{ u.a}$$

$$(u^2)' = 2.u'.u \Rightarrow \int u'.u = \frac{u}{2} + c \text{ نذكر أن:}$$

ب-تعيين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda) > \frac{1}{2}$.

$$\text{معناه: } \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2 > \frac{1}{2} \text{ وبالتالي: } (\ln \lambda)^2 > 1 \Rightarrow (\ln \lambda)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\ln \lambda - 1)(\ln \lambda + 1) > 0 \text{ ومنه: } \lambda \in]e; +\infty[$$

III. 1. تحدد اتجاه تغير الدالة F .

لدينا: $F'(x) = f(x)$ من جدول التغيرات لدينا: $f(x) \geq 0$ أي: $F'(x) \geq 0$ ومنه الدالة F متزايدة على $]0; +\infty[$.

2. تبين أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين أحداثياتها.

نعلم أن: $F''(x) = f'(x)$ أي: إشارة $F''(x)$ من إشارة $f'(x)$ التي تنعدم عند 1 وتغير إشارتها.

$$\text{اذن } (C_F) \text{ يقبل نقطة انعطاف } B(1; F(1)) \text{ أي: } B\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y = F'(1)(x-1) + F(1)$$

$$(T): y = f(1)(x-1) + F(1)$$

$$(T): y = -\frac{1}{2}$$

ب- استنتاج وضعية (C_F) بالنسبة إلى المماس (T) .

على المجال $]0; 1[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

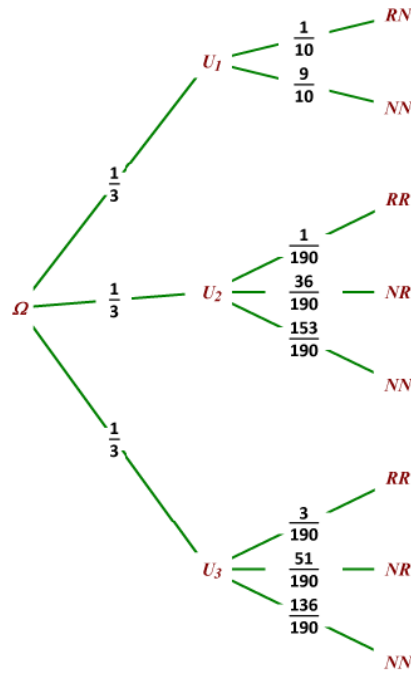
على المجال $]1; +\infty[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

$$\text{المنحنى } (C_F) \text{ يقطع المماس } (T) \text{ في النقطة } B\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

4. المنحنى الممثل للدالة F هو الشكل الثاني (1) لأنه يحقق: $F(1) = -\frac{1}{2}$ والدالة متزايدة والمنحنى (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1; F(1))$.

 التمرين ②:

1. الشجرة:



$$P_{U_1}(NN) = 1 - P_{U_1}(RN) = \frac{9}{10}; P_{U_1}(RN) = \frac{C_1^1 \times C_{19}^1}{C_{20}^2} = \frac{1}{10}$$

$$P_{U_2}(NN) = \frac{153}{190}, P_{U_2}(NR) = \frac{36}{190}, P_{U_2}(RR) = \frac{1}{190}$$

$$P_{U_3}(NN) = \frac{136}{190}, P_{U_3}(NR) = \frac{51}{190}, P_{U_3}(RR) = \frac{3}{190}$$

2. ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أ- تحدد قيم المتغير العشوائي X : 0، 1 و 2.

ب- احتمال الحادثة ($X = 2$) يساوي $\frac{2}{285}$:

$$P(X = 2) = P(U_2 \cap RR) + P(U_3 \cap RR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{190} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{190} = \frac{2}{285}$$

ج- احتمال الحادثة ($X = 1$) يساوي $\frac{53}{285}$:

$$P(X = 1) = P(U_1 \cap RN) + P(U_2 \cap RN) + P(U_3 \cap RN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{190} + \frac{1}{3} \cdot \frac{36}{190} + \frac{1}{3} \cdot \frac{51}{190} = \frac{53}{285}$$

د- استنتاج قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \frac{230}{285}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{230}{285}$	$\frac{53}{285}$	$\frac{2}{285}$

$$E(X) = \frac{53}{285} + 2\left(\frac{2}{285}\right) = \frac{57}{285} \quad \text{حساب أمل الرياضي } E(X):$$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 :

$$P_{RR}(U_3) = \frac{P(RR \cap U_3)}{P(RR)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{190}}{\frac{2}{285}} = \frac{57}{76} = \frac{3}{4}$$

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

حيث α عدد حقيقي من المجموعة: $\{0\}[-1, 1[$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α .

2. هل المتتالية (v_n) متقاربة؟

3. احسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

4. أ- عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

ب- استنتج عندئذ u_n بدلالة n ثم بين أن (u_n) متقاربة.

5. في كل ما يلي نضع: $\alpha = \frac{-1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

أ- بين أن: $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$.

ب- عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $P_n \leq 3^{-44}$.

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$

أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب- استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$. (C_h) تمثيلها البياني (أنظر في الأسفل)

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

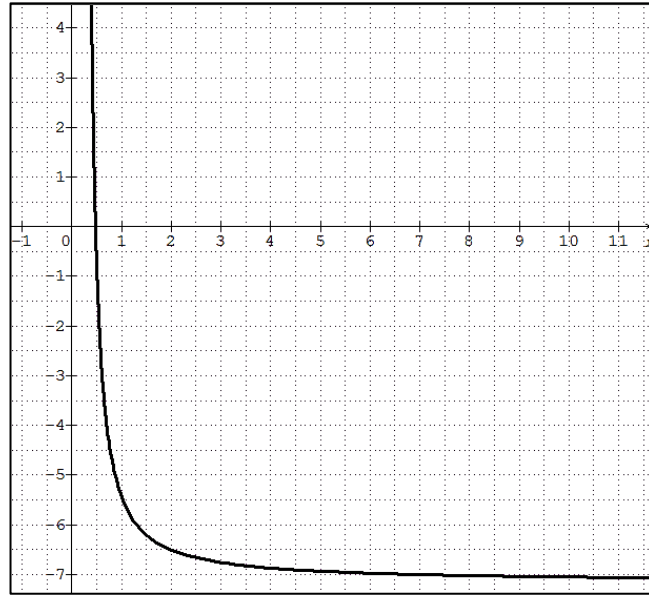
ج- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

3) أ- بين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$

و $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

ج- بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .
(4) أرسم (T) و (C_f) .



سؤال اليوم؟: حل في \mathbb{N}^2 الجملة (S) التالية: $(S) \dots \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$



نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$.

1. اثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

$$\text{لدينا: } v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1} = -\alpha(u_{n+1} - 3\alpha u_n) = -\alpha v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ وحدها الأول: $v_0 = u_1 - 3\alpha u_0 = 2 - 3\alpha$.

$$2. \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = (2 - 3\alpha)(-\alpha)^n$$

بما أن: $(-1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0)$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ وبالتالي: (v_n) متقاربة.

3. حساب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (2 - 3\alpha) \left(\frac{1 - (-\alpha)^{n+1}}{1 + \alpha} \right)$$

$$S_n = \frac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha} (1 - (-\alpha)^{n+1})$$

4. أتعين قيمة العدد الحقيقي α .

$$\text{علما أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4} \text{ معنا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha} = \frac{3}{4} \text{ لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (-\alpha)^{n+1}) = 1$$

$$\frac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$4(2 - 3\alpha) - 3(1 + \alpha) = 0 \text{ وبالتالي: } \alpha = \frac{1}{3}$$

$$8 - 12\alpha - 3 - 3\alpha = 0 \Rightarrow 5 - 15\alpha = 0$$

ب- استنتاج u_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n)$$

$$= u_{n+1} - u_0 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^{n+1} \right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_0 + \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^{n+1} \right] = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{-1}{3} \right)^{n+1} \text{ أي:}$$

$$u_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{-1}{3} \right)^n$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{-1}{3} \right)^n = \frac{7}{4} \text{ وبالتالي: } (u_n) \text{ متقاربة.}$$

5. في كل ما يلي نضع: $\alpha = \frac{-1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n: P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

أ- حساب الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$:

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 3 \times 3 \left(\frac{1}{3}\right) \times 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \dots \times 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 3^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+\dots+n} = 3^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ P_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}} \end{aligned}$$

ب- تعين أصغر عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} 3^{-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right)} \leq 3^{-44} &\Rightarrow -\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right) \leq -44 \quad \text{معناه: } P_n \leq 3^{-44} \\ (n-10)(n+9) \geq 0 &\Rightarrow n \geq 10 \end{aligned}$$

و بالتالي أصغر عدد طبيعي هو 10.

التدريب ②:

(1) g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$

أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$: $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$. بما أن $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب- استنتاج

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x < \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x > 1$ فإن $x > \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

(2)- لدينا: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب- نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0 \quad \text{ومنه: } f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ج-تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

إشارة $f'(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-e$	$+\infty$

(3) -أ- نبين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$

$(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تكافئ $(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا: $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5; 0.6]$ ، $f(0.6) \times f(0.5) < 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$ ، $f(\alpha) = 0$

لدينا: $f(1.5) \approx -0.60$ ، $f(1.6) \approx 0.44$ ، بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5; 1.6]$

$f(1.6) \times f(1.5) < 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$ ، $f(\beta) = 0$

*/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x^2 - 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لأن $\Delta = -4$ ومنه: (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$

ج- نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0; +\infty[$ مماسا

$$f'(1)=0; f(1)=-e \quad (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه: $(T): y = -e$

(4) رسم (C_f) و (T) :



حل السؤال:

لدينا: $C_{x+1}^y = C_x^{y-1}$ معناه:

$$\frac{(x+1)!}{y!(x-y+1)!} = \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}$$

$$\text{لأن: } (x+1)! = (x+1).x! \Rightarrow \frac{(x+1).x!}{y.(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \Rightarrow \frac{(x+1)}{y} = 1$$

$$\Rightarrow y = x+1$$

$$\frac{(x+y)!}{2!(x+y-2)!} \Rightarrow (x+y)(x+y-1) = 20$$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ (x+y)(x+y-1) = 20 \end{cases} \Rightarrow 2x(2x+1) = 20 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0$$

$$x = 2, y = 3$$

اذن الثنائية $(x; y) = (2; 3)$ حل للجملة (S).

التمرين ①

①

العدد المركب

1. حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. استنتج حلول المعادلة: $2\left(\frac{1}{z} + 1\right) - 2\left(\frac{1}{z} + 1\right) + 2 = 0$ حيث \bar{z} هو مرافق z .

3. في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 1 + i$, $z_B = 1 - i$ و $z_C = 1 + \sqrt{3}$.

أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للعددين $\frac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$.

ب- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z - 1 - i| - |z - 1 + i| = 0$.

ج- عين طولية وعمدة العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

د- عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$.

التمرين ②

②

الجبر

1. جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 180 و 225

2. حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $225x - 180y = 90$

3. عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق: $|x - y + 1| < 2$.

4. a و b عددان طبيعيين يكتبان على الترتيب 52 و 252 في النظام ذي الأساس α ويكتبان 44 و 206 في النظام ذي الأساس β .

عين α و β ثم أكتب a و b في النظام العشري.

التمرين ③

③

التكامل

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $I_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x} dx$

1. احسب I_0 .

2- عبر عن I_n بدلالة n .

3. أ- أثبت أن (I_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- عين نهاية I_n عندما يؤول n الى $+\infty$.

سؤال اليوم؟: عشرة قريصات مرقمة من 1 الى 10. نسحب منها 3 قريصات في آن واحد

ما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي على الأقل

1. حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i \quad \text{أي:}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ z_2 = \overline{z_1} = 1+i \end{cases} \Rightarrow S = \{1+i; 1-i\}$$

$$2. \text{استنتاج حلول المعادلة: } \left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{z} + 1\right) + 2 = 0$$

نضع: $z' = \frac{1}{z} + 1$ المعادلة تصبح: $z'^2 - 2z' + 2 = 0$ تكافئ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$$\begin{cases} z'_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ z'_2 = \overline{z'_1} = 1+i \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{z} + 1 = 1 - i \Rightarrow \frac{1}{z} = -i \Rightarrow \frac{1}{z} = i \Rightarrow z_3 = -i$$

$$z_4 = \overline{z_3} = -\overline{-i} = i$$

$$S = \{-i; i\}$$

3.

لدينا: $z_A = 1+i$ ' $z_B = 1-i$ و $z_C = 1+\sqrt{3}$.

أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي:

$$\begin{cases} |z_A| = \sqrt{2} \\ \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow z_A = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

استنتاج الشكل الأسّي للعددين $\frac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$:

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_A)^{2019} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019} = (\sqrt{2})^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{4}} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$(z_A)^{2019} = (\sqrt{2})^{2019}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب- تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-1-i| - |z-1+i| = 0$.

$$|z-1-i| - |z-1+i| = 0$$

$$|z-1-i| = |z-1+i|$$

لدينا: $|z-(1+i)| = |z-(1-i)|$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[AB]$.

$$|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$$

$$AM = BM$$

ج-تعيين طوليلة وعمدة العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

$$L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+i-1-\sqrt{3}}{1-i-1-\sqrt{3}} = \frac{i-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}} = \frac{(i-\sqrt{3})}{(-i-\sqrt{3})} \times \frac{(-\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}+i)}$$

$$L = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} |L| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \\ \arg(L) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = 1 \Rightarrow CA = CB \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow (\overline{CB}; \overline{CA}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

د-تعيين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ ومنه نجد: } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1+i+1-i+1+\sqrt{3}}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

4.تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MB}) = 0$.

$$\{(A;1)(B;1)(C;1)\}$$

بما أن G مرجح الجملة المثقلة

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$$

باستعمال علاقة شال لدينا: $\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{MB} + \overline{BA} - \overline{MB} = \overline{BA} = -\overline{AB}$

ومنه:

$$(3\overline{MG})(-\overline{AB}) = 0$$

$$-3(\overline{MG} \cdot \overline{AB}) = 0 \Rightarrow \overline{MG} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ تصبح: } (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MB}) = 0$$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم الذي يشمل النقطة G و \overline{AB} شعاع ناظمي له.

✓ التمرين ②:

1. ايجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180:

باتباع خوارزمية اقليدس نحصل على الجدول الآتي:

الحاصل		1	4
القاسم والمقسوم	225	180	45
الباقى		45	0

وهكذا نجد: $PGCD(225;180) = 45$

2. حل: $225x - 180y = 90$ (1)....

لدينا: $225x - 180y = 90$ و بما أن: $PGCD(225;180) = 45$ فإن المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2)

$5x - 4y = 2$ (2) نلاحظ أن: (2;2) حل خاص للمعادلة (2).

اذن: $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ 5(2) - 4(2) = 2 \end{cases}$ بالطرح ينتج: $5(x-2) = 4(y-2)$

لدينا: 4 يقسم $5(x-2)$ و $PGCD(4;5) = 1$ فإن حسب مبرهنة غوص 4 يقسم $(x-2)$.

نستنتج هكذا أن: $x-2 = 4k$ حيث k عدد صحيح.

بالتعويض نجد: $y-2 = 5k$.

و بهذا نستنتج أن الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ من الاعداد الصحيحة بحيث: $\begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{cases}$ و حيث k عدد صحيح.

3. تعين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق: $|x - y + 1| < 2$:

$|x - y + 1| < 2$ معناها: $|-k + 1| < 2$ أي: $-2 < k - 1 < 2$ ومنه: $-1 < k < 3$.

وهذا يعني أن: $k \in \{0; 1; 2\}$ ومنه مجموعة الحلول هي: $S = \{(2; 2), (6; 7), (10; 12)\}$.

4. تعين α و β :

لدينا: $\begin{cases} a = 2 + 5\alpha \\ a = 4 + 4\beta \end{cases}$ ولدينا أيضا: $\begin{cases} b = 2 + 5\alpha + 2\alpha^2 \\ a = 6 + 2\beta^2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 5\alpha - 4\beta = 2 \\ 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 5\alpha - 4 = 0 \end{cases}$

مع $\alpha > 5$ و $\beta > 6$.

بما أن: $5\alpha - 4\beta = 2$ فلدينا حسب السؤال 2: $\begin{cases} \alpha = 4k + 2 \\ \beta = 5k + 2 \end{cases}$ و k عدد طبيعي.

ومنه بالتعويض في العلاقة الثانية نحصل على: $2(4k + 2)^2 - 2(5k + 2)^2 + 5(4k + 2) - 4 = 0$

أي: $3k^2 - 2k - 1 = 0$ اذن $k = 1$ بالتعويض نجد: $\alpha = 6$ و $\beta = 7$.

اذن: $a = 32$ و $b = 104$

✓ التمرين ③:

$$I_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x} dx \text{ لدينا:}$$

1. حساب I_0 .

$$I_0 = \int_0^1 2e^{-2x} dx = 2 \int_0^1 e^{-2x} dx = 2 \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = -e^{-2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

2- حساب I_n بدلالة n :

$$I_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x} dx = \left[-e^{-2x} \right]_n^{n+1} = -e^{-2(n+1)} + e^{-2n} = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) e^{-2n}$$

$$I_n = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) e^{-2n} \text{ أ-لدينا:}$$

$$I_{n+1} = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) e^{-2(n+1)} = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) e^{-2n-2} = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) e^{-2n} \cdot e^{-2} = I_n e^{-2}$$

اذن (I_n) متتالية هندسية اساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول I_0 .

ب-تعيين نهاية I_n عندما يؤول n الى $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) e^{-2n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0$$

الاجابة عن السؤال:

عدد الأرقام الزوجية من 1 الى 10 هو 5. وبالتالي: الحصول على رقم زوجي على الأقل هي الحادثة العكسية لحادثة "كل الأرقام فردية"

$$\text{ومنه عدد الحالات هو: } C_{10}^3 - C_5^3 = 120 - 10 = 110$$

التمرين

①

□ مقترح من طرف "محمود مفتاح" وفنتش التربية

لكل سؤال اقتراح من الأربعة صحيح، حدد الاجابة الصحيحة.
كيس يحوي 3 كريات بيضاء، 4 سوداء وكرية حمراء، لا نميز بينها باللمس نسحب عشوائيا على التوالي 3 كريات من الكيس بحيث نعيد كل كرية الى الكيس قبل السحب الموالي.

السؤال 1: احتمال سحب 3 كريات سوداء هو: أ- $\frac{C_4^3}{C_8^3}$ ب- $\frac{9}{8}$ ج- $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ د- $\frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$

السؤال 2: احتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون هو:

أ- $\frac{23}{128}$ ب- $\frac{3^3 + 4^3}{512}$ ج- $\frac{1}{64}$ د- $\frac{12}{8^3}$
السؤال 3: احتمال الحصول على ثلاث كريات مختلفة الألوان هو: أ- $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ ب- $\frac{7}{8^3}$ ج- $\frac{3}{128}$ د- $1 - \frac{23}{128}$

السؤال 4: علما أننا سحبنا 3 كريات من نفس اللون، احتمال أن يكون قد سحب 3 كريات حمراء يساوي:

أ- 0 ب- $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ ج- $\frac{23}{128}$ د- $\frac{1}{92}$

التمرين

②

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$(1)

1. حل في \mathbb{C} المعادلة (1) علما أن i جذرا لها.

2. عين الجذور التربيعية لكل من: i ، 4 و $-i$.

نأخذ زهرة نرد متجانسة الأوجه لكل وجه منها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعين

3. ماهو احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان؟

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل عملية رمي بجداء طويلة العددين المركبين المحصل عليهما.

4. عرف قانون الحتمال للمتغير العشوائي X .

5. احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين

③

صندوق يحتوي على x كرة بيضاء حيث $x \geq 2$ و 5 كرات حمراء .

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق.

1.أ- احسب الاحتمال $P(x)$ لسحب 3 كرات حمراء.

ب- عين العدد الطبيعي x لكي يكون $P(x) = \frac{5}{28}$

2. احسب الاحتمال $P'(x)$ لسحب كرة على الأكثر بيضاء.

3. نفرض أن $x = 5$ ، احسب احتمال الحوادث التالية:

الحادثة A: "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون".

الحادثة B: "من بين الكرات المسحوبة توجد على الأقل كرتان حمراوين".

الحادثة C: "سحب 3 كرات بيضاء علما أن الحادثة A محققة"

✓ التمرين ①:

السؤال 1: احتمال سحب 3 كريات سوداء هو: $\left(\frac{4}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\frac{4}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8}$ الإجابة (ج)

السؤال 2: احتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون هو:

يعني الحصول على 3 كرات حمراء أو 3 بيضاء أو 3 سوداء: $\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{4}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{92}{512} = \frac{23}{128}$ الإجابة (أ)

السؤال 3: احتمال الحصول على ثلاث كريات مختلفة الألوان هو:

يعني الحصول على كرة من كل لون: ج- $\frac{3}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{12}{512} = \frac{3}{128}$ الإجابة (ج)

السؤال 4: علما أننا سحبنا 3 كريات من نفس اللون، احتمال أن يكون قد سحب 3 كريات حمراء يساوي:

$$\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{4}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3} = \frac{1}{92}$$

الإجابة (د)

✓ التمرين ②:

لتكن \mathbb{C} المعادلة: $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$(1)

1.أ- حل في \mathbb{C} المعادلة (1):

بما أن i جذرا لها يعني: $z^3 - 4z^2 + z - 4 = (z - i)(az^2 + bz + c)$ علينا إيجاد الأعداد المركبة a, b, c

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 + i \\ c = -4i \end{cases}$$

و بالتالي المعادلة (1) تكافئ بالمطابقة نجد:

$$(z - i)[z^2(-4 + i)z - 4i] = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - i = 0 \Rightarrow z_1 = i \\ z^2(-4 + i)z - 4i = 0 \end{cases}$$

$$z^2(-4 + i)z - 4i = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 4 \\ z_3 = -i \end{cases}$$

$$S = \{-i; 4; i\}$$

2. عين الجذور التربيعية لكل من: i ، 4 و $-i$.

$$\text{جذور } z_1 = i \text{ هي: } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i; -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right\}$$

جذور $z_2 = 4$ هي: $\{-2; 2\}$.

جذور $z_3 = -i$ هي: $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$.

نأخذ زهرة نرد متجانسة الأوجه لكل وجه منها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعتين

3. احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان:

معناه نحصل على جذر z_1 مرتين أو نحصل على الجذرين للعدد z_1

نفس العملية بالنسبة لكل من z_2, z_3 .

$$\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

4. تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

كل من جذور الاعداد z_1, z_2, z_3 طويلاها: 1, 2, 1

اذن القيم الممكنة للمتغير X هي: 1, 2, 4

$$p(X=1) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$p(X=2) = \frac{2}{6}\left(\frac{4}{6}\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{4}{9}$$

$$p(X=4) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

و بالتالي:

x_i	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(X) = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9} : E(X) \text{ الأمل الرياضي}$$

✓ التمرين ③:

1. أعدد الحالات الممكنة هو:

$$C_{x+5}^3 = \frac{(x+5)!}{3!(x+2)!} = \frac{(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)!}{6(x+2)!} = \frac{(x+5)(x+4)(x+3)}{6}$$

حساب الاحتمال $P(x)$ لسحب 3 كرات حمراء

$$p(x) = \frac{C_{x+5}^3}{C_{x+5}^3} = \frac{60}{(x+5)(x+4)(x+3)}$$

ب- عين العدد الطبيعي x لكي يكون $P(x) = \frac{5}{28}$

$$p(x) = \frac{5}{28} \Rightarrow \frac{60}{(x+5)(x+4)(x+3)} = \frac{5}{28}$$

$$5(x+5)(x+4)(x+3) = 1680$$

$$x+3 = 6 \Rightarrow x = 3$$

2. حساب الاحتمال $P'(x)$ لسحب كرة على الأكثر بيضاء.

هي الحادثة المعاكسة لحادثة سحب 3 كرات حمراء أي:

$$p'(x) = 1 - p(x) = 1 - \frac{60}{(x+5)(x+4)(x+3)} = \frac{x(x^2 + 12x + 47)}{(x+5)(x+4)(x+3)}$$

3. نفرض أن $x = 5$ ، عدد الامكانيات فغي هذه الحالة هو: $C_{10}^5 = 120$.

الحادثة A: "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون". يعني اما 3 كرات حمراء أو 3 كرات بيضاء.

$$p(A) = \frac{C_5^3 + C_5^3}{120} = \frac{1}{6} \text{ وعليه:}$$

الحادثة B: "من بين الكرات المسحوبة توجد على الأقل كرتان حمراوين".

يعني اما كرتان حمراوان وواحدة بيضاء أو 3 كرات حمراء

$$p(B) = \frac{C_5^2 \times C_5^1 + C_5^3}{120} = \frac{10 \times 5 + 10}{120} = \frac{1}{2} \text{ وعليه:}$$

الحادثة C: "سحب 3 كرات بيضاء علما أن الحادثة A محققة".

$$p_A(C) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

التمرين ①

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ ، ثم حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$ ، ثم بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$

يطلب إيجاد معادلته.

5. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R} .

6. شكل جدول تغيرات الدالة f .

7. بين أن: $f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x}((\sqrt{e^x} - 1)^2 - 2)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

8. ارسم (C_f) .

9. ناقش بياننا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$.

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M

ذات الاحقة z النقطة M' ذات الاحقة z' حيث: $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$

1. برر أن f تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

2. نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A_{n+1} = f(A_n)$.

أ- عين لاحقات النقط A_1, A_2, A_3 .

ب- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n = \Omega A_n$ حيث Ω مركز التحويل النقطي f .

بين أن المتتالية (u_n) هندسية ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ج- ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره 1, 0 ؟

3. ما طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$ ؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، طبيعة المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.

4. من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز I_n الى طول الخط المنكسر الذي يشمل النقط $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$.

وعليه: $I_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$

عبر عن I_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

دالة لوغاريتمية أسية

التمرين ②

أعداد مركبة

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

1. التحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

لدينا: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

$$(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$$

و عليه: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0 \right\}$ ، دائما محقق من أجل كل x من \mathbb{R}
 $D_f = \mathbb{R}$

2. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \ln 2$$

نستنتج أن: $y = \ln 2$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ موازي لمحور الفواصل.

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty$$

3. التحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

$$f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \ln\left[e^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right]$$

$$= \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

$$= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln(1) = 0$$

و بالتالي: المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left[\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \right]', \\
 &= \frac{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} = \frac{e^x - 2\left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} = \frac{e^x - \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \quad \text{أي:} \\
 &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}
 \end{aligned}$$

إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R} : من إشارة: $\sqrt{e^x} - 1$ ومنه: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

6. جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$\ln 2$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

$$7. \text{ اثبات أن: } f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x} \left((\sqrt{e^x} - 1)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}.$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$$

من أجل كل x من \mathbb{R} الدالة f' قابلة للاشتقاق:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left[\frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \right]' = \frac{\left(e^x - \frac{\sqrt{e^x}}{2} \right) (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - (e^x - \sqrt{e^x}) \cdot (e^x - \sqrt{e^x})}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{2e^x - \frac{e^x \sqrt{e^x}}{2} - \sqrt{e^x}}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} = \frac{-\sqrt{e^x}(-4\sqrt{e^x} + e^x + 2)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} = \frac{-\sqrt{e^x} \left((\sqrt{e^x} - 1)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}
 \end{aligned}$$

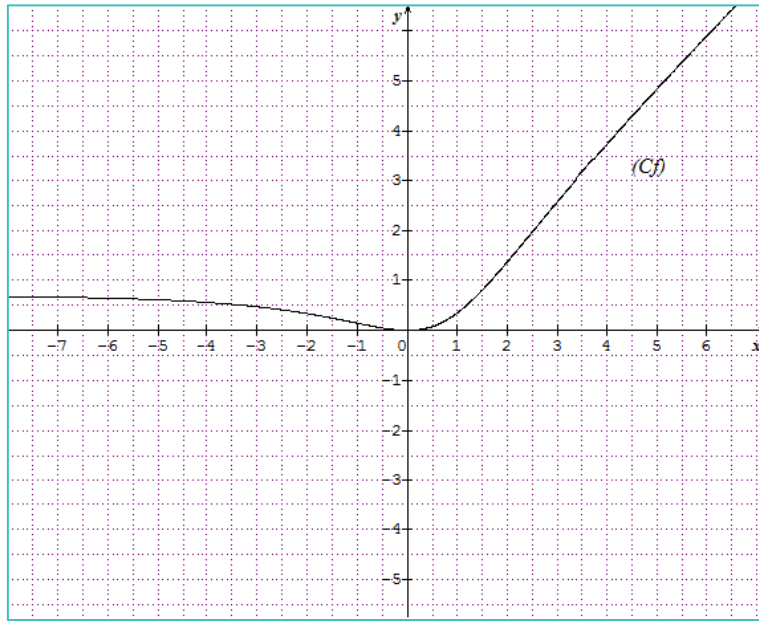
و عليه:

اشارة $f''(x)$ من اشارة $\left(\left(\sqrt{e^x} - 2 \right)^2 - 2 \right) - 2$ أي:

x	$-\infty$	$2\ln(2-\sqrt{2})$	$2\ln(2+\sqrt{2})$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

نلاحظ أن: f'' (المشتقة الثانية الدالة f) تنعدم وتغير من اشارتها فان النقطة $\left(2(\ln 2 - \sqrt{2}), f(2(\ln 2 - \sqrt{2})) \right)$ هي نقطة انعطاف.

8. ارسم (C_f) .



9. المناقشة:

لدينا:

$$e^x - 2(-1 + \sqrt{e^x}) = e^m$$

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^m \Leftrightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \ln e^m$$

$$f(x) = m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذا المعادلة: $y = m$.

إذا كان: $m < 0$ المعادلة لا تقبل حلول

إذا كان $m = 0$ المعادلة لها حل وحيد

إذا كان $0 < m < \ln 2$ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m \geq \ln 2$ المعادلة لها حل واحد.

$$1. \text{ لدينا: } M(z) \xrightarrow{f} M'(z') \text{ حيث: } z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$$

العبارة المركبة للتحويل النقطي f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب

$$\text{لدينا: } a = \frac{1}{2}(1+i) \text{ ومنه: } a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ نستنتج أن: } k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{ومن جهة ثانية فان } \omega \text{ لاحقة النقطة } \Omega: \omega = \frac{b}{1-a} = 1+i.$$

$$\text{اذن التحويل النقطي } f \text{ هو تشابه مباشر نسبته } k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ وزاويته } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ومركزه النقطة } \Omega.$$

$$2. \text{ أ- نضع: } A_{n+1} = f(A_n) \text{ ومنه } z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n + 1$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(1+i)z_0 + 1 \Rightarrow z_1 = 1$$

$$\text{وعليه: } z_2 = \frac{1}{2}(1+i)z_1 + 1 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(3+i)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(1+i)z_2 + 1 \Rightarrow z_3 = \frac{3}{2} + i$$

ب- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n = \Omega A_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega A_n \\ \left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+1}} \right) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \text{ لدينا: } u_{n+1} = \Omega A_{n+1} \text{ و بما أن: } A_{n+1} = f(A_n) \text{ فان:}$$

$$\text{ومنه: } u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n \text{ نستنتج أن المتتالية } (u_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ وحدها الاول } u_0 = \sqrt{2}.$$

$$\text{وبالتالي: من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ لدينا: } u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

ج- تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره 0,1 اذا وفقط اذا $\Omega A_n \leq 0,1$

$$\begin{aligned}
u_n \leq 0,1 &\Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq 0,1 \\
\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n &\leq \frac{0,1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right) \\
\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) < 0 &: \text{لأن} \quad n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}
\end{aligned}$$

يعني:

بالتقريب نجد: $n \geq 7,57$ و منه $n_0 = 8$.

3.أ- طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$:

المثلث $\Omega A_0 A_1$ قائم في A_1 و متساوي الساقين لأن: $\Omega A_1 = A_0 A_1 = 1$ وكذلك $(\Omega A_1) \perp (A_0 A_1)$.

من خواص التشابه المباشر نستنتج أن المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين.

4. لدينا: $I_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$ و منه: $I_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \dots + \Omega A_n$.

و بالتالي: $I_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

بما أن متتالية هندسية فان :

$$\begin{aligned}
I_n = u_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right) \\
\text{لأن } -1 < q < 1 & \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

التمرين ①

الدالة اللوغاريتمية

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، (الوحدة 2 cm) .

1.1. احسب نهايتي الدالة f عند e وعند $+\infty$ ، ثم فسّر النتائج هندسيا .

2. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتائج هندسيا . (لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) .

3. بين أنه من أجل كل x من $]0; e[\cup]e; +\infty[$: $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

4 / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II. لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (انظر الشكل)

1- أ. بقراءة بيانية

حدّد عدد حلول المعادلة (E) التالية $g(x) = 0$ في المجال $]0; +\infty[$

ب . باستعمال جدول القيم التالي :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلاً α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

2- أ. تحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

ب . بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و α .

ج . حدد انطلاقاً من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1; \alpha]$ وبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$.

3 . أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

I. f دالة معرفة على المجال $[2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$.

احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2; +\infty[$.

II. (u_n) متتالية معرفة بعدها الأول $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n < 3$.

2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.

3. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً، هل هي مقاربة؟

4. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$.

التمرين ②

المتتاليات العددية

5. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التصحيح النموذجي المقترح

✓ التمرين ①:

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \quad , \quad D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$$

(I) / حساب نهايتي f عند e و $+\infty$ و تفسير النتائج :

$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = e$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لمحور الترتيب .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ومنه محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2 / تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و تفسير النتيجة هندسيا : لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0^+$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ومنه محور الترتيب هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

3 / تبين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة f' حيث : $f'(x) = \frac{-\left((1 - \ln x) - \frac{1}{x}x\right)}{(x(1 - \ln x))^2} = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$

4 / دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل x من D_f لدينا : $x^2(1 - \ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\ln x$ وهي :

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+	+

جدول التغيرات للدالة f .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty \searrow$	$\nearrow +\infty$	\nearrow
	1	$-\infty$	

(II) لدينا $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$ ، $D_g =]0; +\infty[$.

1 / أ. تحديد عدد حلول المعادلة (E) في المجال $]0; +\infty[$: المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطتين ومنه المعادلة (E) تقبل

حليين متميزين .

ب. تبين أن المعادلة (E) تقبل حلاً α حيث $2,2 < \alpha < 2,3$

الدالة g مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]2,2; 2,3[$ و $g(2,2) \approx -0,02$ و $g(2,3) \approx 0,12$ إذن

$g(2,2) \times g(2,3) < 0$ ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً α حيث $2,2 < \alpha < 2,3$

$$2/ \text{أ. التحقق أنه من أجل كل } x \text{ من } D_f, f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1 - \ln x)} - x = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1 - \ln x)} = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

ب. تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و α .

$$\text{لدينا } f(x) - x = 0 \text{ تكافئ } \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} = 0 \text{ أي أن } g(x) = 0 \text{ ومنه } x = 1 \text{ أو } x = \alpha.$$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و α .

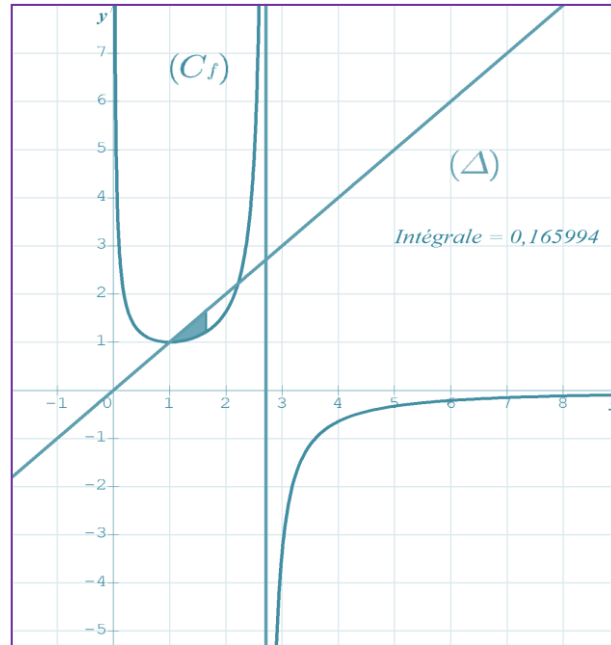
ج. تحديد انطلاقا من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1; \alpha]$

المنحنى (C_g) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[1; \alpha]$ ومنه الدالة g سالبة تماما على المجال $[1; \alpha]$ وتنعدم من أجل القيمتين 1 و α للمتغير x .

* تبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$:

لدينا $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$ ومن أجل كل x من $[1; \alpha]$ ، $x(1 - \ln x) > 0$ و $g(x) \leq 0$ ومنه $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$

3/ إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



✓ التمرين ②:

1. دالة معرفة على المجال $[2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$.

حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[2; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x-1)(x^2 + x + 4)}{(x^2 + 1)^2}$$

بما أن $x^2 + x + 4 > 0$ و $(x^2 + 1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-1)$ و عليه: $x(x-1) > 0$

اذن من أجل كل x من $[2; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $[2; +\infty[$.

II. (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.* نسمي الخاصية التالية: $P(n)$: $2 < u_n < 3$.

نتحقق من $P(0)$ لدينا: $u_0 = \frac{5}{2}$ و $2 < \frac{5}{2} < 3$ أي: $2 < u_0 < 3$ اذن $P(0)$ محققة.

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $2 < u_n < 3$ و نبهن أن $P(n+1)$ أي نبهن $2 < u_{n+1} < 3$.

لدينا $2 < u_n < 3$ معناه $f(2) < f(u_n) < f(3)$ لأن الدالة f متزايدة تماما $[2; +\infty[$.

يعني أن $2 < u_{n+1} < \frac{29}{10}$ و منه $2 < u_{n+1} < 3$ أي $P(n+1)$ محققة.

و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n < 3$.

2.* استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.

$$u_n^2 - \frac{9}{10}(u_n^2 + 1) = \frac{u_n^2 - 9}{10}$$

لدينا: $u_n < 3$ و منه $u_n^2 < 9 \Leftrightarrow u_n^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow \frac{u_n^2 - 9}{10} < 0$

$$u_n^2 - \frac{9}{10}(u_n^2 + 1) < 0 \Rightarrow u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$$

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n}{u_n^2 + 1}$ بما أن $2 < u_n < 3$ فإن $-1 < 2 - u_n < 0$ و $u_n^2 + 1 > 0$ اذن: $u_{n+1} - u_n < 0$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متقاربة.

$$4. u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} - 2 = \frac{u_n^3 - 2u_n^2}{u_n^2 + 1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$$

5. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

نسمي الخاصية : $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$: $P(n)$.

نتحقق من $P(0)$ ، لدينا : $0 < \frac{5}{2} - 2 < 1 \Rightarrow 0 < u_0 - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^0$

ومنه $P(0)$ محققة.

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ونبرهن أن $P(n+1)$ أي نبرهن $0 < u_{n+1} - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$.

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} (u_n - 2)$$

$$u_n^2 < \frac{9}{10} (u_n^2 + 1) \Rightarrow \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} < \frac{9}{10}$$

لدينا:

$$\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} (u_n - 2) < \frac{9}{10} (u_n - 2)$$

$$u_{n+1} - 2 < \frac{9}{10} (u_n - 2)$$

ولدينا : $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$ (فرضية التراجع)

وعليه : $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{9}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$
أي : $P(n+1)$ محققة.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$ و $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$

نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

التمرين

①

متتاليات عددية

١. f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(2) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$

٢. لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كمايلي: $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

III) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(2) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$S_n = (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1)$$

$$S_n' = (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 2) + \dots + (u_n^2 - n)$$

التمرين

②

دالة عددية

١. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

١. اتجاه تغير الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج إشارة g .

٢. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$

١. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. ١. احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

استنتج جدول تغيرات الدالة f .

3. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x]$ ثم فسر بيانها هذه النتيجة.

4. بين أن المستقيم $y = x$: (Δ) مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

5. أدرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -3x$ والمستقيم (Δ') .

6. أرسم (C_f) ، (Δ) و (Δ') .

(I) الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 3}}$

بما ان $f'(x) \geq 0$ فإن f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$

(2) نبين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$ لدينا: الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ و $f(0) = 0$.

الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $x = 0$ في المجال

$[0; +\infty[$. اذن: من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

(II) (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ حساب u_1 و u_2 : $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$u_2 = f(u_1) = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 3} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

(2) أ/ نبين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$

* من اجل $n = 0$: $0 \leq u_0 < u_1 < 1$ محققة لأن

$(u_0 = 0, u_1 \approx 0.86) \dots (1)$

* نفرض أن $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ ونبرهن ان: $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ من اجل عدد طبيعي $n \geq 1$

لدينا: f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ و $f(1) = 1$ و $f(0) = 0$. إذا كان $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ فإن

$(1) f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(0) < f(u_{n+1}) < f(u_{n+1}) < 1$ أي: $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ (2)

من (1) و (2) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$

ب/ * استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة: لدينا

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ معناه أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N} ومحدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N} ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 3} \text{ لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ حساب } **$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l \text{ معناه } l \text{ متقاربة نحو } l$$

$$0 \leq l, l = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + 3} \text{ يكافئ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n^2 + 3}$$

$$4l^2 = l^2 + 3 \text{ يكافئ } (2l)^2 = (\sqrt{l^2 + 3})^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ يكافئ } l = 1 \text{ (مقبول) أو } l = -1 \text{ (مرفوض) لأن } 0 \leq l \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$v_n = u_n^2 - 1 \text{ لدينا: من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1} = q v_n : n \text{ عدد طبيعي}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{4} (u_n^2 + 3) - 1 = \frac{1}{4} (u_n^2 - 1)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n \text{ ومنه } (v_n) \text{ هـ أساسها } q = \frac{1}{4} \text{ وحدها الأول}$$

$$v_0 = u_0^2 - 1 = -1$$

$$(2) \text{ التعبير عن } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = v_0 q^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ بدلالة } n \text{ لدينا } u_n^2 = v_n + 1$$

$$u_n = \sqrt{v_n + 1} \text{ لأن } 0 \leq u_n \text{ إذن: } u_n = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 1 : (u_n) \text{ حساب نهاية}$$

(4) التعبير عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$\begin{aligned} S_n &= (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) \\ &+ (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1) \\ &= (u_0^2 - 1) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 1) + \dots + (u_n^2 - 1) \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) \end{aligned}$$

$$S_n = \left(\frac{-4}{3}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} S_n' &= (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + \dots + (u_n^2 - n) \\ &= u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 - (0 + 1 + 2 + \dots + n) \\ &= (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1) - \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)(0+n)\right] \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (n+1) \cdot 1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

✓ التمرين ②:

(I). الدالة g معرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث:

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ ومنه: } g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

وبالتالي: إشارة $g'(x)$ من إشارة: $2\sqrt{x^2 + 1} - x$. لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $g'(x) > 0$. وبالتالي: g دالة متزايدة تماما على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج إشارة g .

$$g(x) = 0 \text{ يعني: } 2x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \text{ أي: } 2x = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

من أجل: $x < 0$ المعادلة (1) مستحيلة.

من أجل: $x > 0$ $4x^2 = x^2 + 1$ أي: $4x^2 - x^2 - 1 = 0$ ومنه: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (حل مرفوض).

لدينا g مستمرة ورتيبة على \mathbb{R} وبالتالي: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

إشارة g :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II). نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.

1. حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x^2+1} - x \\ f'(x) &= \frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}} \text{ وبالتالي:}$$

هذا يعني أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{x^2+1} > 0$ أي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow +\infty$

$$\text{حيث: } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$$

3. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{x^2+1} - x + 3x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{x^2+1} + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[2\sqrt{x^2+1} + 2x] \times [2\sqrt{x^2+1} - 2x]}{[2\sqrt{x^2+1} - 2x]} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] &= 0 \text{ لدينا:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x^2+1) - 4x^2}{[2\sqrt{x^2+1} - 2x]} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{[2\sqrt{x^2+1} - 2x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{[\sqrt{x^2+1} - 2x]} = 0 \end{aligned}$$

المستقيم ذو المعادلة: $y = -3x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4. بين أن المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2 + 1} - x - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2 + 1} - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2\sqrt{x^2 + 1} - 2x] \times [2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]}{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= 0 \text{ لدينا:} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{[\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي: المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيم مقرب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

5. الوضع النسبي:

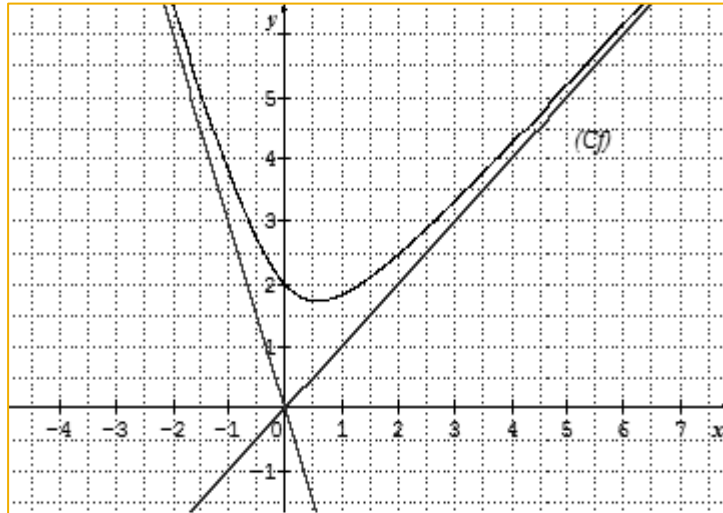
دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -3x$:

لدينا: $f(x) + 3x = 2\sqrt{x^2 + 1} + 2x > 0$ وبالتالي: (C_f) فوق (Δ) .

دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ') ذو المعادلة: $y = x$ (Δ'):

$f(x) - x = 2\sqrt{x^2 + 1} - 2x > 0$ وبالتالي: (C_f) فوق (Δ') .

6. رسم (C_f) ، (Δ) و (Δ') .



التمرين 1: بكالوريا أجنبية

التمرين 2: بكالوريا مغربية

التمرين

①

دالة أسية و سيطيّة

١. نذكر أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، أثبت أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

٢. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

١.١- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

٢.١- أرسم (C).

٣. ١. k عدد صحيح، f_k نسي الدالة المعرفة \mathbb{R} على كما يلي: $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$.

و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

١.١- ما طبيعة الدالة f_0 .

ب- عين نقط تقاطع المنحنين (C₀) و (C₁). تحقق أن هذه النقطة تنتمي الى (C_k).

٢. أدرس، حسب قيم x اشارة العبارة: $(x+1)(e^x - 1)$ استنتج، من أجل عدد k معطى، الوضعية النسبية للمنحنين (C_k) و (C_{k+1}).

٣. ١. احسب $f'_k(x)$ من أجل كل x من \mathbb{R} ومن أجل كل عدد صحيح k غير معدوم.

استنتج حسب قيم k اتجاه تغير الدالة f_k (ميز الحالتين $k > 0$ و $k < 0$)

٤. أرسم (C₁) في نفس المعلم السابق.

١. ليكن m عدد مركب غير معدوم.

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $2z^2 - 2(m+1)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$ (E)

١. تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (2im)^2$.

٢. حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E).

٢. ١. المستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نفرض أن $m \in \mathbb{C} - \{0, 1, i\}$ ونضع $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+1)$.

نعتبر النقط M_2, M_1, M, B, A التي لواحقها على الترتيب $1, i, m, z_1, z_2$

١.١- تحقق أن: $z_1 = iz_2 + 1$

ب- بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة ω حيث $\omega = \frac{1+i}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

١.٢- بين أن: $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$.

ب- بين أنه اذا كانت النقط M_2, M_1, M في استقامية فان M تنتمي الى الدائرة (Γ) التي [AB] أحد أقطارها.

ج- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M_2, M_1, M تنتمي الى نفس الدائرة. (لاحظ أن: $i = \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega}$)

التمرين

②

العداد المركبة

١. اثبات أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$

وبما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0$ أي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

٢. الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

١.١- احساب نهايتي الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث: $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة $-x$ لأن $e^{-x} > 0$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	0

2. رسم (C): (أنظر الشكل في نهاية التصحيح)

III. k عدد صحيح، f_k نسمي الدالة المعرفة \mathbb{R} على كما يلي: $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$.

1. أ- طبيعة الدالة f_0 : $f_0(x) = (0+1)e^{0 \cdot x} = x+1$ وبالتالي: f_0 دالة تآلفية.

ب- تعيين نقط تقاطع المنحنيين (C_0) و (C_1) :

يعني نقوم بحل المعادلة: $f_0(x) = f_1(x)$ أي: $(x+1)e^x = x+1$ يعني:

$$(x+1)(e^x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ e^x - 1 = 0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow (C_0) \cap (C_1) = \{A(-1;0), B(0;1)\}$$

التحقق أن هذه النقطة تنتمي الى (C_k) .:

لدينا: $A(-1;0) \in (C_k)$ وبالتالي $f_k(-1) = (-1+1)e^{-1} = 0$.

وعليه لدينا: $B(0;1) \in (C_k)$ وبالتالي $f_k(0) = (0+1)e^0 = 1$.

2. اشارة العبارة: $(x+1)(e^x - 1)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$		- 0	+	+
$e^x - 1$		-	- 0	+
$(x+1)(e^x - 1)$	+	0	- 0	+

من جدول الاشارة نستنتج مايلي:

من أجل $x = -1$ و $x = 0$ تكون $(x+1)(e^x - 1) = 0$.

من أجل $x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ تكون $(x+1)(e^x - 1) > 0$.

من أجل $x \in]-1; 0[$ تكون $(x+1)(e^x - 1) < 0$.

استنتاج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) :

ندرس اشارة الفرق: $f_{k+1}(x) - f_k(x)$

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} = (x+1)e^{kx}(e^x - 1)$$

نستنتج ان اشارة الفرق $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ من اشارة الجداء $(x+1)(e^x - 1)$.

مما سبق نستنتج أن:

المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين $A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

على المجال $]0; +\infty[\cup]-\infty; -1]$ المنحنى (C_{k+1}) يقع فوق المنحنى (C_k) .

على المجال $]-1; 0[$ المنحنى (C_{k+1}) يقع تحت المنحنى (C_k) .

3. حساب $f'_k(x)$

من أجل كل x من \mathbb{R} و من أجل كل عدد صحيح k غير معدوم. الدالة f_k قابلة للاشتقاق: $f'_k(x) = (kx + k + 1)e^{kx}$

إشارة $f'_k(x)$ من إشارة $(kx + k + 1)$ لأن $e^{kx} > 0$ مهما يكن k غير معدوم.

نميز الحالتين: $k > 0$ و $k < 0$

الحالة الأولى: $k > 0$

$$(kx + k + 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{k+1}{k}$$

x	$-\infty$	$-\frac{k+1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	-	0	+

اذن: من أجل $x > -\frac{k+1}{k}$ ، الدالة f_k متزايدة تماما.

من أجل $x < -\frac{k+1}{k}$ الدالة f_k متناقصة تماما.

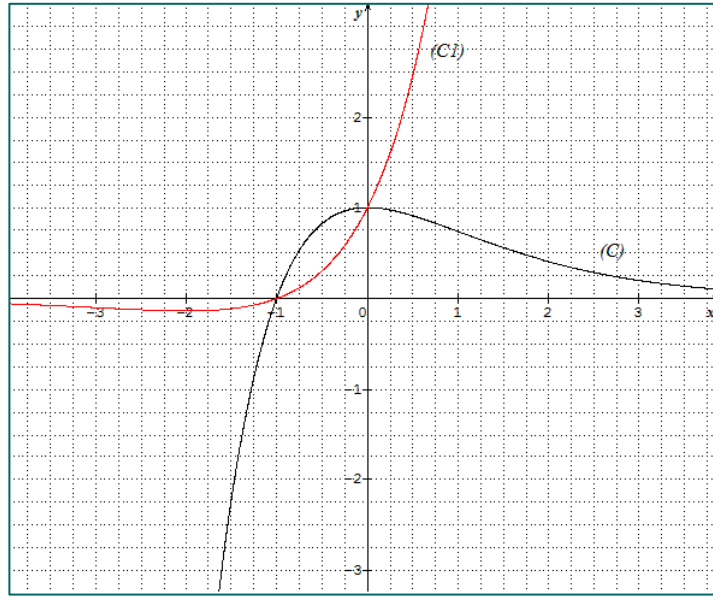
الحالة الثانية: $k < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{k+1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-

اذن: من أجل $x > -\frac{k+1}{k}$ ، الدالة f_k متناقصة تماما.

من أجل $x < -\frac{k+1}{k}$ ، الدالة f_k متزايدة تماما.

4. أرسم (C) و (C_1) :



✓ التمرين ② :

1. التحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (2im)^2$.

لدينا $2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$ (E)

$$\begin{aligned}\Delta &= [-2(m+1+i)]^2 - 4(2)[m^2 + (1+i)m + i] \\ &= 4(m+1+i)^2 - 8[m^2 + (1+i)m + i] \\ &= 4[m^2 + 2(1+i)m + (1+i)^2] - 8[m^2 + (1+i)m + i] = -4m^2 \\ \Delta &= (2im)^2\end{aligned}$$

2. حل المعادلة (E):

$$\begin{aligned}z &= \frac{2(m+1+i) + 2im}{4} = \frac{m+1+i+im}{2} = \frac{m+1+i(m+1)}{2} = (m+1)\frac{1+i}{2} \\ z' &= \frac{2(m+1+i) - 2im}{4} = \frac{m+1+i-im}{2} = \frac{m+1-i(m+1)}{2} = (m+1)\frac{1-i}{2} \quad \text{لدينا: } \Delta = (2im)^2 \text{ وعليه:} \\ S &= \left\{ (m+1)\frac{1+i}{2}; (m+1)\frac{1-i}{2} \right\}\end{aligned}$$

II. نفرض أن $m \in \mathbb{C} - \{0, 1, i\}$ ونضع $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+1)$.

1. أ- التحقق أن: $z_1 = iz_2 + 1$

$$\begin{aligned}iz_2 + 1 &= i \left[(m+1)\frac{1-i}{2} \right] + 1 \\ &= \frac{1+i}{2}(m+i) + 1 = \frac{1+i}{2}(m+1) \quad \text{و عليه:} \\ &= z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - \omega &= iz_2 + 1 - \omega \\ &= iz_2 + 1 - \frac{1+i}{2} = iz_2 + \frac{1-i}{2} = i \left(z_2 - \frac{1+i}{2} \right) = i(z_2 - \omega) \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}} (z_2 - \omega) \end{aligned}$$

وعليه M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة ω حيث $\omega = \frac{1+i}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

2.أ- تبين أن: $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - m}{z_1 - m} &= \frac{\left(\frac{1-i}{2} \right) (m+i) - m}{\left(\frac{1+i}{2} \right) (m+i) - m} \\ &= \frac{(1-i)(m+i) - 2m}{(1+i)(m+i) - 2m} \\ &= \frac{m+i - im + 1 - 2m}{m+1 + im + i - 2m} \text{ أي:} \\ &= \frac{i(m-1)(i-1)}{(m-i)(i-1)} \\ &= i \frac{m-1}{m-i} \end{aligned}$$

ب- النقط M_2, M_1, M في استقامية معناه $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R}$ أي: $i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

لدينا:

$$\arg \left(\frac{m-1}{m-i} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\overline{BM}; \overline{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \text{ وبالتالي}$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

ومنه M تنتمي الى الدائرة (Γ) التي $[AB]$ أحد أقطارها.

ج- نفرض أن النقط Ω و M_2, M_1, M تنتمي الى نفس الدائرة. معناه: $\left(\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \right) \times \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \right) \in \mathbb{R}$

$$\text{لدينا: } \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i \text{ و } \frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$$

$$i \times i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R} \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

اذن النقط B, A, M في استقامية. أي: $M \in (AB)$ بحيث: $M \neq B$ و $M \neq A$.

وبالتالي مجموعة النقط بحيث تكون النقط Ω و M, M_1, M_2 تنتهي الى نفس الدائرة هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B .

عكسيا: اذا كانت $M \in (AB)$ مع $M \neq A$ و $M \neq B$ فان النقط Ω و M, M_1, M_2 تنتهي الى نفس الدائرة هي المستقيم.

التمرين 1: بكالوريا أجنبية

التمرين 2: بكالوريا مغربية

التمرين

①

دالة لوغاريتمية

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \ln(1+x)$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذا المعادلة: $y = x$.

1. أ- احسب نهايتي الدالة f .

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - f(x)$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. نذكر أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

ج- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$.

3. عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .

5. أرسم (D) و (C_f) .

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $2 \leq u_n \leq \beta$.

2. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل جوابك.

I. يحتوي صندوق على 9 كرات لا يمكن التفريق بينهما باللمس.

✓ 5 كرات حمراء تحمل الاعداد 2، 2، 2، 1، 1. ✓ 4 كرات بيضاء تحمل الأعداد 2، 2، 2، 1.

نعتبر التجربة التالية نسحب في آن واحد و دون ارجاع ثلاثة كرات من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

A: "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون".

B: "الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس العدد".

C: "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد".

1. بين أن: $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ و $p(C) = \frac{1}{42}$.

II. ليكن المتغير العشوائي X المعروف كما يلي:

x_i	-1	2	3	4
$p(X_i = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1. حدد قيمة العدد a .

2. احسب $p(X^2 \leq 2)$.

3. احسب $p(X^2 - 6X + 8) < 0$.

التمرين

②

الاحتمالات

1. الدالة f معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \ln(1+x)$

1.أ- حساب نهايتي الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 + \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(1+x) = +\infty$$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0 \text{ بما أن } x > -1 \text{ فإن } \frac{1}{x+1} > 0 \text{ وبالتالي } f'(x) > 0 \text{ اذن الدالة } f \text{ متزايدة تماما على }]-1; +\infty[.$$

1.1.أ- حساب

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - x = 1 + \ln(x+1) - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x+1) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x+1) \left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right] \quad \text{ب-}$$

$$= -\infty$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$= \frac{-x}{x+1}$$

بما أن $x > -1$ فإن $\frac{1}{x+1} > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-x)$

x	-1	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

2. اثبات أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1; 0]$ ولدينا $g(0)=1 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حل α حيث $\alpha \leq 0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا $g(0)=1 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

و عليه لدينا $g(2) \times g(3) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حل β حيث $2 \leq \beta \leq 3$.

3. اشارة $g(x)$.

x	-1	α	β	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

4. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) :

يعني ندرس اشارة الفرق: $f(x) - y$

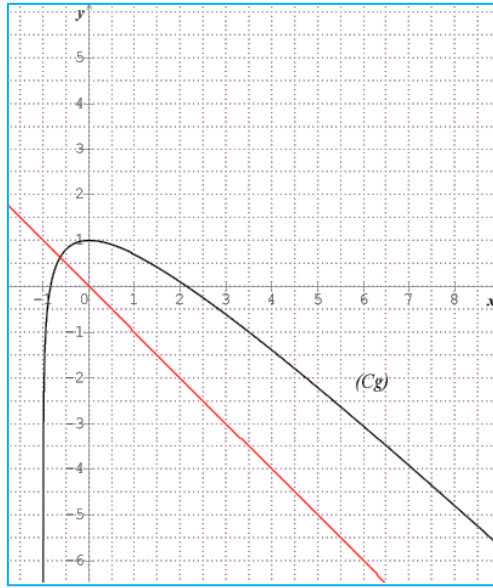
$$f(x) - y = 1 + \ln(x+1) - x$$

و عليه : $= g(x)$

و بالتالي اشارة الفرق من اشارة $g(x)$ أي:

x	-1	α	β	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+	-
الوضعية	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)	

5. الرسم:



III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq \beta$.

نضع $P(n) : 2 \leq u_n \leq \beta$

من أجل $n = 0$ لدينا $2 \leq 2 \leq \beta$ أي $2 \leq u_0 \leq \beta$ وبالتالي: $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$.

$$\begin{aligned} & 2 \leq u_n \leq \beta \\ & \text{لدينا: } f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta) \\ & 1 + \ln 3 \leq u_{n+1} \leq \beta \\ & 2 \leq u_{n+1} \leq \beta \end{aligned}$$

لأن: $g(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) - \beta = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = \beta$ و $2 \leq 1 + \ln 3$

وبالتالي: $P(n+1)$ محققة.

وعليه حسب مبدأ البرهان بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq \beta$.

2. المتتالية (u_n) متقاربة:

على المجال $[\alpha; \beta]$ ، $g(x) \geq 0$ أي: $f(x) - x \geq 0$ وبما أن $2 \leq u_n \leq \beta$

اذن $f(u_n) - u_n \geq 0$ يعني $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ينتج عليه أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد β فإن (u_n) متتالية متقاربة.

✓ التمرين ②:

1. A : "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون". معناه اما 3 كرات حمراء أو 3 كرات بيضاء

و بالتالي: $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$

B : "الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس العدد" يعني 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 كرات تحمل الرقم 2

(لا نهتم بلون الكرة بل بالأرقام التي تحملها). أي : $p(B) = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_9^3} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$

C : "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد" معناه 3 كرات حمراء تحمل رقم 2 أو 3 كرات بيضاء تحمل الرقم 2 أي:

$$p(C) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

II. 1. تحدد قيمة العدد a :

لدينا: $p(X = -1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = 1$

أي: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + a = 1 \Rightarrow a = \frac{13}{60}$

2. حساب: $p(X^2 \leq 2)$. معناه $p(X = -1) = \frac{1}{3}$

$$p(X^2 - 2 \leq 0) = p((X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) \leq 0) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

3. حساب: $p(X^2 - 6X + 8 < 0)$ تكافئ

$$p(X^2 - 6X + 8 < 0) = p((X - 4)(X - 2) < 0) = p(2 < X < 4) = p(X = 3) = \frac{1}{5}$$

اليوم 21 الواحد و العشرون

التمرين 1

1

أعداد مركبة

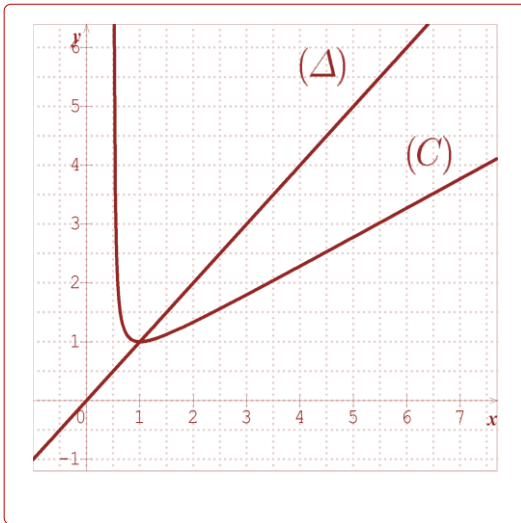
- من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$ ، نضع: $z' = \frac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$.
- نعتبر المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط C, B, A التي لاحقاتها على الترتيب $-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$ و $\frac{1}{2}i$ ، $-1+i$.
1. حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $\bar{z}' = -2$.
 2. حدد $\text{Re}(z')$ و $\text{Im}(z')$ بدلالة x و y .
 3. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.
 4. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z يكون $|z'| = 2$.
 5. بين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في C .

التمرين 2

2

المتتاليات العددية

1. الشكل الموضح هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.
- و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})



- برهن أنه إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 1$
2. نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
- أ. باستعمال الشكل الموضح مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.
- ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .
3. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
- ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وأنها متقاربة.
4. نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.
- أ. برهن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ب. أكتب عبارة w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .
- ج. بين أن $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
5. أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.
- ثم استنتج بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

✓ التمرين ①:

نضع: $z' = \frac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$.

1. حل المعادلة: $\bar{z}' = -2$ يعني: $\overline{\left(\frac{2z-i}{z+1-i}\right)} = -2$ معناه:

$$\frac{2\bar{z}-i}{\bar{z}+1-i} = -2 \Rightarrow 2\bar{z}-i = -2(\bar{z}+1-i)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \quad \text{أي:}$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$$

2. تحدد $\text{Re}(z')$ و $\text{Im}(z')$ بدلالة x و y .

$$\text{Re}(z') = \text{Re}\left(\frac{2z-i}{z+1-i}\right) = \text{Re}\left(\frac{2(x+iy)-i}{x+iy+1-i}\right) = \frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(z') = \frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

3. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

$$\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-1=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{يعني: } \text{Im}(z') = 0 \quad \text{حقيقي معناه: } z' \text{ حقيقي}$$

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم ذا المعادلة $x+2y-1=0$ ما عدا النقطه $A(-1;1)$.

4. تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'| = 2$.

$$|z'| = 2 \quad \text{معناه:}$$

$$\left| \frac{2z-i}{z+1-i} \right| = 2 \Rightarrow \frac{|2z-i|}{|z+1-i|} = 2$$

$$\frac{\left| 2\left(z - \frac{1}{2}i\right) \right|}{|z+1-i|} = 2 \Rightarrow \left| z - \frac{1}{2}i \right| = |z+1-i| \quad \text{ومنه:}$$

$$|z - z_B| = |z - z_A|$$

$$AM = AB$$

ومنه مجموعة النقط M التي تحقق $|z'| = 2$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5. اثبات المثلث ABC متساوي الساقين وفي قائم النقطه C .

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_A - z_C| = \frac{1}{4}\sqrt{10} \\ |z_B - z_C| = \frac{1}{4}\sqrt{10} \\ |z_A - z_B| = \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array} \right. \text{ لدينا: } \text{ ومنه نستنتج أن } AC = BC \text{ اذن المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين....(1)}$$

ولدينا : $AC^2 + BC^2 = BA^2$ اذن المثلث ABC قائم في C(2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وفي قائم النقطة C .

✓ التمرين ②:

1. البرهان على أنه إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 1$

لندرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty \quad *$$

* الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ ومن أجل كل $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$: $f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

إشارة المشتقة :

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

ومن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1, +\infty[$ ، جدول تغيراتها :

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

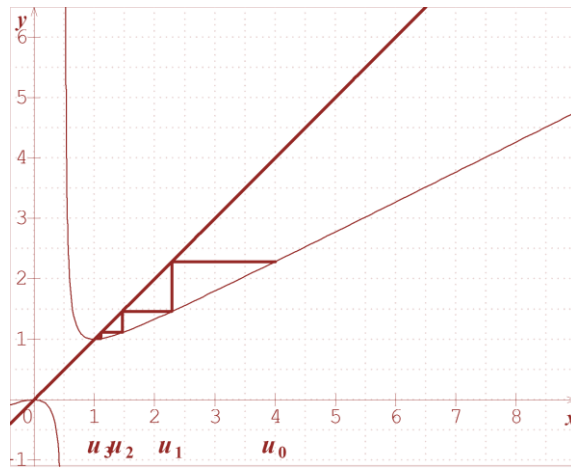
من جدول التغيرات نستنتج أن من أجل كل $x > 1$ فإن $f(x) > 1$

2. أ. تمثيل الحدود u_0, u_1, u_3 و u_4 على محور الفواصل :

لدينا $M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(4, u_1)$

نسقط M_0 على (Δ) وفق (ox) ، ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C) وفق (oy) فنحصل على M_1

وهكذا نكرر نفس العملية فنحصل على M_2, M_3 .



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو 1

3.أ . البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 4$ و $4 > 0$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n > 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا $u_n > 1$ ومنه $f(u_n) > 1$ حسب السؤال (1)

أي $u_{n+1} > 1$

وهذا يعني أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب . تبين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2}{2u_n-1} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n-1} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n-1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1} \end{aligned}$$

* استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 1$ ومنه $1 - u_n < 0$ و $2u_n - 1 > 0$ وبالتالي فإن $u_n(1-u_n) < 0$

$$\text{ومنه } \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1} < 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n < 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

* استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقاربة .

4-أ) البرهان على أن (w_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

ب) كتابة عبارة w_n بدلالة n :

$$w_n = w_0 \times q^n = 2^n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{لدينا}$$

استنتاج v_n بدلالة n : لدينا: $w_n = \ln(v_n)$ تكافئ $w_n = e^{w_n}$ ومنه $v_n = e^{2^n \ln\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

$$\text{د) تبين أن } u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$$

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}} \quad \text{ومنه} \quad u_n = \frac{1}{1 - v_n} \quad \text{تكايفى} \quad v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = 0 \quad \text{بما أن } 0 < \frac{3}{4} < 1 \text{ فإن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{وبالتالي فإن}$$

5) حساب بدلالة n الجداء P_n

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2^1} \times \dots \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^n} \quad \text{لدينا:}$$

لدينا $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \quad \text{وبالتالي فإن:}$$

$$P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1} - 1} \quad \text{ومنه}$$

التدريب

①

أعداد و حساب

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 6 \\ u_0 = 14 \end{cases}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n

1. أ- احسب u_1, u_2, u_3, u_4 .

ب- ماذا تخمن بالنسبة للرقمين الأخيرين للعدد u_n ؟

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = u_n[4]$ ، واستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} = 2[4]$ وأن

$$u_{2k+1} = 0[4]$$

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_n = 5^{n+2} + 3$ و استنتج أن $2u_n = 28[100]$.

4. عين رقمي الأحاد والعشرات للعدد u_n وذلك حسب قيم العدد الطبيعي n .

5. برهن أن $PGCD(u_n, u_{n+1})$ ثابت ثم عين قيمته.

التدريب

②

دالة عددية شاملة

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيا.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{-2x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3. أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) المقارب الأفقي له.

ب- عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

ج- أرسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) .

د- ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0$.

4. أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 و 2 لدينا:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة على المجال $[2; +\infty[$.

5. لتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتهما: $y = 3$ و $x = 3, x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي ينتمي للمجال $[2; 3]$.

أ- احسب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ .

ب- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda)$.

6. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ كما يلي: $g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$

أ- بين أن الدالة دالة زوجية.

ب- أدرس قابلية الاشتقاق للدالة g عند $x_0 = 0$ و فسر النتيجة هندسيا.

7. أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة وباستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم

1. أ- احسب u_4, u_3, u_2, u_1 .

$$u_1 = 5u_0 - 6 = 64$$

$$u_2 = 5u_1 - 6 = 314$$

$$u_3 = 5u_2 - 6 = 1564$$

$$u_4 = 5u_3 - 6 = 7814$$

ب- يمكن أن نقول أنه: إذا كان n زوجيا فإن آخر الرقمين للعدد u_n هما 1 و 4

وإذا كان n فرديا فإن آخر الرقمين للعدد u_n 4 و 6.

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = u_n [4]$.

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6$$

$$u_{n+2} = 25u_n - 36$$

$$u_{n+2} - u_n = 24u_n - 36 = 4(6u_n - 9) \text{ ومنه}$$

$$u_{n+2} - u_n \equiv 0[4]$$

$$u_{n+2} \equiv u_n [4]$$

استنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} = 2[4]$:

لدينا: $u_0 = 14[4]$ أي $u_0 = 2[4]$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض، $u_{2k} = 2[4]$ محققة و نتحقق من صحة $u_{2(k+1)} = 2[4]$ أي $u_{2k+2} = 2[4]$.

من السؤال 4 لدينا: $u_{n+2} = u_n [4]$ ومنه $u_{2k+2} = u_{2k} [4]$ ولدينا حسب فرضية $u_{2k} = 2[4]$ ومنه $u_{2k+2} = 2[4]$

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} = 2[4]$

استنتاج أن $u_{2k+1} = 0[4]$ من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6$$

$$u_{2k+1} \equiv 5 \times 2 - 6[4] \text{ وعليه:}$$

$$u_{2k+1} \equiv 4[4] \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 0[4]$$

3.. البرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_n = 5^{n+2} + 3$

لدينا: و $2u_0 = 28$ ومنه من أجل $n = 0$ الخاصية محققة. $5^2 + 3 = 28$

نفرض ان $2u_n = 5^{n+2} + 3$ صحيحة و نتحقق من صحة $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$ أي: $2u_{n+1} = 5^{n+2} + 3$.

$$10u_n = 5(5^{n+2} + 3)$$

$$10u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 \text{ معناها: } 2u_n = 5^{n+2} + 3 \text{ لدينا:}$$

$$2(5u_n - 6) = 5^{n+3} + 3$$

$$2u_n = 5^{n+2} + 3, n \text{ عدد طبيعي, اذن من أجل كل عدد طبيعي } n, 2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3 \text{ أي:}$$

$$\text{استنتاج أن } 2u_n = 28[100]$$

$$\text{لدينا: } 2u_0 = 28 \text{ و منه من أجل } n=0 \text{ الخاصية محققة. } 2u_0 \equiv 28[100]$$

$$\text{نفرض أن } 2u_n = 28[100] \text{ صحيحة و نتحقق من صحة } 2u_{n+1} = 28[100].$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = 5u_n - 6$$

$$2u_{n+1} = 2 \times 5u_n - 12$$

$$2u_{n+1} \equiv 5 \times 28 - 12[100]$$

$$2u_{n+1} \equiv 128[100] \text{ وبالتالي يصبح:}$$

$$2u_{n+1} \equiv 28[100]$$

$$\text{اذن من أجل كل عدد طبيعي لدينا } 2u_n = 28[100].$$

$$4. \text{ تعين رقمي الأحاد والعشرات للعدد } u_n \text{ وذلك حسب قيم العدد الطبيعي } n.$$

$$\text{نقوم بتعيين باقي قسمة العدد } u_n \text{ على } 100:$$

$$\text{لدينا: } 2u_n = 28[100] \text{ و منه: } u_n = 14[50] \text{ أي: } u_n = 50k + 14.$$

$$\text{من أجل } k = 2p \text{ يكون } u_n = 100p + 14 \text{ معناها } u_n = 2[4] \text{ أي } n \text{ زوجي}$$

$$\text{وبالتالي إذا كان } n \text{ زوجي فإن رقم أحاد } u_n \text{ هو 4 ورقم عشراتاه هو 1.}$$

$$\text{من أجل } k = 2p + 1 \text{ يكون } u_n = 100p + 64 \text{ معناها } u_n = 0[4] \text{ أي } n \text{ فردي}$$

$$\text{وبالتالي إذا كان } n \text{ فردي فإن رقم أحاد } u_n \text{ هو 4 ورقم عشراتاه هو 6.}$$

$$5. \text{ اثبات أن } PGCD(u_n, u_{n+1}) \text{ ثابت.}$$

$$\text{ليكن } d \text{ القاسم المشترك الأكبر للعددين } u_n \text{ و } u_{n+1}.$$

$$\text{اذن } d \text{ يقسم } u_n \text{ و يقسم } u_{n+1}$$

$$\text{وبالتالي: } d \text{ يقسم } 5u_n - u_{n+1} \text{ أي } d \text{ يقسم 6.}$$

$$\text{اذن القيم الممكنة } d \text{ هي: } d_6 = \{1, 2, 3, 6\} \text{ وبما أن رقم أحاد العدد } u_n \text{ هو رقم زوجي فإن القيم الممكنة هي } \{2, 6\}.$$

ولدينا: $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ومعناه:

$$2u_n \equiv 5^{n+2} + 3[3]$$

$$2u_n \equiv (-1)^{n+2}[3]$$

$$-u_n \equiv (-1)^n[3]$$

$$u_n \equiv (-1)^{n+1}[3] \Rightarrow \begin{cases} u_n \equiv -1[3] \\ u_n \equiv 1[3] \end{cases}$$

ومنه u_n لا يقبل القسمة على 3 فهو اذن لا يقبل القسمة على 6 .

وبالتالي: $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 2$.

✓ التمرين ②:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$

1. حساب نهايات الدالة f :

لحساب النهاية عند -1 و 2 ندرس اشارة المقام أي: $x^2 - x - 2$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	- 0	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور الترتيب معادلتيهما $x = -1$ و $x = 2$ و يقبل كذلك مستقيم (Δ) مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y = 3$.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ الدالة قابلة للاشتقاق لدينا:

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(x^2-x-2) - (2x-1)(3x^2-x-2)}{(x-x-2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$$

ومنه:

ب- اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $-2x(x+4)$:

$$-2x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \text{ وبالتالي:}$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$		
$-2x(x+4)$		-	0	+	0	-

جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	-4	-1	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	- 0 +			+ 0 -		-		
$f(x)$	3		$+\infty$	$-\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	3

3.أ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ أي:

$$f(x) - y = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} - 3 = \frac{2x + 4}{x^2 - x - 2}$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$x+4$		-	0	+	+
x^2-x-2		+		-	+
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-2;3)$.

ب- نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات:

مع محور الفواصل: نقوم بحل المعادلة $f(x) = 0$:

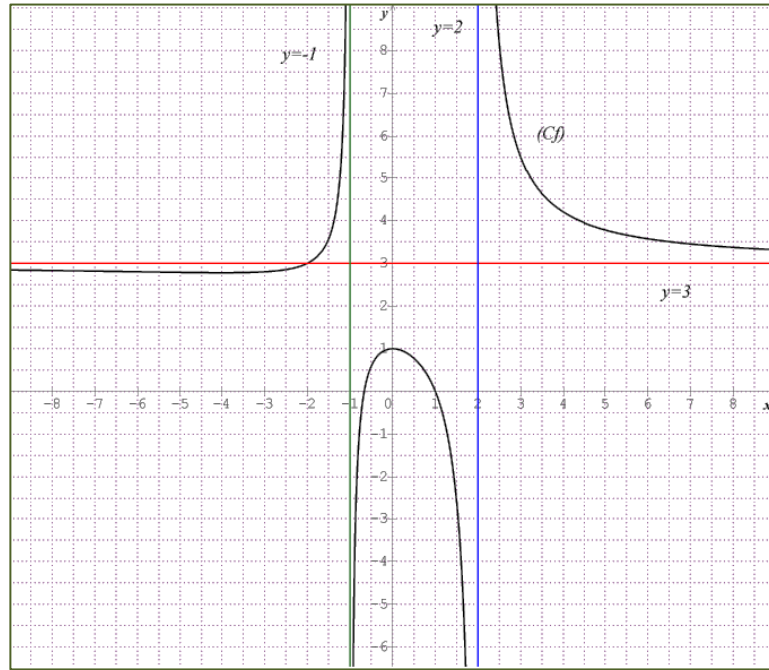
$$\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases} \text{ أي:}$$

$$3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$(C_f) \cap (x'x) = \left\{ \left(\frac{-2}{3}; 0 \right), (1; 0) \right\}$$

مع محور الترتيب: لدينا: $f(0) = 1$ و منه: $(C_f) \cap (y'y) = \{(0; 1)\}$

ج-رسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) .



د-المناقشة:

$$(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0 \text{ لدينا:}$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول هذه المعادلة بيانها هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذا المعادلة $y = m$

إذا كان $m < -1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

إذا كان $m = 1$ و $m = \frac{25}{9}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $1 < m < \frac{25}{9}$ المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $\frac{25}{9} < m < 3$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

إذا كان $m = 3$ المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m > 3$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

4.أ-تعين الأعداد الحقيقية c, b, a :

لدينا:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)}{x^2 - x - 2}$$

$$= \frac{ax + (b-a+c)x - 2a - 2b + c}{x^2 - x - 2}$$

و بالمطابقة نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b - a + c = -1 \\ -2a - 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

اذن: $f(x) = 3 + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{4}{3(x-2)}$

ب-استنتاج دالة أصلية للدالة على المجال $[2; +\infty[$.

F دالة أصلية للدالة حيث: $F(x) = 3x + \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) + c; c \in \mathbb{R}$

5.أ-حساب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ :

لدينا من أجل كل x من $[2; +\infty[$ (C_f) فوق (Δ) وبالتالي:

$$S(\lambda) = \int_{\lambda}^3 f(x) - 3dx = \left[3x + \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) - 3x \right]_{\lambda}^3$$

$$= \left[\frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) \right]_{\lambda}^3 = \frac{\ln 144}{3} - \frac{\ln[(\lambda+1)\ln(\lambda-2)^2]^2}{3}$$

ب-احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 2} \frac{\ln 144}{3} - \frac{\ln[(\lambda+1)\ln(\lambda-2)^2]^2}{3} = +\infty$$

6. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ كما يلي: $g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$

أ-اثبات أن الدالة دالة g زوجية.

لدينا من أجل كل: $x \in D_g$ و $-x \in D_g$ فان:

$$g(-x) = \frac{3(-x)^2 - |-x| - 2}{(-x)^2 - |-x| - 2} = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2} = g(x)$$

ومنه g دالة زوجية.

ب-دراسة قابلية الاشتقاق للدالة g عند $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{(x^2 - x - 2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{(x^2 + x - 2)} = 0$$

ومنه لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$ إذن الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0.

التفسير: المنحنى يقبل مماس عند النقطة $\omega(0;1)$ موازي لمحور الفواصل.

7.كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2} = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}; x \in]0; 2[\cup]2; +\infty[\\ \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2}; x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\end{cases}$$

وباستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.



التمرين

①

دالة لوغاريتمية شاملة

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2. أدرس استمرارية الدالة f على يمين العدد 0.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ، هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

5. أرسم المنحنى (C_f) .

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1. بين أن $D_f = D_h$ و من أجل كل x من D_h ، $h(x) = f(x) + 1$.

2. استنتج جدول تغيرات الدالة h .

3. أرسم (C_h) منحنى الدالة h في المعلم السابق.

4. أحسب بالسنتيمتر المربع (cm^2) وبدلالة λ مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين

معادلتهما: $x = 0$ ، $x = \lambda$ حيث: $0 \leq \lambda \leq e$

5. أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow e} A(\lambda)$.

التمرين

②

أعداد مركبة

نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1$ ، حيث α وسيط حقيقي.

1. أ- احسب $P(1)$.

ب- عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$.

2. حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

3. ليكن z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة $P(z) = 0$ حيث $z_1 = 1$.

أ- عين طولية وعمدة الأعداد z_1, z_2, z_3 .

ب- من أجل أي قيمة للوسيط α تكون كل من $|z_1|, |z_2 + 1|$ و $|z_3 - 1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

التكن الدالة f المعرفة كما يلي: $x \neq 0$

1. -تعين D_f :

لدينا: $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ الدالة f معرفة من أجل $x > 0$ و $1 - \ln x \neq 0$ أي: $x \neq e$

اذن: $D_f = [0; e[\cup]e; +\infty[$

2. أ-دراسة استمرارية الدالة f على يمين العدد 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = -1 \\ &= f(0) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) = -1 \end{aligned}$$

ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x}{1 - \ln x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x \ln x} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

و عليه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

3. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $D_f = [0; e[\cup]e; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) - \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$$

من أجل كل x من $]0; e[\cup]e; +\infty[$ لدينا: $f'(x) > 0$ لأن $x \geq 0$ و $(1 - \ln x)^2 > 0$

اذن الدالة f متزايدة تماما على $]0; e[\cup]e; +\infty[$.

نحسب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = -1$$

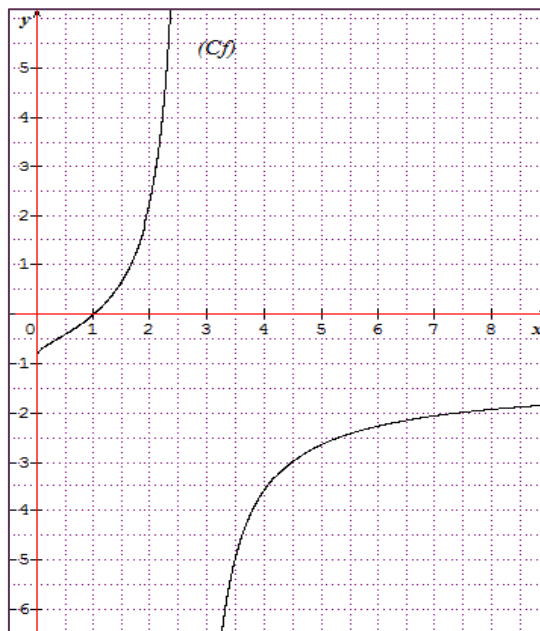
جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$			+
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

4. لدينا: الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ حيث: $f''(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 (1 - \ln x)^3}$.

نلاحظ أن الدالة f'' تنعدم عند $\frac{1}{e}$ وتغير من إشارتها اذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف $I\left(\frac{1}{e}; f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ أي $I\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{2}\right)$

5. رسم المنحنى (C_f) :



$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{1 - \ln x}, x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

II. لتكن الدالة h المعرفة كما يلي :

1. الدالة h معرفة من أجل $1 - \ln x \neq 0$ أي: $x \neq e$ وبالتالي: $D_f = D_h = [0; e[\cup]e; +\infty[$

ومن أجل كل x من D_h لدينا:

$$f(x) + 1 = \frac{\ln x}{1 - \ln x} + 1 = \frac{1}{1 - \ln x} = h(x)$$

ولدينا: $f(0) + 1 = -1 + 1 = 0 = h(0)$

اذن من أجل كل x من $[0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $h(x) = f(x) + 1$

2. جدول تغيرات الدالة h :

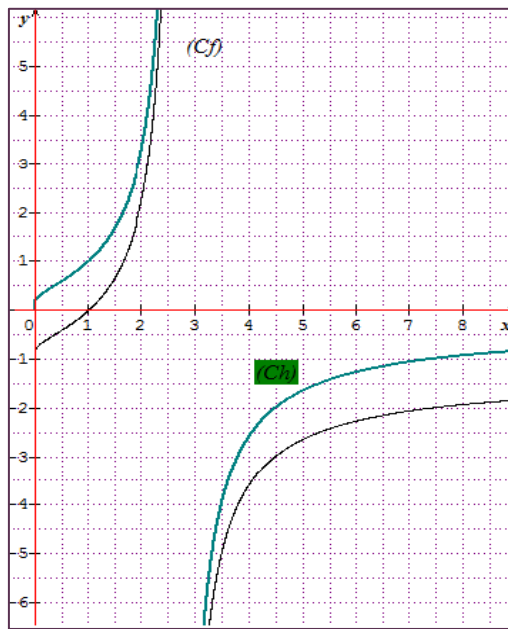
من أجل كل x من $[0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $h'(x) = f'(x)$

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$			
$h(x)$	0	$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 1 = -1 + 1 = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

3. رسم (C_h) :



4. أحسب بالسنتيمتر المربع (cm^2) وبدلالة λ مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتهم: $x = 0$ ، $x = \lambda$ حيث: $0 \leq \lambda \leq e$.

لدينا: على المجال $[0; \lambda]$ ، (C_h) يقع فوق المنحنى (C_f) وبالتالي:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \left(\int_0^\lambda h(x) - f(x) dx \right) \times 4cm^2 = \left(\int_0^\lambda 1 dx \right) \times 4cm^2 \\ &= \left([x]_0^\lambda \right) \times 4cm^2 = 4\lambda cm^2 \end{aligned}$$

5. حساب

$$\lim_{\lambda \rightarrow e} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow e} 4\lambda = 4e.cm^2$$

✓ **التمرين ②:**

1. أ.أ- احسب $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - (1 - 2 \sin \alpha)(1)^2 + (1 - 2 \sin \alpha) - 1 \\ &= 1 - (1 - 2 \sin \alpha) + (1 - 2 \sin \alpha) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه: $P(1) = 0$.

ب- تعين الاعداد الحقيقية c, b, a :

$$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -(1 - 2 \sin \alpha) \\ c - b = 1 - 2 \sin \alpha \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \sin \alpha \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$P(z) = (z-1)(z^2 + (2 \sin \alpha)z + 1)$$

2. حل المعادلة $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z-1)(z^2 + (2 \sin \alpha)z + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} z-1 = 0 \\ z^2 + (2 \sin \alpha)z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$z_1 = 1$$

$$z^2 + (2 \sin \alpha)z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta' = (i \cos \alpha)^2 \quad \text{اذن:}$$

$$\begin{cases} z' = -\sin \alpha + i \cos \alpha \\ z'' = -\sin \alpha - i \cos \alpha \end{cases}$$

$$S = \{1; -\sin \alpha + i \cos \alpha; -\sin \alpha - i \cos \alpha\}$$

$$\text{لأن: } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

3. ليكن z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة $P(z) = 0$ حيث $z_1 = 1$.

أ-تعيين طوليلة وعمدة الأعداد z_1, z_2, z_3 :

$$z_1 = 1 = 1.e^{i0}$$

$$z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha = \overline{z_2} = 1.e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

ب- الحدود $|z_1|, |z_2 + 1|$ و $|z_3 - 1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية معناه:

حسب خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$|z_1|^2 = |z_2 + 1| \times |z_3 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 1 = |z_2 \cdot z_3 - z_2 + z_3 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 1 = |1 - z_2 + \overline{z_2} - 1| \quad \text{يعني:} \quad \text{و بالتالي: } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 = |-2i \cos \alpha|$$

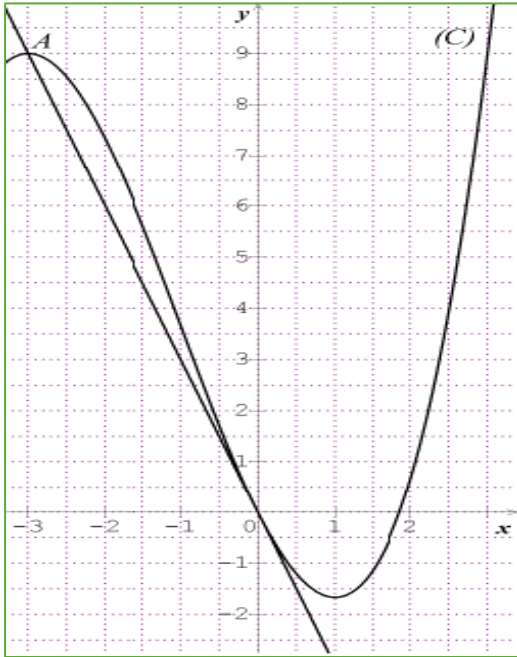
$$\Leftrightarrow 1 = 2|\cos \alpha| \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

التمرين

①

لتكن f دالة معرفة كما يلي: $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ ، حيث m وسيط حقيقي غير معدوم.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. أ- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
ب- فسر النتائج هندسيا.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
4. بين أنه توجد نقطة و حيدة تنتمي الى كل المنحنيات (C_m) .
5. عين المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$.



الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث:

- * يمر (C) بمبدأ المعلم O ويشمل النقطة $A(-3;9)$.
- * يمر (C) في النقطة B التي فاصلتها مماسا أفقيا.
- و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .
- 1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA) .
- 2. عين اتجاه تغير الدالة f .
- 3. حل بيانيا في المجال $[-3;3]$ المتراجحة: $f(x) \geq -2$.
- 4. نفرض أن: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية.
- بين أن: $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = -3, d = 0$.

التمرين

②

ل. الوديسي تيرين 62 صفحة 80

التمرين

③

بكالوريا فرنسية

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1. احسب $u_{n+1} - u_n$ ثم استنتج ان (u_n) متتالية متناقصة.
2. نضع: $v_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
أ- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
ب- المتتالية (v_n) متقاربة؟
3. نضع: $w_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$
أ- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.
ب- المتتالية (w_n) متقاربة؟

$$f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} \text{ دالة معرفة كما يلي:}$$

1. تعين مجموعة f :

الدالة f معرفة من أجل: $x^2 - mx - 3 \neq 0$ لدينا:

$$\Delta = m^2 + 12 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 = -\sqrt{m^2 + 12} < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ وعليه:}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي: } D_f =]-\infty; x_1[\cup]x_1; x_2[\cup]x_2; +\infty[\text{ حيث:}$$

2. أ- حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

نقوم بدراسة إشارة المقام أي: $x^2 - mx - 3$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	
x^2-mx-3		+	0	-	0	+

ب- التفسير:

$$a^2 - ma - 15 = b(a^2 - ma - 3)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ba^2 - 15 + 3b + m(ab - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - ba^2 - 15 + 3b = 0 \dots (1) \\ (ab - a) = 0 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تكافئ: $a(b-1) = 0 \Rightarrow (a=0; b=1)$

من أجل $a=0$ المعادلة (1) تكافئ $-15+3b=0$ أي $b=5$

من أجل $b=1$ المعادلة (1) تكافئ $-15+3=0$ (مستحيل)

اذن من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(0;5)$ تنتمي الى كل المنحنيات (C_m) .

□ طريقة أخرى: لدينا: $\begin{cases} A(a;b) \in (C_m) \\ A(a;b) \in (C_{m-1}) \end{cases}$ معناه نقوم بحل المعادلة:

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f_{m-1}(x) \\ \Rightarrow \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} &= \frac{x^2 - (m-1)x - 15}{x^2 - (m-1)x - 3} \end{aligned}$$

5. تعين المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$.

$(4;1) \in (C_m)$ معناه:

$$\begin{aligned} f_m(4) = 1 &\Rightarrow \frac{16 - 4m - 15}{16 - 4m - 3} = 1 \\ 16 - 4m - 15 &= 16 - 4m - 3 \quad (\text{مستحيل}) \\ -15 &= -3 \end{aligned}$$

ومنه النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$ لا تنتمي الى أي من المنحنيات (C_m) .

✓ التمرين ②:

1. معامل توجيه المستقيم (OA) :

$$\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{9 - 0}{-3 - 0} = \frac{9}{-3} = -3$$

2. الجدول الموالي يبين اتجاه تغير الدالة f :

x	3	1	-3
$f(x)$		$f(1)$	

3. نلاحظ من التمثيل البياني للدالة أنه من أجل كل x من $[-3;3]$ ، $f(x) \geq -2$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة: $-2 \leq f(x)$ هي المجال $[-3; 3]$.

4. لدينا من المعطيات:

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c + d = 9 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} f(-3) = 9 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -3 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{وهذا يعني:} \quad \begin{cases} -3a + b = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{وعليه نحصل على: } a = \frac{1}{3}, b = 1, c = -3, d = 0.$$

$$\text{ومنه: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$$

✓ التمرين ③:

1. حساب $u_{n+1} - u_n$

$$\text{لدينا: } u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right) \end{aligned}$$

بما أن: $\ln\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} < 1$ ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$

وعليه (u_n) متتالية متناقصة.

2. أ- حساب v_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} v_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$\text{اذن: } v_n = \ln(n+1) \text{ ولدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

ب- بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ فان المتتالية (v_n) متباعدة.

3. أ- حساب w_n بدلالة n :

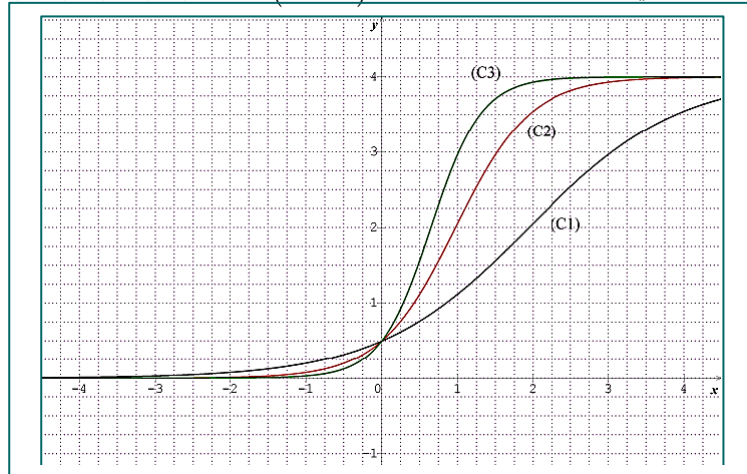
$$\begin{aligned}
w_n &= u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n+1}{2n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$w_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \text{ منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ln(2) \text{ ثم استنتج}$$

ب-لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln(2)$ و عليه المتتالية (w_n) متقاربة.

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعرف الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$ نرمز للمنحنى (C_n) الممثل للدالة f_n في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، اليك (C_1) ، (C_2) و (C_3) :



الجزء الأول: لتكن الدالة f_1 المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$

2. أ- بين أن للمنحنى (C_1) مستقيمين مقاربين يطلب إيجاد معادلتيهما

ب- بين أن الدالة f_1 متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

ج- أثبت أنه من أجل كل x عدد حقيقي، $0 < f_1(x) < 4$.

3. أ- بين أن النقطة $I_1(\ln 7; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1) .

ب- أوجد معادلة المماس (T_1) للمنحنى (C_1) عند النقطة I_1 .

ج- أرسم المماس (T_1) .

4. أ- عين دالة أصلية للدالة f_1 على \mathbb{R} .

ب- احسب القيمة المتوسطة للدالة f_1 على المجال $[0; \ln 7]$.

الجزء الثاني: 1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم النقطة $A(0; \frac{1}{2})$ تنتهي للمنحنى (C_n) .

2. أ- بين أنه مهما تغيرت قيمة n من \mathbb{N}^* فإن المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ يقطع (C_n) في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين فاصلتها.

ب- حدد معادلة المماس (T_n) للمنحنى (C_n) عند النقطة I_n .

ج- أرسم (T_2) و (T_3) .

الجزء الثالث: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم كما يلي: $u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\ln 7} f_n(x) dx$

بين أن (u_n) المتتالية ثابتة

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (الوحدة $6cm$). نعتبر التحويل f للمستوي الذي

يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = ze^{\frac{5\pi}{6}}$.

ولتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 ، حيث: $z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = f(M_n)$ ونسمي z_n لاحقة النقطة M_n .

1. عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل f ، ثم عيّن النقاط: M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 .

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$.

3. نعتبر n و p عدنان طبيعيان. برهن أن النقطتان M_n و M_p متطابقتان إذا وافقط إذا كان $(n - p)$

مضاعفا لـ 12. (س3+4 : خاص بالرياضي و التقني رياضي)

4. أ-حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $12x - 5y = 3$ علما أن الثنائية $(4; 9)$ حل خاص لها.

ب-إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث تكون النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[Ox)$.

التصحيح النهوذجي المقترح

✓ التمرين ①:

1. لتكن الدالة f_1 المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \left(\frac{4e^x}{e^x + 7} \right) = \frac{4e^{x-x}}{e^{x-x} + 7e^{-x}} = \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \quad \text{لدينا:}$$

$$= f_1(x)$$

2. أ-بين أن للمنحنى (C_1) مستقيمين مقاربين يطلب إيجاد معادلتهم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + 7e^{-x}} = 4 \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1 + 7e^{-x}} = 0$$

و بالتالي: المستقيم ذا المعادلة $y = 4$ مقارب للمنحنى (C_1) موازي لمحور الفواصل عند $+\infty$.

المستقيم ذا المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C_1) موازي لمحور الفواصل عند $-\infty$.

ب-اثبات أن الدالة f_1 متزايدة تماما على \mathbb{R} :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي الدالة f_1 قابلة للاشتقاق:

$$f_1'(x) = \left(\frac{4e^x}{e^x + 7} \right)' = \frac{4e^x(e^x + 7) - 4e^x \cdot e^x}{(e^x + 7)^2} = \frac{28e^x}{(e^x + 7)^2}$$

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $\frac{28e^x}{(e^x + 7)^2} > 0$ وبالتالي: $f_1'(x) > 0$ وعليه: أن الدالة f_1 متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

يمكن استنتاج جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	
$f_1(x)$	0	4

ج- أثبات أنه من أجل كل x عدد حقيقي، $0 < f_1(x) < 4$:

لدينا الدالة f_1 متزايدة تماماً على \mathbb{R} و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 4$ فبالنتيجة: $0 < f_1(x) < 4$.

يمكن ملاحظته من خلال جدول تغيرات الدالة f_1 .

أ.3- من أجل كل x ، $(2 \ln 7 - x)$ من \mathbb{R} نثبت أنه: $f_1(2 \ln 7 - x) + f_1(x) = 4$.

$$\begin{aligned}
 f_1(2 \ln 7 - x) + f_1(x) &= \frac{4e^{2 \ln 7 - x}}{e^{2 \ln 7 - x} + 7} + \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \\
 &= \frac{4(49)e^{-x}}{49e^{-x} + 7} + \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \\
 &= \frac{28e^{-x}}{7e^{-x} + 1} + \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \quad \text{أي:} \\
 &= 4 \left(\frac{1 + 7e^{-x}}{1 + 7e^{-x}} \right) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

اذن النقطة $I_1(\ln 7; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1) :

ب- معادلة المماس (T_1) للمنحنى (C_1) عند النقطة I_1 : تكتب من الشكل:

$$(T_1): y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$$

$$(T_1): y = (x - \ln 7) + 2$$

$$(T_1): y = x - \ln 7 + 2$$

ج- أرسم المماس (T_1) : أنظر في الأسفل

أ.4- تعين دالة أصلية للدالة f_1 على \mathbb{R} :

لدينا: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$ نلاحظ أن اذا قمنا باشتقاق المقام سنحصل عليه في البسط جداء 4: يعني:

$$F_1(x) = 4 \ln(e^x + 7) + c, c \in \mathbb{R} : \text{اذن } f_1(x) = \frac{4(e^x + 7)'}{e^x + 7}$$

ب- القيمة المتوسطة للدالة \mathbb{R} على المجال $[0; \ln 7]$.

$$m = \frac{1}{\ln 7} \int_0^{\ln 7} f_1(x) dx \text{ و منه:}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\ln 7} [F_1(\ln 7) - F_1(0)] = \frac{1}{\ln 7} [4 \ln(e^{\ln 7} + 7) - 4 \ln(e^0 + 7)] \\ &= \frac{1}{\ln 7} [4 \ln 14 - 4 \ln 8] \\ &= \frac{4}{\ln 7} \ln \left(\frac{14}{8} \right) \\ m &= \frac{4}{\ln 7} \ln \left(\frac{7}{4} \right) \end{aligned}$$

II.1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ تنتمي للمنحنى (C_n) :

يعني: $f_n(0) = \frac{1}{2}$ (فرضية التراجع)

من أجل $n=1$ لدينا: $f_1(0) = \frac{4e^0}{e^0 + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. وبالتالي: محققة.

نفرض أنها محققة من كل عدد طبيعي n غير معدوم ونثبت صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي: $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2}$.

لدينا: $f_n(0) = \frac{1}{2}$ أي: $\frac{4e^{n0}}{e^{n0} + 7} = \frac{1}{2}$ و منه: $\frac{4e^{(n+1)0}}{e^{(n+1)0} + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ وعليه: $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2}$.

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لدينا: من كل عدد طبيعي n غير معدوم $f_n(0) = \frac{1}{2}$ يعني: النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ تنتمي للمنحنى (C_n)

ويمكن الاستنتاج أن جميع المنحنيات (C_n) تلتقي في نقطة وحيدة هي $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

2.أ- اثبات أنه مهما تغيرت قيمة n من \mathbb{N}^* فإن المستقيم ذا المعادلة $y=2$ يقطع (C_n) في نقطة I_n :

نقوم بحل المعادلة: $f_n(x) = y$ أي:

$$\begin{aligned} \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} &= 2 \\ 4e^{nx} &= 2(e^{nx} + 7) \\ 2e^{nx} &= 14 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln 7}{n} \end{aligned}$$

اذن: النقطة I_n ذات لفافلة $x = \frac{\ln 7}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) هي نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مع (C_n) .

ب-معادلة المماس (T_n) للمنحنى (C_n) عند النقطة I_n :

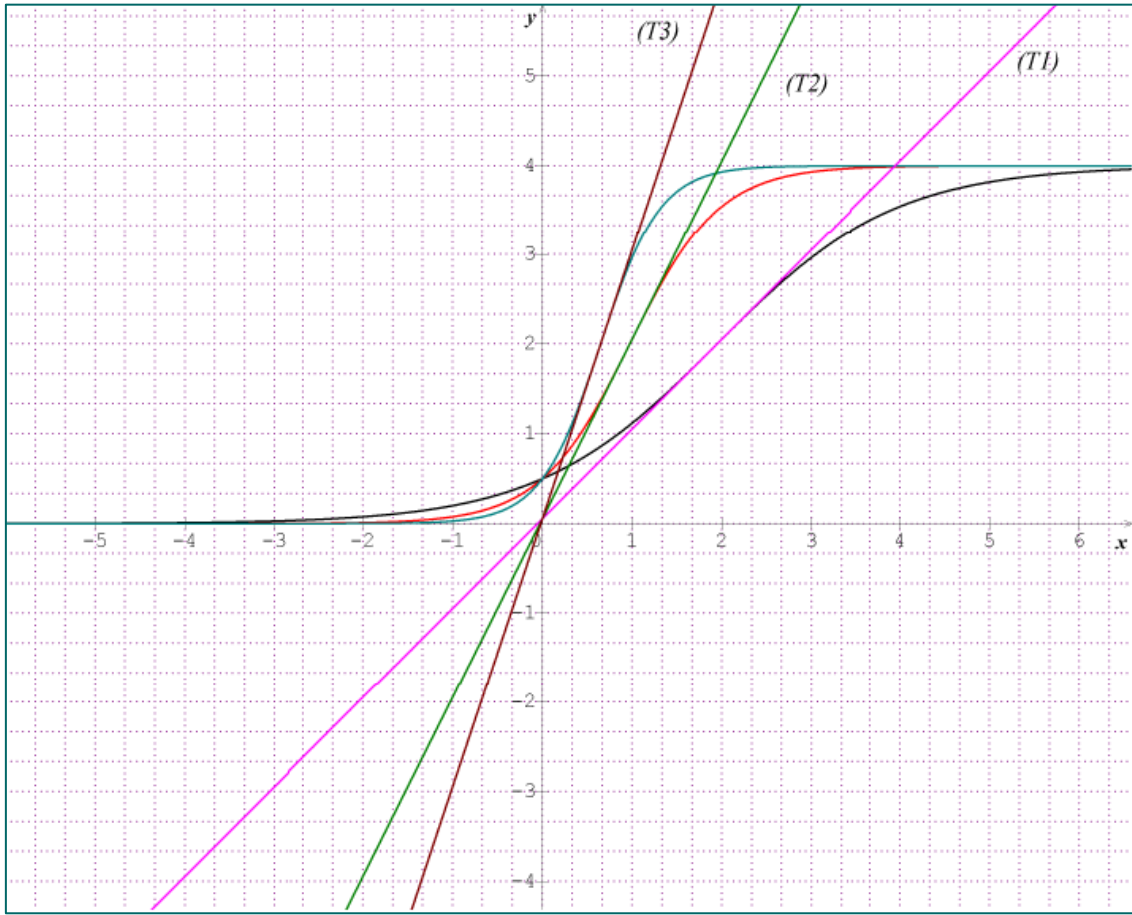
$$f_n'(x) = \frac{28n \cdot e^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2} \quad \text{و لدينا:} \quad f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = 2 \quad \text{وبالتالي:} \quad (T_n): y = f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$$

$$f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = n$$

ومن هنا نجد ما يلي: $(T_n): y = n\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + 2$

$(T_n): y = nx - \ln 7 + 2$

ج-رسم (T_2) و (T_3) .



III. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم كما يلي: $u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x) dx$

المتتالية (u_n) الثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = \dots = u_1$.

لدينا:

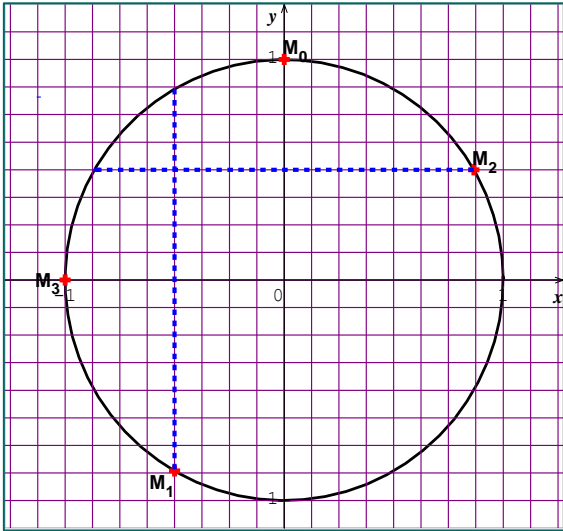
$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x) dx = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} dx \\
&= \frac{4}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} \frac{ne^{nx}}{e^{nx} + 7} dx = \frac{4}{\ln 7} \left[\ln(e^{nx} + 7) \right]_0^{\frac{\ln 7}{n}} \\
&= \frac{4}{\ln 7} \ln\left(\frac{7}{4}\right) \\
&= u_0
\end{aligned}$$

اذن: المتتالية (u_n) الثابتة

✓ التمرين ②:

(1) طبيعة التحويل $f: z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ هو دوران مركزه O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

(2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي $n: z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$ ، لنستعمل البرهان بالتراجع :



✓ نتحقق من أجل $n = 0: z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2} + 0 \times \frac{5\pi}{6})}$ ،

أي: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، (محققة) .

✓ نفرض صحة: $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$.

✓ نبرهن صحة: $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2} + (n+1)\frac{5\pi}{6})}$.

البرهان: نعلم أنّ: $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n$ ،

وَلدينا فرضا :

، $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$ أي ، $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي: $z_{n+1} = e^{i[\frac{\pi}{2} + (n+1)\frac{5\pi}{6}]}$ ، أي: $z_{n+1} = e^{i[\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6}]}$ ،

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$.

(3) M_p و M_n متطابقتان معناه أنّ: $z_n = z_p$ ، أي: $e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2} + p\frac{5\pi}{6})}$ ، وهذا معناه أنّ:

: أي $n \times 5\pi = p \times 5\pi + 12k\pi$ ، أي: $\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + p\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ، أي: $n \times 5\pi = p \times 5\pi + 12k\pi$ ، ومنه: $5n - 5p = 12k$ ، أي: $5n = 5p + 12k$ ،

$5(n - p) = 12k$ ، ومنه: $5(n - p) = 12k$ ، و $12 \mid 5(n - p)$ و $12 \mid 12k$.

أولي مع 5 ، حسب غوص : 12 يقسم $(n - p)$ ، أي أن : $(n - p)$ مضاعف لـ 12 .

(4) أ) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $12x - 5y = 3$: $12x - 5y = 12(4) - 5(9)$ ، أي : $12(x - 4) = 5(y - 9)$ حسب غوص

$$\text{نستنتج أن : } \begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = 12k + 9 \end{cases} \text{ حيث : } k \in \mathbb{Z} .$$

(ب) $M_n \in [Ox)$ معناه أن : z_n حقيقي موجب ، أي : $\arg(z_n) = 0 + 2k\pi$ ، أي : $\frac{\pi}{2} + n \frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ ، أي :

$$3\pi + 5n\pi = 12k\pi \text{ ، أي : } 3 + 5n = 12k \text{ ، أي : } 12k - 5n = 3 .$$

إذن : $n = y = 12k + 9$ مع $k \in \mathbb{N}$.

بتلهسان 2020/05/18



صفحة : 5min Maths

قدم لكم هذه السلسلة خلال شهر رمضان الأستاذ شعبان أسامة



1. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي: $g(x) = x \cos x - \sin x$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $[0; \pi]$.

2. لتكن الدالة f العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $[-\pi; \pi]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x}; x \in [-\pi; 0[\cup]0; \pi] \end{cases}$$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أدرس شفعية الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

2. أدرس تغيرات الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ ،

إرشاد: يمكنك استعمال الدالة h المعرفة على بالعلاقة: $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ ، أحسب h' ، h'' و h''' (المشتقة الثالثة)

ثم استنتج إشارة $h(x)$.

4. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ثم احسب $f'(0)$.

5. أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T) .

7. أرسم (C) و (T) .

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ و $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بما يلي : $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ حيث $\beta; \alpha$ عدنان حقيقيان غير منعدمان .

أ. أحسب u_2 و u_3 .

ب. أحسب v_1 ، v_2 و v_3 بدلالة α و β .

ج. بين أنه إذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$.

2. نضع $\beta = \alpha$:

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد n من \mathbb{N}^* : $u_n + u_{n-1} = 3^n$.

3. نضع $\beta = -3\alpha$: أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد n من \mathbb{N}^* : $u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$

ج- بين أن : $[(v_n) \text{ متتالية هندسية }]$ معناه $[\beta = \alpha \text{ أو } \beta = -3\alpha]$

✓ التمرين ① :

١. الدالة g المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي: $g(x) = x \cos x - \sin x$.

1.- أدرس اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0; \pi]$ ،

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \cos x - \sin x)' \\ &= \cos x - x \sin x - \cos x \\ g'(x) &= -x \sin x \end{aligned}$$

من أجل $x \in [0; \pi]$ لدينا: $\sin x > 0$ وبالتالي: $g'(x) < 0$ و $g(\pi) = -\pi$ و $g(0) = 0$

وعليه الدالة g متناقصة تماما على $[0; \pi]$

جدول التغيرات:

x	0	π
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	$-\pi$

2. إشارة $g(x)$ على المجال $[0; \pi]$:

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $[0; \pi]$ $g(0) = 0, g(\pi) = -\pi$

ومن جدول التغيرات $g(x) < g(0)$ أي $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in [0; \pi]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x}; x \in [-\pi; 0[\cup]0; \pi] \end{array} \right. \text{ كما يلي: } \text{II. الدالة } f \text{ معرفة على } [-\pi; \pi]$$

1. شفعية الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

من أجل كل x ، $-x$ من $[-\pi; \pi]$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2. دراسة تغيرات الدالة f على $[-\pi; \pi]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-\pi; \pi]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x}{x} \right)', \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-\pi; \pi]$ و $x^2 > 0$ وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي: $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0; \pi]$.

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ ،

لدينا الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

لدينا الدالة h' قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، $h''(x) = -\sin x + x$.

لدينا الدالة h'' قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، $h'''(x) = -\cos x + 1$.

من اجل $(k \in \mathbb{Z})$ ، $x \neq 2k\pi$ ، لدينا $\cos x < 1$ وبالتالي: $-\cos x + 1 > 0$ يعني: $h'''(x) > 0$

فبالنتيجة: h'' دالة متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بما أن $h''(0) = 0$ فان من أجل كل x من $[0; +\infty[$ $h''(x) \geq 0$ فبالنتيجة: h' دالة متزايدة على $[0; +\infty[$.

ولدينا من جهة أخرى: $h'(0) = 0$ و من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $h'(x) \geq 0$ فبالنتيجة: h دالة متزايدة على $[0; +\infty[$.

اذن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $h(x) \geq 0$ أي: $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$ و عليه: $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ (1)

ونعلم أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ $h''(x) \geq 0$ أي $0 \leq x - \sin x$ (2).

من (1) و (2) نجد: $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

4. اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0:

علينا حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ولكن

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$$

ومن السؤال السابق لدينا: $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ أي: $-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} \right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x^2} \right) \leq 0$$

بالقسمة على (x^2) نتحصل على

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \leq 0$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} \right) = 0$ وبتطبيق خاصية "حصص النهايات" نجد: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

وبالتالي: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0: ومنه $f'(0) = 0$.

5. معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = 1$$

6. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T) .

$$f(x) - y = \frac{\sin x}{x} - 1$$

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ نجد:

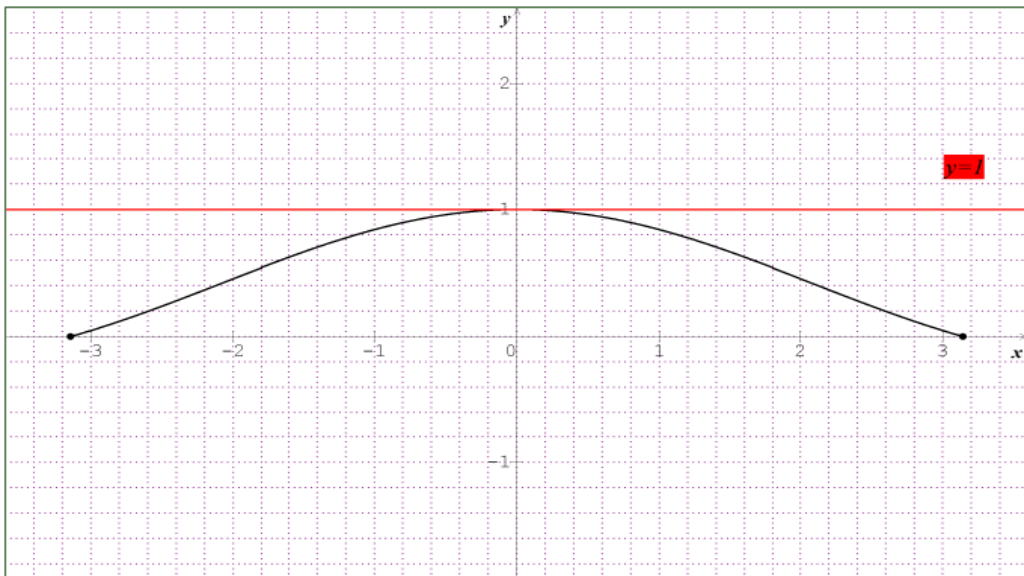
$$= \frac{\sin x - x}{x}$$

لدينا: $h''(x) = x - \sin x$ ونعلم أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ $h''(x) > 0$.

ومنه $-h''(x) = \sin x - x < 0$ أي: $f(x) - y < 0$ وعليه المنحنى (C) يقع تحت المماس (T) .

وبما أن الدالة f دالة زوجية فان منحناها البياني متناظر مع محور الترتيب فبالتالي المنحنى (C) يقع تحت المماس (T) من أجل $x < 0$.

7. رسم (C) و (T) :



$$1. v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$$

أ. حساب الحدود : $u_2 = 7$; $u_3 = 20$.

ب. حساب الحدود : $v_1; v_2; v_3$ ، $v_1 = 2\alpha + \beta$ ، $v_2 = 7\alpha + 2\beta$ ، $v_3 = 20\alpha + 7\beta$.

ج. $v_1; v_2; v_3$ حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه $v_2^2 = v_1 \times v_3$ معناه

$$(7\alpha + 2\beta)^2 = (2\alpha + \beta)(20\alpha + 7\beta) \quad \text{معناه} \quad 9\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\beta^2 = 0 \quad \text{معناه} \quad 3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$$

2. نضع $\beta = \alpha$:

أ. لدينا $v_n = \alpha u_n + \alpha u_{n-1}$ معناه $(1) \dots \dots \dots v_n = \alpha(u_n + u_{n-1})$ من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha(u_{n+1} + u_n) \\ &= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} + u_n) \\ &= \alpha(3u_n + 3u_{n-1}) \quad \text{ومنه} \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_1 = 3\alpha$.

ت. لدينا : $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$ ومنه $v_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$ معناه : $(2) \dots \dots \dots v_n = \alpha \times 3^n$ من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\alpha(u_n + u_{n-1}) = \alpha \times 3^n \quad \text{معناه} \quad u_n + u_{n-1} = 3^n$$

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $(1) \dots \dots \dots v_n = \alpha u_n - 3\alpha u_{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha(u_{n+1} - 3u_n) \\ &= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} - 3u_n) \\ &= \alpha(-u_n + 3u_{n-1}) \quad \text{ومنه} \\ &= -\alpha(u_n - 3u_{n-1}) \\ v_{n+1} &= -v_n \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -1$ وحدها الأول $v_1 = -\alpha$.

ب. لدينا $v_n = -\alpha(-1)^{n-1}$ ومنه $(2) \dots \dots \dots v_n = \alpha(-1)^n$ من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\alpha(u_n - 3u_{n-1}) = \alpha(-1)^n \text{ ومنه}$$

$$u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$$

$$3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \text{ متتالية هندسية معناه } (v_n)$$

$$\Delta = 16\beta^2 \text{ معناه } \alpha = \beta \text{ و } \alpha = -3\beta$$

سؤال اليوم

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

1. عين الشكل المثلثي للعدد S_n .

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، S_n عدد حقيقي.

الحل:

لدينا:

$$\begin{cases} |1+i| = \sqrt{2} \\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{وبما أن: } 1-i = \overline{1+i} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2. لدينا: نعلم أن: $\cos x = \cos(-x)$ و $\sin(-x) = -\sin x$ إذن:

$$\begin{aligned} S_n &= (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= (\sqrt{2})^n \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ باستعمال خاصية موافر:} \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

1. g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g .

ب- احسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

2. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (نأخذ: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$)

أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب- عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

4. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

5. لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x[(\ln x)^2 + a \ln x + b]$ حيث a و b عددا حقيقيان.

أ- عين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$.

ب- احسب بالسنتمتر المربع $(cm)^2$ المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \frac{1}{e}$

، $x = 1$ و $y = ex - e$.

6. لتكن k دالة معرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $k(x) = -\frac{1}{2}(\ln |x|)^2 - e|x| + e$.

أ- أثبت أن k دالة زوجية

ب- اشرح كيف يمكن استنتاج منحنى الدالة k انطلاقا من منحنى الدالة f ثم ارسمه في نفس المعلم.

7. ليكن m وسيطا حقيقيا.

أ- بين أن كل المستقيمات (Δ_m) حيث: $y = mx - m$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 1، 2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2. نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كرات من الكيس.

1- أحسب احتمال الحصول على:

أ- ثلاث كرات من نفس اللون.

ب- ثلاث كرات تحمل نفس الرقم.

ج- ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى.

2- ليكن المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1

أ- عين قانون احتمال المتغير العشوائي

ب- أحسب الامل الرياضي ج- أحسب التباين والانحراف المعياري.

1. g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$.

أ-دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + e = e \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{نهاية شبيهة:} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} + e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array} \right.$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

من أجل أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، إشارة $g'(x)$ من إشارة $1 - \ln x$ أي:

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	0 -

وبالتالي جدول تغيراتها كالآتي:

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e} + e$	e

ب-لدينا:

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)} + e = \frac{-\ln e}{\left(\frac{1}{e}\right)} + e = 0$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

وعليه إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$

أ- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln x + e \quad \text{تذكر أن: } (f^n)' = n f' f^{n-1}$$

$$= g(x)$$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

ب- نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e = +\infty \quad \text{ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3}{2} - e \quad \text{حيث:}$$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = e \end{cases} \Rightarrow (T): y = ex - e \quad \text{ومنه:}$$

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

نقوم بحساب إشارة الفرق: $f(x) - y$:

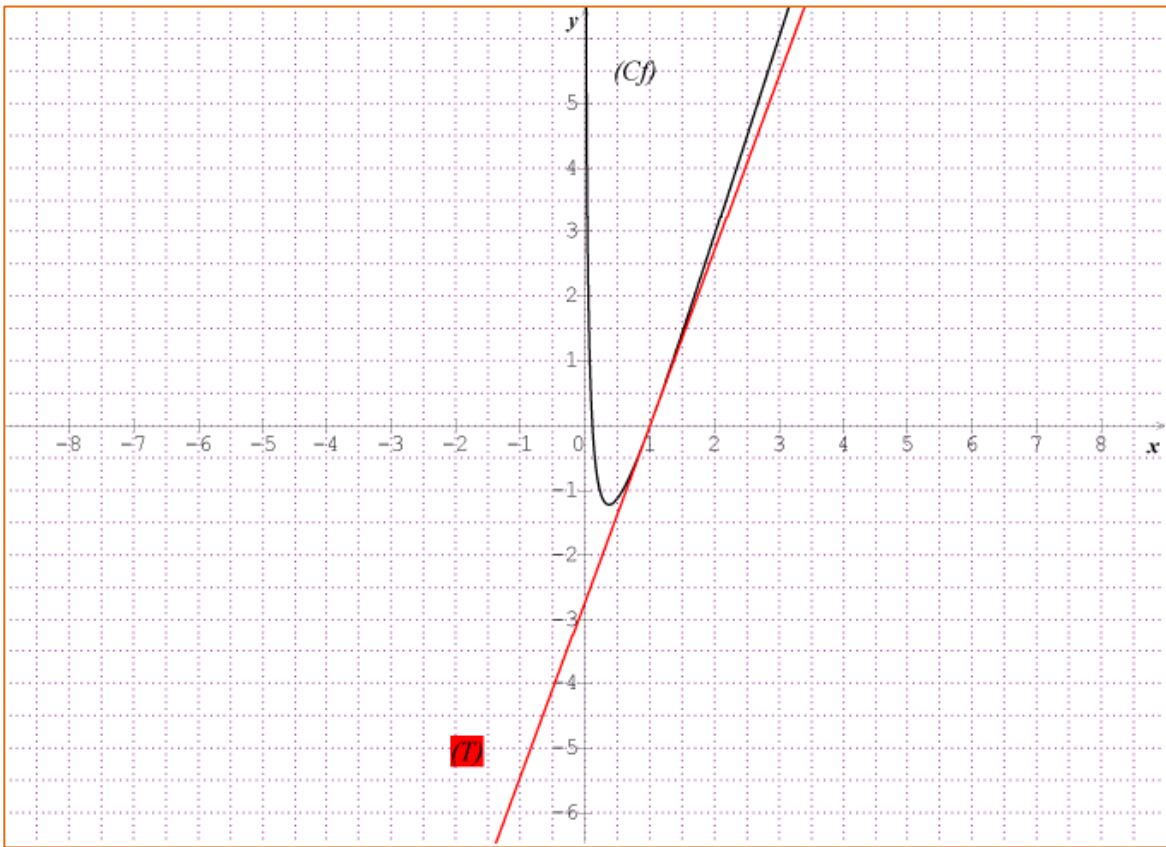
$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e - (ex - e) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 \end{aligned}$$

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\frac{1}{2}(\ln x)^2 \geq 0$.

وبالتالي: لما $x=1$ المنحنى (C_f) يقطع المماس (T) في النقطة $w(1;0)$.

من أجل $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T) .

4. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) :



5. لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x[(\ln x)^2 + a \ln x + b]$ حيث a و b عددين حقيقيين.

أ- تعين a و b :

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$: $h'(x) = (\ln x)^2 + (a+2)\ln x + b + a$

$$\begin{cases} a+2=0 \\ b+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد: } h'(x) = (\ln x)^2 \text{ تكافئ } x \mapsto (\ln x)^2 \text{ الدالة } h \text{ أصلية للدالة}$$

أي: $h(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$.

ب- حساب المساحة A :

$$A = \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) - y dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$A = \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{2} (\ln x)^2 dx \right) \times 1 \times 2$$

$$A = \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln x)^2 dx \right) \quad \text{أي نجد:}$$

$$\begin{aligned} A &= \left[h(x) \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= h(1) - h\left(\frac{1}{e}\right) \\ &= \left(2 - \frac{5}{e} \right) cm^2 \end{aligned}$$

6. لتكن k دالة معرفة على \mathbb{R}^* كما يلي : $k(x) = -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - e|x| + e$

أ- لدينا من أجل كل x و $-x$ من \mathbb{R}^* ،

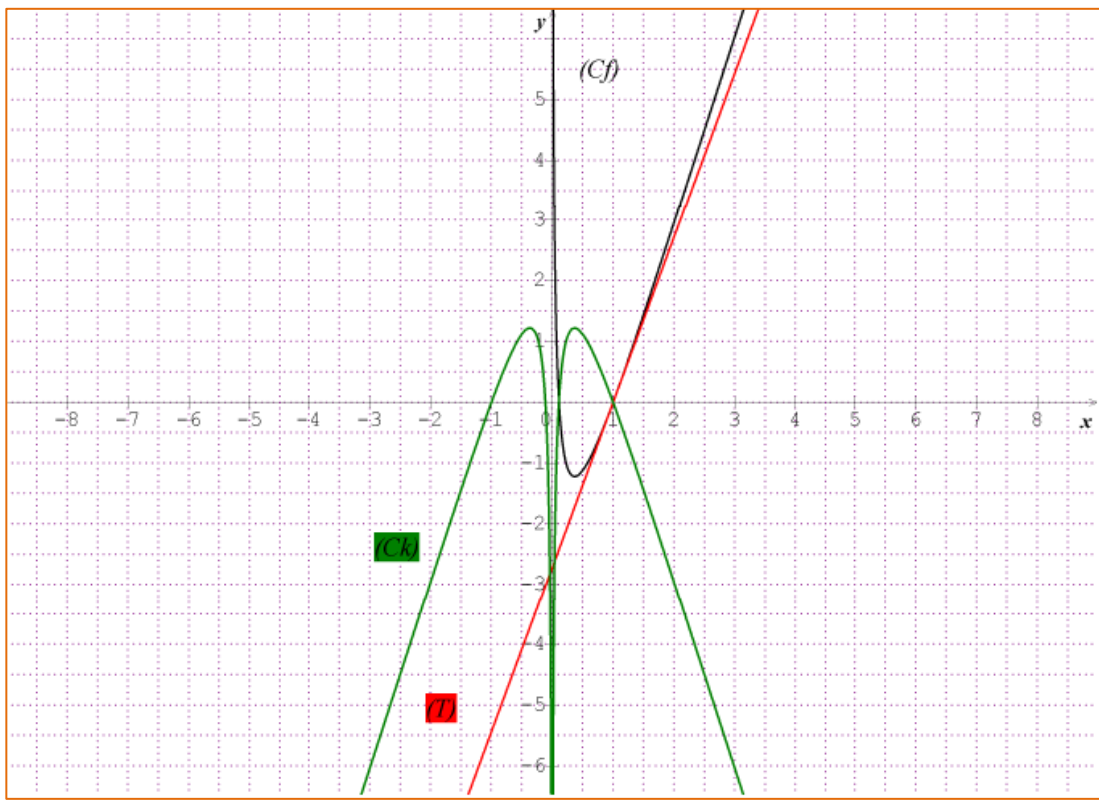
$$\begin{aligned} k(-x) &= -\frac{1}{2}(\ln|-x|)^2 - e|-x| + e \\ &= -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - e|x| + e \quad \text{وبالتالي:} \\ &= k(x) \end{aligned}$$

اذن: k دالة زوجية.

ب- الشرح:

لما $x > 0$ فان المنحنى (C_k) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

ولما $x < 0$ نقوم برسم نظير (C_k) المرسوم على المجال $]0; +\infty[$ بالنسبة لمحور الترتيب لأن: k دالة زوجية.



أ-7. بين أن كل المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها:

$$y = mx - m \quad \text{تكافئ} \quad mx - m - y = 0 \quad \text{أي} \quad m(x-1) - y = 0 \quad (1) \dots \text{و عليه من أجل كل الوسيط الحقيقي } m$$

$$\text{المعادلة (1) محققة من أجل} \quad \begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{أي: } x=1 \text{ و } y=0.$$

وبالتالي: النقطة $B(1;0)$ هي النقطة التي تنتمي لكل المنحنيات (Δ_m) .

ب- المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx - m$ بيانيا هي تعيين مجموعة نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y = mx - m$

لما $m \in [e; +\infty[$ للمعادلة حلا وحيدا.

ولما $m \in]-\infty; e]$ للمعادلة حلين متميزين.

✓ **التحريين ②:**

الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

• أ- نسعي A حادثة الحصول على " ثلاث كرات من نفس اللون "

$$P(A) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_4^3 + C_4^3}{56} = \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

ب- نسي B حادثة الحصول على " ثلاث كرات تحمل نفس الرقم "

$$P(B) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{56} = \frac{4+1}{56} = \frac{5}{56}$$

ت- نسي C حادثة الحصول على " ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى "

$$P(C) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} = \frac{1 \times 4 \times 3}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

• أ - قيم المتغير العشوائي هي : $x = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(x = 0) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_4^1 * C_4^2}{56} = \frac{6 * 4}{56} = \frac{24}{56}$$

$$| P(x = 2) = \frac{C_4^2 * C_4^1}{56} = \frac{4 * 6}{56} = \frac{24}{56}$$

$$P(x = 3) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$$

$$P(x = 0) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$$

x	0	1	2	3
$p(x = xi)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب- حساب الأمل الرياضي :

$$E(x) = \left(0 * \frac{4}{56}\right) + \left(1 * \frac{24}{56}\right) + \left(2 * \frac{24}{56}\right) + \left(3 * \frac{4}{56}\right) = 1.5$$

ت- حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(x) = \sum_{i=1}^4 (xi - E(x))^2 * pi = \frac{15}{28}$$

$$\delta = \sqrt{v(x)} = 0.73 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

اليوم 28 الثامن و العشرون

التمرين

①

أعداد مركبة

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

1. أكتب العدد z_A على الشكل الأسّي ثم إستنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

2. n عدد طبيعي، L_n هو العدد المركب المعروف بما يلي : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n ثم إستنتج

قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

3. تحقق أنّ : $z_C = i z_A$ ثم إستنتج طبيعة المثلث OAC .

4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

مع $k \in \mathbb{Z}$ ، تحقق أنّ النقطه O تنتمي إلى (Γ) ثم عين طبيعتها .

5. نعتبر النقطه D ذات اللاحقة $z_D = \overline{z_C}$ ، بين أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

6. لتكن النقطه E ذات اللاحقة $z_E = 3 - \sqrt{3}$ ، S التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطه A

إلى النقطه C . عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثم إستنتج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس

الدائرة (\mathcal{C}) يطلب تعيين عناصرها.

التمرين

②

الاحتمالات

في بلد 2% من المجتمع مصاب بفيروس معين ، دراسة قامت بالتحاليل للعثور على أثر هذا الفيروس أسفرت على مايلي:

احتمال لكي يكون الشخص مصاب بالفيروس له نتيجة التحليل موجبة هو 0,99 واحتمال لكي يكون الشخص غير مصاب

بالفيروس له نتيجة التحليل السالبة هو 0,97 .

نختار عشوائيا نتيجة التحليل لشخص من هذا المجتمع ، ونعتبر الحادتين:

V "الشخص مصاب بالفيروس" و T "نتيجة التحليل موجبة"

1. شكل شجرة الاحتمالات لهذه الوضعية.

2. احسب $P_V(\bar{T})$ ، $P_V(T)$ ، $P(V \cap T)$ ، $P(V)$

3. بين أن احتمال أن تكون نتيجة التحليل موجبة هو 0,0492 .

4. احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالفيروس علما أن نتيجة التحليل سالبة.

التمرين

③

الجبر

خاص بالتقني رياضي و الرياضي

نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة: $5x - 6y = 3$ (E).

1. أ- أثبت أنه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب- استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E).

ج- حل الجملة (S) بطريقتين مختلفتين حيث: $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ (S)...

2. عين كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $x^2 - y^2 \leq 56$.

3. a و b عدنان طبيعيان حيث $a = 1\alpha 0\alpha 00$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \alpha\beta 0\alpha$ في النظام ذو الأساس 5

عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E).

✓ التمرين ① :

لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

(1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسّي ثم إستنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B :

لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A = \arg(z_A)$

$$\text{إذن : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

الشكل الأسّي للعدد z_A هو : $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

إستنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B : $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(2) لدينا : العدد المركب $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$

حساب L_n بدلالة n :

$$L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n = e^{i \times n \frac{\pi}{6}} + e^{-i \times n \frac{\pi}{6}}$$

$$\text{ومنه : } L_n = e^{i \frac{n\pi}{6}} + e^{-i \frac{n\pi}{6}} = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$\text{أي } L_n = e^{i \frac{n\pi}{6}} + e^{-i \frac{n\pi}{6}} = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}$$

$$\text{وبالتالي : } L_n = 2 \cos \frac{n\pi}{6}$$

إستنتاج قيمة L_{2018} :

$$L_{2018} = 2 \cos \left(\frac{2018\pi}{6}\right) = 2 \cos \left(336\pi + \frac{2\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{إذن } L_{2018} = 1$$

(3) التحقق أن $z_C = i z_A$ ثم إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

$$\text{لدينا : } i z_A = i(3 + i\sqrt{3}) = 3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i = z_C$$

$$\text{أي } z_C = i z_A$$

إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

$$\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = i \quad \text{أي} \quad \frac{z_C}{z_A} = i \quad \text{ومنه} \quad z_C = i z_A$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right| = |i| = 1 \quad \text{إذن لدينا :}$$

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad OC = OA$$

ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{مع} \quad \arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

التحقق أنّ النقطه O تنتمي إلى (Γ) ثمّ تعيين طبيعتها :

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{يعني} \quad (\Gamma) \quad \text{تنتهي إلى} \quad O$$

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) = \arg(3 + i\sqrt{3}) - \arg(-\sqrt{3} + 3i)$$

$$\arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) - \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \arg(z_A) - \arg(i \times z_A) \quad \text{أي}$$

$$\arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) - \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) = \arg(z_A) - \arg(z_A) - \arg(i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه :}$$

$$O \in (\Gamma) \quad \text{ومنه}$$

تعيين طبيعة (Γ) :

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{يعني}$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ومنه} \quad \arg(z_A - z) - \arg(z_C - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{مع} \quad (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{أي}$$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل

النقطه O ماعدا النقطتين A و C

(5) تبين أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان :

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} = \frac{\overline{z_C - z_A}}{i z_A - z_A} = \frac{-i \overline{z_A - z_A}}{i z_A + i^2 z_A} = \frac{-(z_A + i \overline{z_A})}{i(z_A + i \overline{z_A})} = -\frac{1}{i} = i \quad \text{لدينا :}$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{يعني} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي: المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان

(6) تعيين نسبة وزاوية التشابه S :

لدينا : العبارة المركبة للتشابه S من الشكل : $z' = az + b$

ولدينا : $\begin{cases} S(A) = C \\ S(E) = E \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_C = a z_A + b \\ z_E = a z_E + b \end{cases}$ وبالتالي

$$a = \frac{z_C - z_E}{z_A - z_E} = \frac{-\sqrt{3} + 3i - 3 + \sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3}} = \frac{3i - 3}{i\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i}$$

ومنه : $a = i\sqrt{3}$ إذن $a = \frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2i = i\sqrt{3}$

نسبة التشابه S : $k = |a| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ وزاوية التشابه S : $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2}$

إستنتاج أنّ النقط A, E, O, C تنتمي إلى نفس الدائرة (\mathcal{C}) :

لدينا : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه :

AEC و AOC مثلثان قائمان .

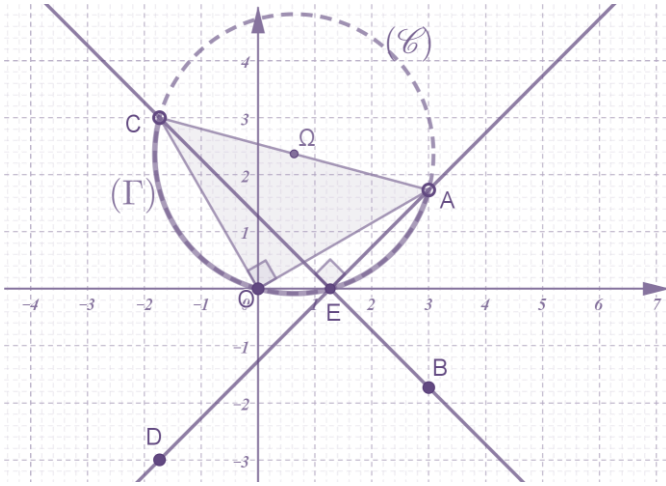
وبالتالي النقط A, E, O, C تنتمي إلى

نفس الدائرة (\mathcal{C}) التي مركزها Ω منتصف

القطعة $[AC]$ ونصف قطرها

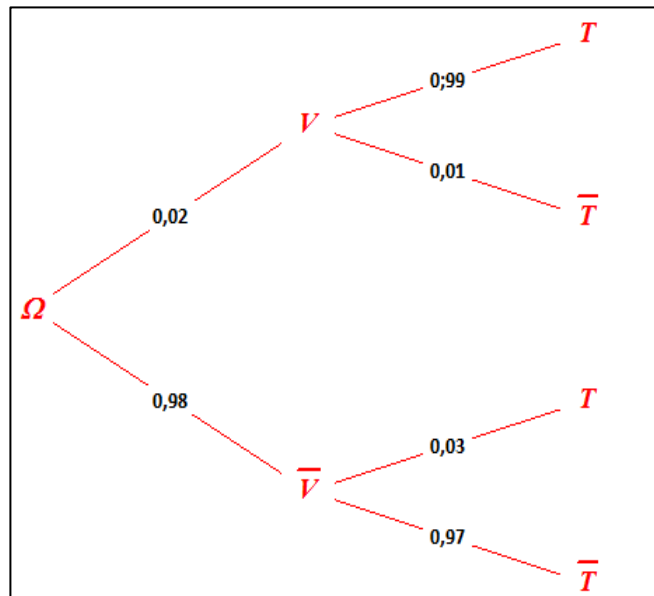
$$r = O\Omega = |z_{\Omega}| = \left| \frac{z_C + z_A}{2} \right| = \left| \frac{iz_A + z_A}{2} \right|$$

$$r = \frac{|z_A(1+i)|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$



✓ التمرين ② :

1. شجرة الاحتمالات:



2. حساب :

$$p(V) = 0,02$$

$$p(V \cap T) = 0.02 \times 0.99 = 0.0198$$

$$p_V(T) = \frac{p(V \cap T)}{p(V)} = \frac{0.0198}{0.02} = 0.99 \quad \text{و بالتالي نستنتج أن :}$$

$$p_{\bar{V}}(\bar{T}) = \frac{p(\bar{V} \cap \bar{T})}{p(\bar{V})} = \frac{0.97 \times 0.98}{0.98} = 0.97$$

$$p(V) = 0,02$$

$$p(T) = p(V \cap T) + p(\bar{V} \cap T) = 0.02 \times 0.99 + 0.98 \times 0.03 = 0.0492 \quad .3$$

$$. p_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{p(\bar{V} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{0.97 \times 0.98}{1 - 0.0492} = 0.999 \quad .4$$

✓ التمرين ③ :

نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة: $5x - 6y = 3$ (E).

1. أ- الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فان: $5x - 6y = 3$ ومنه: $5x = 6y + 3 = 3(y + 2)$ ومنه حسب مبرهنة غوص

$5x/3$ و 3 و 5 أوليان فيما بينهما اذن $3/x$ أي $x = 3k, k \in \mathbb{Z}$ و عليه "مضاعف للعدد 3"

ب- استنتج حلا خاصا للمعادلة (E):

لدينا: $x_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$ اذن (E) تكافئ $(x_0; y_0)$ حل لمعادلة (E) معناه $5x_0 - 6y_0 = 3$ أي $5(3k) - 6y_0 = 3$

أي $5k - 2y_0 = 1$. علينا ايجاد الثنائية $(k; y_0)$ ، لدينا: $5 = 2 \times 2 + 1$ ومنه: $5(1) - 2(2) = 1$

فبالتالي: $(k; y_0) = (1; 2)$ أي: $(x_0; y_0) = (3; 2)$.

* حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E):

$$\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5(3) - 6(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow 5x - 6y = 5(3) - 6(2) \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow 5(x - 3) = 6(y - 2)$$

ومنه حسب غوص لدينا: 6 و 5 أوليان فيما بينهما و $6/5(x-3)$ أي: $6/(x-3)$ ومنه: $x = 6k + 3$.

بالتعويض نجد: $y = 5k + 2$ و بالتالي: $(x; y) = (6k + 3; 5k + 2)$.

ج- حل الجملة (S):

الطريقة 1:

(S) تكافئ $\begin{cases} x = 6\alpha - 1 \\ x = 5\beta - 4 \end{cases}$ وبالتالي: $6\alpha - 1 = 5\beta - 4$ أي: $5\beta - 6\alpha = 3$ حسب السؤال (ب) نجد:

$$(\alpha; \beta) = (6k + 3; 5k + 2) \text{ بالتعويض نجد: } x = 30k + 11, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

الطريقة 2:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases} \dots (S) \text{ تكافئ: } 6x - 5x \equiv -19[30] \text{ أي: } x \equiv -19[30] \text{ و عليه: } x \equiv 11[30]$$

$$\text{ومنه: } x = 30k + 11, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

2. تعين كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $x^2 - y^2 \leq 56$:

$$(x; y) \text{ حلول المعادلة (E) و } x^2 - y^2 \leq 56 \text{ فان: } (6k + 3)^2 - (5k + 2)^2 \leq 56 \text{ و عليه } 11k^2 + 16k - 51 \leq 0.$$

$$\text{نقوم بدراسة اشارتها نجد: من أجل } k \in \left[-3; \frac{17}{11}\right] \text{ لدينا: } 11k^2 + 16k - 51 \leq 0 \text{ و منه } k = \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

وبالتالي الثنائيات $(x; y)$ هي: $(-15; -13), (-9; -8), (-3; -3), (3; 2), (9; 7).$

3. عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة

$$\text{لدينا: } a = 1\alpha 0\alpha 00 \text{ معناه } 0 \leq a < 3 \text{ وكذلك } b = \overline{\alpha\beta 0\alpha} \text{ أي: } 0 \leq b < 5.$$

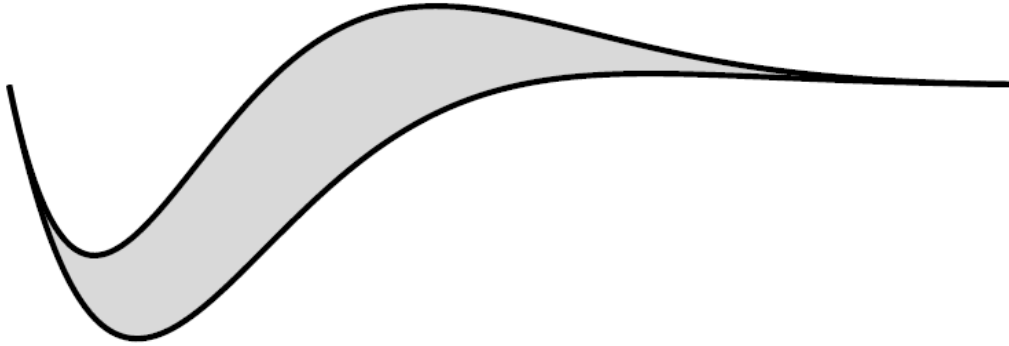
$$\begin{aligned} a &= 3^2 \times \alpha + 3^4 \times \alpha + 3^5 = 90\alpha + 243 \\ b &= 5^0 \times \alpha + 5^2 \times \beta + 5^3 \times \alpha = 126\alpha + 25\beta \end{aligned} \text{ ولدينا:}$$

$$a \text{ و } b \text{ خلا ن للمعادلة (E) معناه: } 5a - 6b = 3 \text{ و منه } 5(90\alpha + 243) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$$

$$\text{أي: } 51\alpha + 25\beta = 202. \text{ وبما أن } 0 \leq a < 3 \text{ فان: } \alpha = \{0; 1; 2\} \text{ ينتج عنه: } \beta = \left\{ \frac{202}{25}; \frac{151}{25}; \frac{100}{25} \right\}$$

$$\text{اذن: } \alpha = 2 \text{ و } \beta = \frac{100}{25} = 4.$$

1. شركة اعلانات تريد طباعة الشعار المرسوم بالأسفل على أقمصة عملائها:



الشعار المرفق مشكل من تمثيلين بيانيين (C_f) و (C_g) في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (و وحدة الرسم $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$) لدالتين f و g معرفتين على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ و } g(x) = -e^{-x} \cos x$$

1. بين أن من اجل كل x من \mathbb{R} ، $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$

2. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3. تحقق أنه من اجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$ (الدالة المشتقة للدالة f).

4. أ. عين اشارة $f'(x)$ على المجال $[-\pi; \pi]$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-\pi; \pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x} \text{ كما يلي: لتكن الدالة } H \text{ المعرفة على } \mathbb{R}$$

1. بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة $e^{-x}(\sin x + 1)$ على \mathbb{R} .

2. أحسب مساحة (مساحة الشعار) الجيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x = \frac{3\pi}{2} \text{ و } x = \frac{-\pi}{2}$$

1. لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$ و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

BAC- Mauritanie-2012

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 1)]$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2. أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدو تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3 < \alpha < -1,2$ و $0,2 < \beta < 0,3$.

4. أرسم المنحنى (C_f) .

II. نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n = e^{-2n-1}$ و $v_n = 3n - 1$.

1. بين أن المتتالية (u_n) هندسية و أن المتتالية (v_n) حسابية.

2. أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

التمرين ③

3. المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ علل اجابتك.

4. احسب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة : $2014\alpha = 475\beta + m$ حولا في \mathbb{Z}^2 .

خاص بالتقني رياضي و الرياضي

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $2014x - 475y = -19$(1).

1. عين الحل الخاص للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0 - 4x_0 = 1$.

2. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1).

3. بين ان العددين x و y أوليان فيما بينهما باعتبار الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حل للمعادلة (1).

4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث $n \equiv 4[25]$ و باقي قسمة n على العدد 106 هو 17.

5. عين كل الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $x + y$ مضاعفا للعدد 10.

ترجمة و تصرف: التمرين 1 الأستاذ شعبان أسامة

التمرين 2: الأستاذ بخاشة خالد

التصحيح النموذجي المقترح

✓ التمرين ①:

لدينا: $f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$ و $g(x) = -e^{-x}\cos x$.

1. من اجل كل x من \mathbb{R} ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ و $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه:

$$-\cos x + \sin x + 1 \geq -1 - 1 + 1$$

$$-\cos x + \sin x + 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \geq -e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x} \leq e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \dots\dots\dots(1)$$

و عليه:

$$-\cos x + \sin x + 1 \leq 1 + 1 + 1$$

$$-\cos x + \sin x + 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \leq 3e^{-x} \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن من اجل كل x من \mathbb{R} ، $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$

2. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\text{حسب خاصية حصر نهاية.} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} \\ 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3. الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x}(\sin x + \cos x) \\ &= e^{-x}(\cos x - \sin x - 1 + \sin x + \cos x) \end{aligned}$$

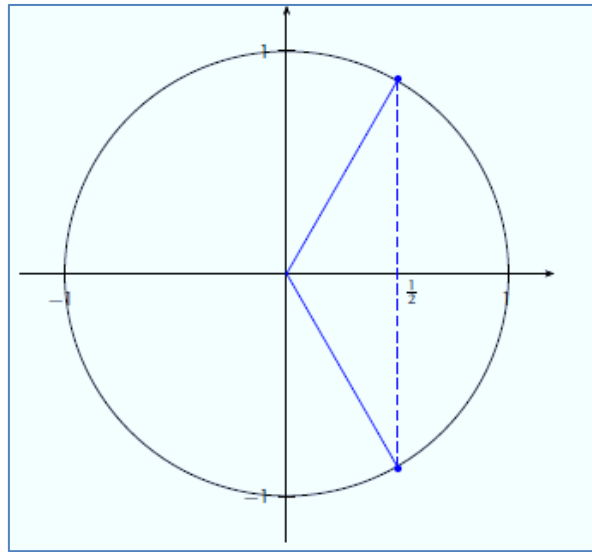
وبالتالي: من اجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$.

4.أ-تعيين اشارة $f'(x)$ على المجال $[-\pi; \pi]$.

لدينا من اجل كل x من $[-\pi; \pi]$ $e^{-x} > 0$ وبالتالي: اشارة $f'(x)$ من اشارة $2\cos x - 1$

$$. \quad 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ و عليه}$$

نستعين بالدائرة المثلثية ونجد:



$$. \quad \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \text{ و } f'(x) > 0 \text{ على المجال } \left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right] \text{ على المجال } f'(x) < 0$$

ب- اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-\pi; \pi]$:

$$\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right] \text{ و متناقصة على } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \text{ متزايدة تماما على المجال}$$

جدول تغيرات f :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$						

$2e^{\pi}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$

$2e^{-\pi}$

5. الوضع النسبي للمنحنين (C_g) و (C_f) :

نقوم بدراسة إشارة فرق العبارة: $f(x) - y$ نجد:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1 + \cos x) \\ &= e^{-x} (\sin x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) = 0 &\Rightarrow e^{-x} (\sin x + 1) = 0 \quad \text{و عليه} \\ &\Rightarrow \sin x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \sin x = -1 \\ &\Rightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

وبالتالي من أجل $x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ المنحنين (C_g) و (C_f) يتقاطعان في النقطة $A\left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi; 0\right)$ لأن $g\left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$.

من أجل $x \neq \frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ المنحنى (C_f) يقع فوق (C_g) .

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) e^{-x} \quad \text{كما يلي:}$$

1. الدالة H قابلة للاشتقاق \mathbb{R} حيث:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}\right) e^{-x} - \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) e^{-x} \\ &= \left(\frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} + 1\right) e^{-x} \quad \text{أي:} \\ &= \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin x}{2} + 1\right) e^{-x} \\ &= (\sin x + 1) e^{-x} \end{aligned}$$

وبالتالي: الدالة H دالة أصلية للدالة $e^{-x} (\sin x + 1)$ على \mathbb{R} .

2. حساب مساحة الحيز (الشعار):

لدينا على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ المنحنى (C_f) يقع فوق (C_g) وبالتالي:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1) e^{-x} dx (4cm^2) = [H(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \times 4cm^2$$

$$= \left(H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \times 4cm^2 \quad \text{و عليه:}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2} - 1 \right) e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) e^{\frac{\pi}{2}} \right) \times 4cm^2$$

$$= 2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right) cm^2$$

اذن مساحة الشعارهي: $A = 2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right) cm^2$ أي ما يقارب $9,6cm^2$.

✓ التمرين ②:

التكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$ و تمثيلها البياني في معلم متعامد زمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.أ-حساب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} \left(1 + \frac{3x}{e^{-2x-1}} - \frac{1}{e^{-2x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} (1 + 3xe^{2x+1} - e^{2x+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{2x+1}) = 0 \quad \text{أن:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x-1} + 3x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x-1}}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{2x+1}} + 3 + \frac{1}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ومنه

ب-لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-2x-1} + 3x - 1 - (3x - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 1)] = 0$$

التفسير: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y = 3x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث: $f'(x) = -2e^{-2x-1} + 3$

ومنه $f'(x) = 0$ تكافئ

$$-2e^{-2x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x-1} = \frac{3}{2}$$

$$-2x - 1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$x = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$	$+\infty$
$-2e^{-2x-1} + 3$	-	0	+

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right)$	$+\infty$

$$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) - 1} + 3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) - 1$$

$$= \frac{3}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) - 1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$$

$$\simeq -1,6$$

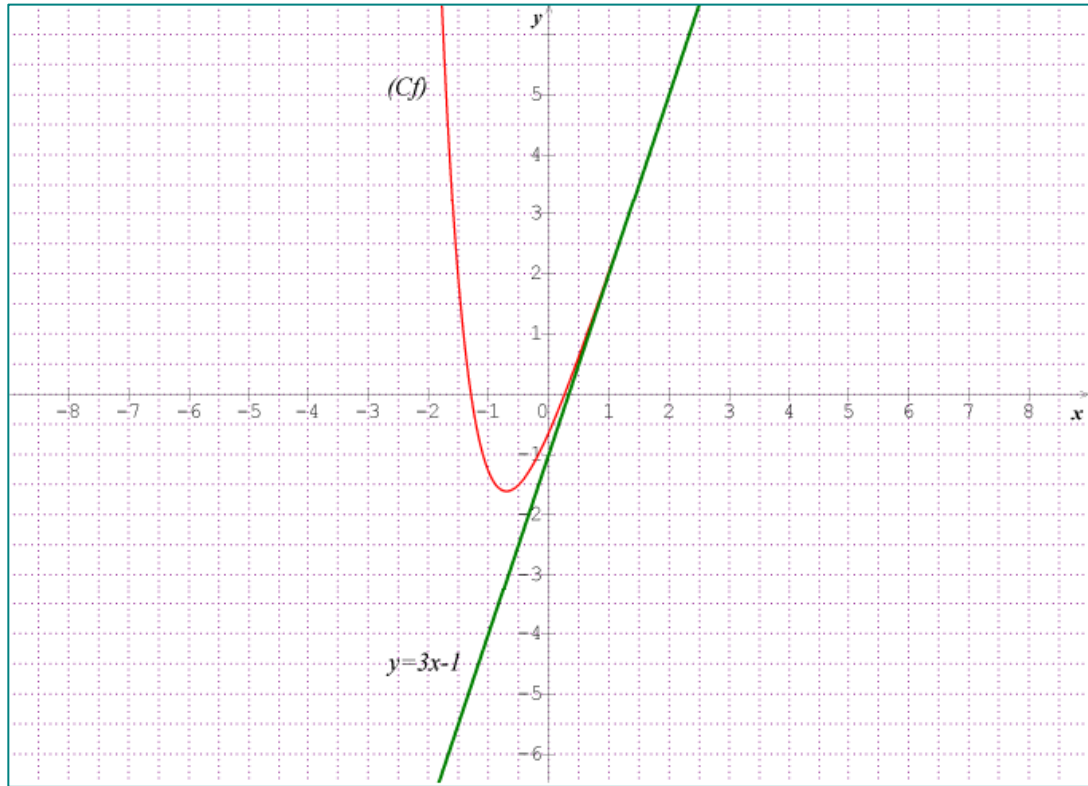
لدينا:

3. الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right]$ و $f(-1,3) \times f(-1,2) < 0$

ولدينا كذلك الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right); +\infty\right]$ ولدينا: $f(0,2) \times f(0,3) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3 < \alpha < -1,2$ $0,2 < \beta < 0,3$.

4. رسم المنحنى (C_f) :



II. نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n = e^{-2n-1}$ و $v_n = 3n - 1$.

1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-2(n+1)-1}}{e^{-2n-1}} = e^{-2(n+1)-1+2n+1} = e^{-2} \text{ لدينا:}$$

ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول $u_0 = e^{-1}$.

ولدينا: $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3$ ومنه نجد أن المتتالية (v_n) حسابية

أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = -1$.

2. الاتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

بما أن $r = 3 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متتالية متزايدة.

بما أن الأساس $-1 < e^{-2} < 1$ والحد الأول $e^{-1} > 0$ فإن (u_n) متتالية متزايدة.

3.

لدينا: (v_n) متتالية متزايدة و (u_n) متتالية متزايدة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 - e^{-2n-1} = +\infty$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = +\infty$$

اذن المتتاليتين (v_n) و (u_n) ليس بمتتاليتين متجاورتان .

4. حساب المجموع S_n بدلالة n :

بحيث : $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ يكفي ان نلاحظ أن $f(n) = u_n + v_n$

$$\begin{aligned} S_n &= f(0) + f(1) + \dots + f(n) \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_n + v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= e^{-1} \left(\frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}} \right) + (n+1) \left(\frac{-1 - 1 + 3n}{2} \right) \quad \text{و بالتالي:} \\ &= \left(\frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)}) + (n+1) \left(\frac{-2 + 3n}{2} \right) \end{aligned}$$

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)}) + (n+1) \left(\frac{-2 + 3n}{2} \right) = +\infty$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)}) + (n+1) \left(\frac{-2 + 3n}{2} \right)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)})}{n^2} + \frac{(n+1) \left(\frac{-2 + 3n}{2} \right)}{n^2} \quad \text{اذن:} \\ &\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)})}{n^2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \left(\frac{-2 + 3n}{2} \right)}{n^2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

✓ التمرين ③:

1. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha = 475\beta + m$ حلوًا في \mathbb{Z}^2 :

لدينا: $2014\alpha = 475\beta + m$ تكافئ $2014\alpha - 475\beta = m$ و $PGCD(2014; 475)$ عليه $2014\alpha = 475\beta + m$ تقبل حلوًا في \mathbb{Z}^2 معناه $19(106\alpha - 25\beta) = m$ و منه: $19/m$ حيث $m = 19k$ مع $k \in \mathbb{R}$.

II. نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $2014x - 475y = -19$ (1).

1. الحل الخاص للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0 - 4x_0 = 1$

المعادلة (1) تكافئ $19(106x - 25y) = -19$ أي : $106x - 25y = -1$ ولدينا : $y_0 - 4x_0 = 1$

بالتعويض نجد : $106x_0 - 25(4x_0 + 1) = -1$ فبالتالي : $x_0 = 4$ و $y_0 = 17$ معناه : $(x_0; y_0) = (4; 17)$.

2. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) :

المعادلتان $2014x - 475y = -19$ و $106x - 25y = -1$ متكافئتان لهما نفس مجموعة الحلول

نقوم بحل المعادلة : $106x - 25y = -1$

وبما أن الثنائية $(x_0; y_0) = (4; 17)$ حل للمعادلة $106x - 25y = -1$ فإن : $106(4) - 25(17) = -1$.

ومنه نجد : $106(x - 4) = 25(y - 17)$ أي $106x - 25y = 106(4) - 25(17)$

لدينا : $25/106(x - 4)$ و 25 و 106 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص $25/(x - 4)$ إذن $x = 25k + 4$.

بالتعويض نجد : $y = 106k + 17$ و بالتالي : $(x; y) = (25k + 4; 106k + 17)$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.

3. لدينا : d قاسم مشترك للعددين x و y أي : d/x و d/y و بالتالي : $d/106x$ و $d/25y$

وعليه $d/106x - 25y$ أي : $d/-1$ ولدينا : $d \in \mathbb{N}$ ينتج عنه $d = 1$ فبالتالي : $PGCD(x; y) = 1$.

أي أن العددين x و y أوليان فيما بينهما .

4. تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث $n \equiv 4[25]$ و باقي قسمة n على العدد 106 هو 17 :

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} n \equiv 4[25] \\ n \equiv 17[106] \end{cases}$ أي $\begin{cases} n = 25\alpha + 4 \\ n = 106\beta + 17 \end{cases}$ و بالتالي : $25\alpha + 4 = 106\beta + 17$.

لدينا الثنائية $(x_0; y_0) = (4; 17)$ حل للمعادلة $106x - 25y = -1$ ومنه الثنائية $(4 \times 13; 17 \times 13)$ حل خاص للمعادلة :

$106x - 25y = -13$ (2) بنفس الكيفية نحل المعادلة (2) نجد : $p \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \beta = 25p + 52 \\ \alpha = 106p + 221 \end{cases}$

وعليه : $n = 106\beta + 17$ بالتعويض نجد $n = 106(25p + 52) + 17$ أي $n = 2650p + 5529$ حيث $p \in \mathbb{N}$

5. تعين كل الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة (1) :

لدينا : $x + y = 25k + 4 + 106k + 17 = 131k + 21$ و العدد $x + y$ مضاعفا للعدد 10 يعني : $x + y \equiv 0[10]$

أي : $131k + 21 \equiv 0[10]$ أي $k + 1 \equiv 0[10]$ أي $k \equiv -1[10]$ ومنه $k \equiv 9[10]$ و عليه $k = 10k' + 9$.

و بالتالي : $(x; y) = (250k' + 229; 1060k' + 971)$ مع $k' \in \mathbb{Z}$.

التدريب

①

الدوال العددية

1. الدالة f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ على المجال $]-\infty; -1[$.

أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty; -1[$.

2. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} : D_f$$

3. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تعيينهما.

4. أثبت أن المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-4; -3]$ ، ماذا تستنتج بيانياً؟

5. أنشئ (D_1) ، (D_2) و (C_f) .

II. في معلم آخر متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

لتكن النقط $A(-1; 2)$ ، $M(x; 0)$ مع $x < -1$ و N نقطة تقاطع (AM) و (yy') .

1. أوجد إحداثيات N بدلالة x .

2. احسب مساحة المثلث OMN بدلالة x .

3. استنتج قيمة للعدد x حتى تكون مساحة OMN أصغرها يمكن 4. احسب عندئذ هذه المساحة.

التدريب

②

الدالة النسبية

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1. عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و

العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2. نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع

(C_f) مع حامل محور الفواصل.

4. أرسم (T) و (C_f) .

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة

أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

6. أحسب بوحدة المساحات، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$

7. m وسيط حقيقي؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -x - \ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$ ثم تحقق أن : $0.56 < \alpha < 0.57$.

3. إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$.

II. نسعي (\mathcal{C}_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. (أ) بين أن : $f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(ب) (γ) هو المنحني الممثل للدالة \ln في المعلم السابق . أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، فسّر النتيجة بيانيا ثم أدرس

الوضع النسبي للمنحني (\mathcal{C}_f) بالنسبة إلى (γ) .

(ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (\mathcal{C}_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(د) أحسب $f(2)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (T) ، (γ) و (\mathcal{C}_f) .

4. A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (\mathcal{C}_f) والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = \alpha$ و $x = e$.

أحسب بـ cm^2 المساحة A وبدلالة α ثم تحقق أن : $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ ثم عيّن حصراً للمساحة A .

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < 2$.

2. أدرس رتبة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n .

(ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .

4. (أ) بين أن : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين متشابهة لانفرق بينهما باللمس .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق . نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

(1) بين أن : احتمال الحدث A $P(A) = \frac{1}{2}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدث B.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

- (أ) عين قيم المتغير العشوائي X .
 (ب) بين أن: $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$.
 (ج) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين

⑥

م. تقاضيلية

1. حل المعادلة التفاضلية $9y'' + 4y = 0$.
 2. عين الحل الخاص F لهذه المعادلة الذي يحقق ما يلي:
 المنحني الممثل للدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$ و يقبل في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$.
 3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $F(x) = 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.
 4. حل المعادلة $F(x) = 0$ ن ثم علّم صور حلولها على الدائرة المثلثية.

التمرين

⑦

التعداد المركبة

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.
 2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط A, B, C, D و E التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 2 - 2i$, $z_B = 4$, $z_C = \overline{z_A}$, $z_D = -z_A$ و $z_E = -6 - 2i$.
 (أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S .
 (ب) تحقق أن النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$.
 (ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z + 4| = 8$.
 تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة .
 (د) تحقق أن $S(D) = E$ ، ثم بين أن الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S .

التصحيح النموذجي الهفتر

✓ التمرين ①:

1. الدالة f معرفة ب: $f(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ على المجال $]-\infty; -1[$.

1. دراسة تغيرات الدالة f

* النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty$$

*المشتقة: f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty; -1[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x+1) + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$$

من إشارة $-x^2 - 2x$ وبالتالي:

$-x^2 - 2x = 0$ يعني: $x = -2$ أو $x = 0$ (حل مرفوض).

x	$-\infty$	-2	-1
$f'(x)$	--	0	+

*جدوال تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	-1
$f'(x)$	--	0	+
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

2. تعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

طريقة 1: توحيد المقامات: من أجل كل x من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$f(x) = \frac{ax(x+1) + (x+1) + c}{x+1}$$

أي:

$$= \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{و منه:} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد:

وبالتالي:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{اذن} \quad f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

3. المستقيمات المقاربة:

بما أن: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty$ فإن: (D_1) مستقيم مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $x = -1$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$

اذن (D_2) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -x+1$.

4. أثبت أن المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-4; -3]$.

f مستمرة ورتيبة تماما على $[-4; -3]$.

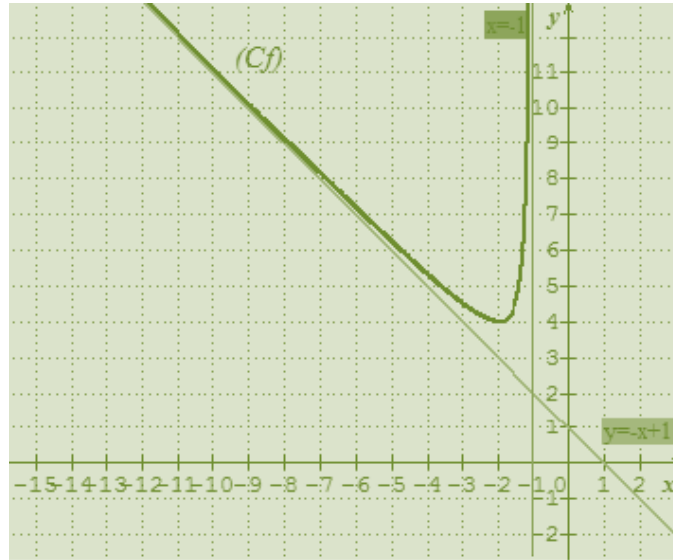
لدينا: $f(-4) = 5,33$ و $f(-3) = 4,5$ $f(-3) < 5 < f(-4)$.

اذن يوجد عنصر α على المجال $[-4; -3]$ حيث $f(\alpha) = 5$.

نستنتج أن يقطع المستقيم الذي معادلته: $y = 5$ في النقطة ذات الفاصلة: $x = \alpha$.

أي: $(C_f) \cap (\Delta) = \begin{cases} C(\alpha; 5) \\ (\Delta): y = 5 \end{cases}$

5. انشاء (D_1) ، (D_2) و (C_f)



(II).

لدينا النقط $A(-1; 2)$ ، $M(x; 0)$ مع $x < -1$ و N نقطة تقاطع (AM) و (yy') .

1. ايجاد احداثيات النقطة N بدلالة x :

$N \in (yy')$ اذن $N(0; y_N)$.

النقط M ، A و N على استقامة واحدة اذن $\vec{AM} // \vec{AN}$.

تذكير: ليكن \vec{v}, \vec{u} شعاعان من المستوي حيث:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ :والتالي: } \begin{cases} \frac{x'}{x} = k \\ \frac{y'}{y} = k \end{cases} \text{ معناه: } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \text{ أي: عدد حقيقي. حيث } \vec{u} = k\vec{v} \text{ تكافئ } \vec{u} // \vec{v} \text{ و } \vec{u} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{معناه } x'y - xy' = 0$$

$$\text{لدينا: } \vec{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AN} \begin{pmatrix} 1 \\ y_N - 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} // \vec{AN} \text{ تكافئ } y_N - 2 = \frac{-2}{x+1} \text{ ومنه: } y_N = \frac{-2}{x+1} + 2 \text{ اذن } y_N = \frac{2x}{x+1} \text{ و بالتالي: } N \left(0; \frac{2x}{x+1} \right)$$

2. حساب مساحة المثلث OMN بدلالة x .

$$S_{OMN} = \frac{OM \times ON}{2} \text{ حيث } \vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{ON} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2x}{x+1} \end{pmatrix}$$

نحسب الأطوال OM, ON بدلالة x .

$$ON = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2x}{x+1} \right)^2} = \left| \frac{2x}{x+1} \right| \text{ وهذا يعني:}$$

$$\frac{2x}{x+1} < 0 \text{ اذن } x+1 < 0 \text{ و } 2x < 0 \text{ فان: } x < -1 \text{ بما أن}$$

$$\text{ومنه: } ON = \frac{2x}{x+1}$$

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و بالتالي: } OM = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{بما أن } x < -1 \text{ فان: } OM = -x$$

$$\text{ومنه: } S_{OMN} = \frac{OM \times ON}{2} = \frac{-x \left(\frac{2x}{x+1} \right)}{2} = \frac{-x^2}{x+1}$$

3. استنتاج قيمة x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن.

نلاحظ أن تكون مساحة OMN هي الدالة f وبالتالي قيمة x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن هي القيمة الحدية الصغرى للدالة f وتساوي 4 من أجل $x = -2$ (حسب جدول تغيرات الدالة f).

4. حساب المساحة S_{OMN}

$$\text{من أجل } x = -2 \text{ نجد: } S_{OMN} = 4$$

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a : b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a : b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0 .$$

$$f(0) = -3 \text{ وهذا يعني } c = -3$$

$$\text{ولدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ ; ومنه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ ومنه } a = 1$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t \text{ نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 ومنه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$ وشكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

3- كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$$f(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - 3 = 0 \text{ أي أن } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3} \text{ نقطتي التقاطع هما } B(\sqrt{3}; 0) \text{ و } C(-\sqrt{3}; 0)$$

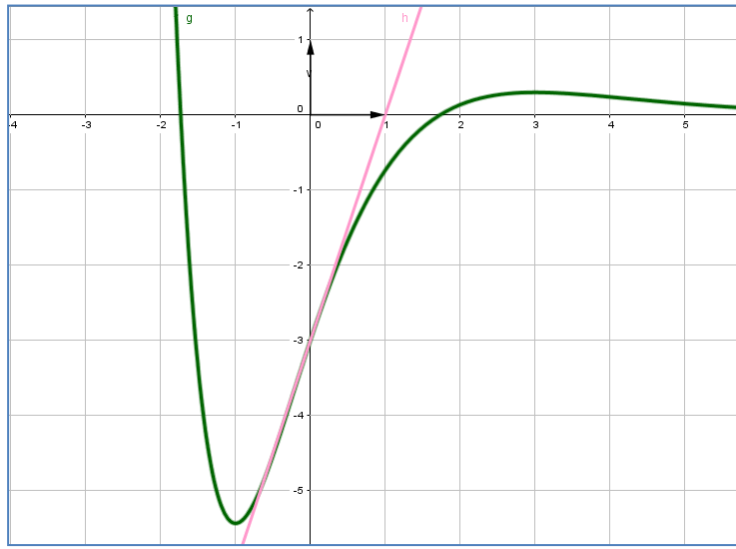
4- رسم (T) و (C_f)

5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي أن } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$



$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

حيث $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$ أي $F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ أي $F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ ومنه $F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$x = 3$ و $x = 1$ هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$$

7- وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ المناقشة

لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3 > -m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة والآخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم والآخر سالب .

لما $-3 > -m > 0$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما $0 < -m < \frac{6}{e^3}$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان وحل سالب .

ما $\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما $-\frac{6}{e^3} > -m$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

✓ التمرين ③:

I. لدينا $g(x) = -x - \ln x$ و $D_g =]0; +\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x - \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

- حساب المشتقة :

$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} = -\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

- دراسة إشارة المشتقة :

$$\text{من أجل } x \in]0; +\infty[\text{ لدينا : } -\left(\frac{x+1}{x}\right) < 0$$

ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

$x \in$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ وصورة المجال $]0; +\infty[$ بالدالة g هو المجال $]-\infty; +\infty[$ و 0 موجود في المجال $]-\infty; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$.

التحقق أن $0.56 < \alpha < 0.57$:

لدينا : $g(0.56) = -0.56 - \ln 0.56 = 0.02$
 $g(0.57) = -0.57 - \ln 0.57 = -0.01$
 أي $g(0.56) \times g(0.57) < 0$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0.56 < \alpha < 0.57$

(3) إستنتاج إشارة $g(x)$:

$x \in$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

II. لدينا : $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$ معرفة على $D_f =]0; +\infty[$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [-1 + (x-1)\ln x] = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} + \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \ln x \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \ln x = +\infty \text{ لأن}$$

$$(2) \text{ تبيان أن } f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2} :$$

لدينا :

$$f'(x) = \frac{\left[\ln x + (x-1) \times \frac{1}{x} \right] \times x - (-1 + (x-1)\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \ln x + x - 1 + 1 - x \ln x + \ln x}{x^2}$$

$$\text{ومنه } f'(x) = \frac{x + \ln x}{x^2} \text{ أي } f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

$x \in$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$f(\alpha)$	

(3) أ) تبين أن $f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$:

$$f(\alpha) = \frac{-1 + (\alpha - 1)\ln \alpha}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{(\alpha - 1)\ln \alpha}{\alpha} \quad \text{لدينا :}$$

$$\ln \alpha = -\alpha \quad \text{أي} \quad -\alpha - \ln \alpha = 0 \quad \text{ولدينا :} \quad g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{(\alpha - 1)(-\alpha)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + (\alpha - 1)(-1) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \quad \text{أي}$$

حصر $f(\alpha)$:

$$1.75 < \frac{1}{\alpha} < 1.78 \quad \text{أي} \quad \frac{1}{0.57} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.56} \quad \text{ومنه} \quad 0.56 < \alpha < 0.57$$

$$-0.57 < -\alpha < -0.56 \quad \text{و} \quad -1.78 < -\frac{1}{\alpha} < -1.75 \quad \text{ومنه}$$

$$1 - 0.57 - 1.78 < 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} < 1 - 0.56 - 1.75 \quad \text{إذن} \quad \text{ومنه}$$

$$-1.35 < f(\alpha) < -1.31 \quad \text{وبالتالي} \quad 1 - 0.57 - 1.78 < 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} < 1 - 0.56 - 1.75$$

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$:

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1 + (x - 1)\ln x}{x} - \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + x \ln x - \ln x - x \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \quad \text{أي}$$

التفسير الهندسي :

المنحني (γ) منحنى مقارب للمنحني (\mathcal{C}_f) بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحني (\mathcal{C}_f) بالنسبة إلى (γ) :

$$f(x) - \ln x = \frac{-1 - \ln x}{x} \quad \text{ندرس إشارة الفرق}$$

$x \in$	0	α	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	+	0	-
الوضع النسبي	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> (γ) فوق (C_f) </div> <div style="text-align: center;"> (γ) يقطع (C_f) </div> <div style="text-align: center;"> (γ) تحت (C_f) </div> </div>		

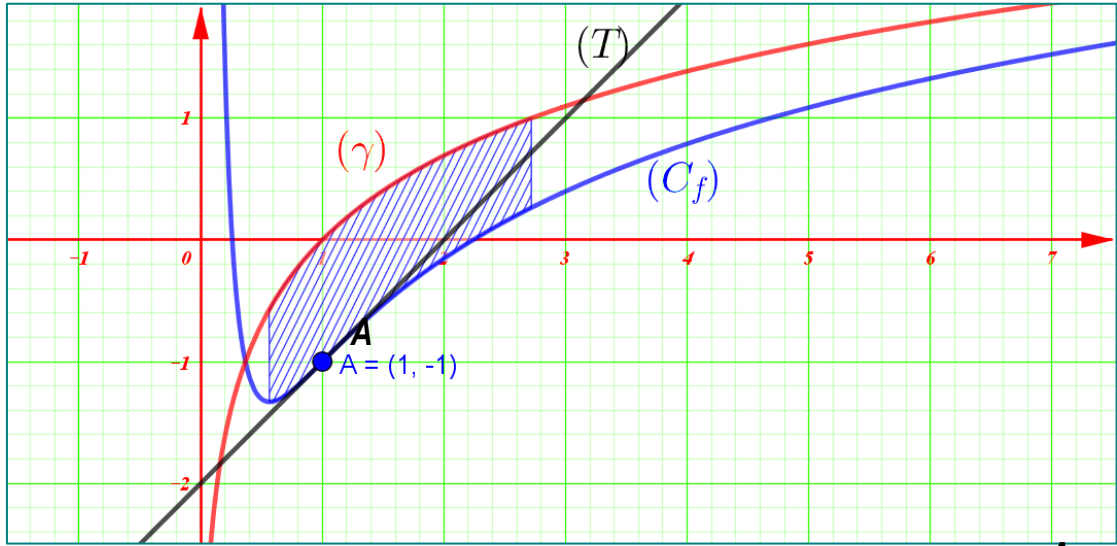
ج) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$(T): y = 1 \times (x-1) - 1 = x-2 \quad (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = x-2 \quad \text{إذن}$$

د) حساب $f(2)$ ، $f(e)$ والرسم :

$$f(e) = 0.26 \quad , \quad f(2) = -0.15$$



(5) حساب المساحة A :

$$A = \int_{\alpha}^e [\ln x - f(x)] dx = \int_{\alpha}^e \left[\ln x - \frac{-1 + x \ln x - \ln x}{x} \right] dx = \int_{\alpha}^e \left[\frac{x \ln x + 1 - x \ln x + \ln x}{x} \right] dx$$

$$A = \int_{\alpha}^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^e \quad \text{أي}$$

ومنه :

$$A = \int_{\alpha}^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln e + \frac{1}{2} (\ln e)^2 \right] - \left[\ln \alpha + \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \right] = \left(\frac{3}{2} - \ln \alpha - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \right) us$$

$$A = \frac{1}{2} (3 - 2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2) cm^2 \quad \text{وبالتالي}$$

$$A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2} \quad \text{التحقق أن:}$$

$$\ln \alpha = -\alpha \quad \text{و} \quad A = \frac{3 - 2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2}{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$A = \frac{3 - 2(-\alpha) - (-\alpha)^2}{2} = \frac{3 + 2\alpha - \alpha^2}{2} = \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$A = \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

تعيين حصر لـ A :

$$\text{لدينا: } 0.56 < \alpha < 0.57 \quad \text{ومنه } 1.56 < 1 + \alpha < 1.57$$

$$\text{و } -0.57 < -\alpha < -0.56 \quad \text{ومنه } 2.43 < 3 - \alpha < 2.44$$

$$\text{إذن } \frac{1.56 \times 2.43}{2} < \frac{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}{2} < \frac{1.57 \times 2.44}{2}$$

$$\text{وبالتالي } 1.90 < A < 1.92$$

✓ التمرين ④:

$$\text{لدينا: } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $1 \leq u_n < 2$:
نسي $P(n)$ هذه الخاصية.

-1 من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \text{ و } 1 \leq 1 < 2 \text{ ومنه } 1 \leq u_0 < 2 \text{ أي } P(n) \text{ صحيحة من أجل } n = 0.$$

-2 نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$.

لدينا: $1 \leq u_n < 2$ فرضاً.

$$\text{ومنه: } 3 \leq u_n + 2 < 4$$

$$\text{إذن: } \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{3} \quad \text{ومنه } -\frac{8}{3} \leq -\frac{8}{u_n + 2} < -\frac{8}{4}$$

$$\text{وبالتالي: } 4 - \frac{8}{3} \leq 4 - \frac{8}{u_n + 2} < 4 - \frac{8}{4} \quad \text{لأن: } u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2} = 4 - \frac{8}{u_n + 2}$$

$$\text{إذن: } 4 - \frac{8}{3} \leq 4 - \frac{8}{u_n + 2} < 4 - \frac{8}{4}$$

$$\text{أي } \frac{4}{3} \leq u_{n+1} < 2 \quad \text{وبالتالي } 1 \leq u_{n+1} < 2 \text{ ومنه } P(n+1) \text{ صحيحة.}$$

-3 حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) دراسة رتبة المتتالية (u_n) :

$$\text{ندرس إشارة الفرق: } u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$\text{أي } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{u_n(2 - u_n)}{u_n + 2}$$

جدول إشارة الفرق:

$u_n \in$	1	2
u_n		+
$2 - u_n$		+
$u_n + 2$		+
$u_{n+1} - u_n$		+

وبالتالي : $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

دراسة تقارب المتتالية (u_n) :

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

$$(3) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$$

أ) تبيان أنَّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية يعني } v_{n+1} = v_n \times q$$

$$\text{لدينا: } v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{4u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{2(u_n + 2)}{4u_n} = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n}$$

$$\text{ومنه : } v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

$$\text{أي } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$$

التعبير عن v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

ب) إستنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \text{ ومنه } \frac{2}{u_n} = 1 - v_n$$

$$\text{أي } u_n = \frac{2}{1 - v_n} \text{ وبالتالي : } u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n} = 2$$

ج) حساب S_n بدلالة n :

$$\text{لدينا : } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \text{ ولدينا : } \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} (1 - v_n)$$

$$\text{ومنه : } S_n = \frac{1}{2} (1 - v_0) + \frac{1}{2} (1 - v_1) + \dots + \frac{1}{2} (1 - v_n) = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$\text{أي } S_n = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} \left(v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} \times \left(-1 \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{أي} \quad S_n = \frac{1}{2}(n+1) + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4) تبين أن: $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n}{u_n + 2} - 2 = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 2}$$

$$\text{ومنه } |u_{n+1} - 2| = \left| \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 2} \right| = 2 \times \left| \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \right| = \frac{2}{|u_n + 2|} \times |u_n - 2| = \frac{2}{u_n + 2} \times |u_n - 2|$$

لأن $3 \leq u_n + 2 < 4$

$$\text{ولدينا: } 1 \leq u_n < 2 \quad \text{ومنه } 3 \leq u_n + 2 < 4$$

$$\text{إذن } \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{وبالتالي: } |u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} \times |u_n - 2|$$

(ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا: $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$|u_1 - 2| \leq \frac{2}{3}|u_0 - 2|$$

$$|u_2 - 2| \leq \frac{2}{3}|u_1 - 2|$$

ومنه:

$$|u_n - 2| \leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - 2|$$

$$\text{أي } |u_1 - 2| \times |u_2 - 2| \times \dots \times |u_n - 2| \leq \frac{2}{3}|u_0 - 2| \times \frac{2}{3}|u_1 - 2| \times \dots \times \frac{2}{3}|u_{n-1} - 2|$$

بالإختزال نجد: $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

إستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\text{لدينا: } |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{ومنه } -\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{ولدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0 \quad \text{حسب مبرهنة الحصر.}$$

$$\text{إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

✓ التمرين ⑤:

لدينا: صندوق على خمس كرات بيضاء، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق.

$$(1) \text{ تبين أن: } P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

حساب $P(B)$:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_5^3 + C_5^2 \times C_5^2 + C_5^3 \times C_5^1 + C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5}{210}$$

$$P(B) = \frac{205}{210} = \text{أي}$$

(2) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X :

قيم X هي $\{0; 1; 2; 3\}$

ب) تبين أن: $P(X=0) = \frac{1}{6}$ و $P(X=2) = \frac{3}{10}$

$$\text{لدينا: } P(X=0) = \frac{C_3^0 \times C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{1 \times 35}{210} = \frac{1}{6} \text{ و } P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{3}{10}$$

ج) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X معرف بالجدول:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{لدينا: } P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{1}{2} \text{ و } P(X=3) = \frac{C_3^3 \times C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{1 \times 7}{210} = \frac{1}{30}$$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = 1.2$$

✓ التمرين ⑥:

1. حل المعادلة التفاضلية $9y'' + 4y = 0$.

أي: $y'' = -\frac{4}{9}y$ وبالتالي حلها هو من الشكل: $F(x) = c_1 \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$.

2. عين الحل الخاص F لهذه المعادلة الذي يحقق ما يلي:

المنحني الممثل للدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$ يعني: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

ويقبل في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$. نستنتج: $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2}{3}$.

لدينا: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$ أي: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ومنه: $c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

لدينا: $F'(x) = \frac{-2}{3}c_1 \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}c_2 \cos\left(\frac{2}{3}x\right)$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2}{3}c_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{3}c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c_1\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + c_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2}{3} \quad \text{أي:} \quad \frac{-2}{3}c_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{3}c_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{3}$$

$$\begin{cases} c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \dots (*) \\ c_1(-\sqrt{3}) + c_2 = -2 \dots (**) \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ c_1\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + c_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

من المعادلة (**) لدينا: $c_2 = c_1(\sqrt{3}) - 2$ نعوضه في المعادلة (*) نجد: $c_1 = \sqrt{3}$ تكافئ $c_2 = 1$.

$$F(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $F(x) = 2 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ معناه نتأكد من أنها تحقق المعادلة التفاضلية.

$$F'(x) = \frac{-4}{3} \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{و} \quad F''(x) = \frac{-8}{9} \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

4. حل المعادلة $F(x) = 0$

$$2 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{أي:} \quad \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{إذا وفقط إذا كان:} \quad \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z} \quad \text{عدد صحيح نسبي}$$

$$\text{نحل المعادلة:} \quad \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{نستنتج أن:} \quad x = \pi\left(1 + \frac{3k\pi}{2}\right)$$

✓ **التبرين ⑦:**

1) الحل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$

$$(z-4)(z^2-4z+8)=0 \quad \text{تكافئ} \quad z-4=0 \quad \text{أو} \quad z^2-4z+8=0$$

$$z-4=0 \quad \text{يعني} \quad z=4$$

$$\text{حل المعادلة} \quad z^2-4z+8=0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما:

$$z_1 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$$z_2 = 2+2i$$

مجموعة حلول المعادلة: $S = \{4; 2-2i; 2+2i\}$

2) لدينا $z_A = 2-2i$, $z_B = 4$, $z_C = \overline{z_A}$, $z_D = -z_A$, و $z_E = -6-2i$

أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i} = \frac{4i}{2+2i} \times \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{8i+8}{8} = 1+i \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 + i \text{ أي}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه}$$

إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ،
يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S :

$$\text{لدينا : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } \frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \text{ و } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته

$$k = \sqrt{2} \text{ وزاويته } \theta = \frac{\pi}{4}$$

(ب) التحقق أن النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$:

لدينا : $1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$ موجود

$$\frac{z_A - 2z_B + 2z_C}{1 - 2 + 2} = \frac{2 - 2i - 8 + 4 + 4i}{1} = -2 + 2i = z_D \text{ لاحقته هي}$$

ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$

(ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z + 4| = 8$
التحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) :

$$A \in (\Gamma) \text{ يعني } |(1+i)z_A + 4| = 8$$

$$\text{لدينا : } |(1+i)z_A + 4| = |(1+i)(2-2i) + 4| = |4+4| = |8| = 8 \text{ ومنه } A \in (\Gamma)$$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة:

$$\text{لدينا : } |(1+i)z + 4| = 8 \text{ يكافئ } \left| (1+i) \left(z + \frac{4}{1+i} \right) \right| = 8$$

$$\text{أي } |1+i| \times \left| z + \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \right| = 8 \text{ ومنه } \sqrt{2} \times |z + 2 - 2i| = 8$$

$$\text{إذن } |z - (-2 + 2i)| = \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ وبالتالي } |z - z_D| = 4\sqrt{2}$$

أي $DM = 4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R = 4\sqrt{2}$

(د) التحقق أن $S(D) = E$:

$$\text{لدينا : } \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-6 - 2i - 2 + 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} = \frac{-8}{-4 + 4i} = \frac{-8(-4 - 4i)}{(-4 + 4i)(-4 - 4i)} = \frac{32(1+i)}{16+16}$$

$$\text{ومنه } \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وبالتالي : $S(D) = E$

تبيان أن الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S :

(Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD = R = 4\sqrt{2}$
 صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E = S(D)$ ونصف قطرها $R' = \sqrt{2}AD = AE$ لأن

$$\frac{AE}{AD} = \sqrt{2}$$

هذا العمل يبقى عمل بشري و احتمال السهو فيه وارد فرجاء اذا كان هناك استفسار تواصل معي على :

تجدون كل منشوراتي






5min Maths


chbnoussama@gmail.com

Google

يمكنكم زيارة الموقع الالكتروني للصفحة: www.5min Maths.com