

ÔN THI CAO HỌC

MÔN TOÁN KINH TẾ

(GV: Trần Ngọc Hội - 2008)

PHẦN I: QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

A - BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

§1. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QHTT

1.1 Ví dụ 1. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho một bánh mỗi loại; lượng dự trữ nguyên liệu; tiền lãi cho một bánh mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo	Lượng dự trữ
Đường	0,04kg	0,06 kg	0,05 kg	500 kg
Đậu	0,07kg	0 kg	0,02 kg	300 kg
Lãi	3 ngàn	2 ngàn	2,5 ngàn	

Hãy lập mô hình bài toán tìm số lượng mỗi loại bánh cần sản xuất sao cho không bị động về nguyên liệu mà lãi đạt được cao nhất.

Giải. Gọi x_1 , x_2 , x_3 lần lượt là số bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo cần sản xuất. Điều kiện: $x_j \geq 0$ ($j=1, 2, 3$). Khi đó

1) Tiền lãi thu được là: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3$ (ngàn).

2) Lượng đường được sử dụng là: $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3$ (kg)

Ta phải có $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500$.

3) Lượng đậu được sử dụng là: $0,07x_1 + 0,02x_3$ (kg)

Ta phải có $0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300$.

Vậy ta có mô hình bài toán:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 \text{ -----} \rightarrow \max$$

Với điều kiện:

$$(2) \quad \begin{cases} 0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500; \\ 0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

Ta nói đây là một bài toán qui hoạch tuyến tính 3 ẩn tìm max của hàm mục tiêu $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3$.

1.2 Ví dụ 2. Ta cần vận chuyển vật liệu xây dựng từ hai kho K_1 và K_2 đến ba công trường xây dựng C_1, C_2, C_3 . Tổng số vật liệu có ở mỗi kho, tổng số vật liệu yêu cầu ở mỗi công trường, cũng như khoảng cách từ mỗi kho đến mỗi công trường được cho trong bảng sau:

Cự ly CT	C1 15T	C2 25T	C3 20T
Kho			
K1: 20T	5km x_{11}	2km x_{12}	3km x_{13}
K2: 40T	4km x_{21}	3km x_{22}	1km x_{23}

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho:

- Các kho giải phóng hết hàng;
- Các công trường nhận đủ vật liệu cần thiết;
- Tổng số T(tấn)× km phải thực hiện là nhỏ nhất.

Giải. Gọi x_{ij} là số tấn vật liệu sẽ vận chuyển từ kho K_j đến công trường C_i . Điều kiện: $x_{ij} \geq 0$ ($i=1, 2; j=1, 2, 3$). Khi đó

1) Tổng số T× km phải thực hiện là:

$$f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23}.$$

2) Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển từ kho K_1 đến các công trường là $x_{11} + x_{12} + x_{13}$.

Để giải phóng hết vật liệu, ta phải có $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$.

3) Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển từ kho K_2 đến các công trường là $x_{21} + x_{22} + x_{23}$.

Để giải phóng hết vật liệu, ta phải có $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$.

4) Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển về công trường C_1 là $x_{11} + x_{21}$.
Để C_1 nhận đủ vật liệu, ta phải có $x_{11} + x_{21} = 15$.

5) Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển về công trường C_2 là $x_{12} + x_{22}$.
Để C_2 nhận đủ vật liệu, ta phải có $x_{12} + x_{22} = 25$.

6) Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển về công trường C_3 là $x_{13} + x_{23}$.
Để C_3 nhận đủ vật liệu, ta phải có $x_{13} + x_{23} = 20$.

Vậy ta có mô hình bài toán:

$$(1) \quad f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \rightarrow \min$$

Với điều kiện:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40; \\ x_{11} + x_{21} = 15; \\ x_{12} + x_{22} = 25; \\ x_{13} + x_{23} = 20. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3).$$

Ta nói đây là một bài toán qui hoạch tuyến tính 6 ẩn tìm min của hàm mục tiêu $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23}$.

§2. PHÂN LOẠI DẠNG BÀI TOÁN QHTT

2.1. Dạng tổng quát của bài toán QHTT

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & (i \in I_1); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & (i \in I_2); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & (i \in I_3). \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j \in J_1); \quad x_j \leq 0 \quad (j \in J_2); \quad x_j \text{ tùy ý } (j \in J_3);$$

trong đó

- $f(\mathbf{x})$ là hàm mục tiêu;
- I_1, I_2, I_3 rời nhau và $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$;
- J_1, J_2, J_3 rời nhau và $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\}$;
- $A = (a_{ij})_{m \times n}$: Ma trận hệ số ràng buộc;
- $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$: Véc tơ các hệ số tự do;
- $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$: Véc tơ hệ số các ẩn trong hàm mục tiêu;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: Véc tơ các ẩn số.

Khi đó

- Mỗi véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa (2) và (3) được gọi là một **phương án (PA)** của bài toán.
- Mỗi phương án $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa (1), nghĩa là tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) trên tập các phương án, được gọi là một **phương án tối ưu (PATU)** của bài toán.
- Giải một bài toán QHTT là đi tìm một PATU của nó hoặc chỉ ra rằng bài toán vô nghiệm, nghĩa là không có PATU.

2.2. Dạng chính tắc của bài toán QHTT

$$(1) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m});$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Nhận xét. Bài toán QHTT dạng chính tắc là bài toán dạng tổng quát, trong đó

- Các ràng buộc đều là phương trình.
- Các ẩn đều không âm.

Ví dụ: Bài toán sau có dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 12; \\ 12x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}).$$

2.3. Dạng chuẩn của bài toán QHTT

Bài toán QHTT dạng chuẩn là bài toán có dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m});$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

trong đó

- Các hệ số tự do b_1, b_2, \dots, b_m đều không âm.
- Trong ma trận hệ số ràng buộc $A = (a_{ij})_{m \times n}$ có đầy đủ m vectơ cột đơn vị e_1, e_2, \dots, e_m :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

- Các ẩn ứng với các vectơ cột đơn vị được gọi là các **ẩn cơ bản**. Cụ thể ẩn ứng với vectơ cột đơn vị e_k là **ẩn cơ bản thứ k** .
- Một phương án mà các ẩn không cơ bản đều bằng 0 được gọi là một **phương án cơ bản**.
- Một phương án cơ bản có đủ m thành phần dương (nghĩa là mọi ẩn cơ bản đều dương) được gọi là **không suy biến**. Ngược lại, một phương án cơ bản có ít hơn m thành phần dương (nghĩa là có ít nhất một ẩn cơ bản bằng 0) được gọi là **suy biến**.

Ví dụ. Xét bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 + 4x_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 12; \\ 12x_1 + x_3 + x_6 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 6}).$$

ta thấy bài toán trên đã có dạng chính tắc, hơn nữa,

- Các hệ số tự do $b_1 = 12, b_2 = 3, b_3 = 6$ đều không âm.

- Ma trận hệ số ràng buộc A là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

có chứa đầy đủ 3 vectơ cột đơn vị e_1 (cột 5), e_2 (cột 6), e_3 (cột 2).

Do đó bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_5 .
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_6 .
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_2 .

Nhận xét. Trong bài toán trên, khi cho ẩn cơ bản thứ k = hệ số tự do thứ k , còn các ẩn không cơ bản = 0, nghĩa là

$$x_5 = 12; x_6 = 3; x_2 = 6; x_1 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0;$$

ta được một phương án cơ bản của bài toán:

$$x = (0, 6, 0, 0, 12, 3).$$

Phương án này không suy biến vì có đủ 3 thành phần dương. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

Chú ý. Tổng quát, trong bài toán QHTT dạng chuẩn bất kỳ, khi cho ẩn cơ bản thứ k = hệ số tự do thứ k ($k = 1, 2, \dots, m$), còn các ẩn không cơ bản = 0, ta được một phương án cơ bản của bài toán. Ta gọi đây là **phương án cơ bản ban đầu** của bài toán.

§3. BIẾN ĐỔI DẠNG BÀI TOÁN QHTT

3.1. Dạng tổng quát \rightarrow Dạng chính tắc

Ta có thể biến đổi bài toán QHTT dạng tổng quát về dạng chính tắc như sau:

1. Khi gặp ràng buộc dạng

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

ta đưa vào **ẩn phụ** $x_{n+i} \geq 0$ để biến về phương trình

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

2. Khi gặp ràng buộc dạng

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

ta đưa vào **ẩn phụ** $x_{n+i} \geq 0$ để biến về phương trình

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

3. Khi gặp ẩn $x_j \leq 0$, ta đổi biến $x_j = -x_j'$ với $x_j' \geq 0$.

4. Khi gặp ẩn x_j tùy ý, ta đổi biến $x_j = x_j' - x_j''$ với $x_j' \geq 0; x_j'' \geq 0$.

Chú ý. Khi tìm được PATU của bài toán dạng chính tắc ta chỉ cần tính giá trị của các ẩn ban đầu và bỏ đi các ẩn phụ, thì sẽ được PATU của bài toán dạng tổng quát đã cho.

Ví dụ. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50; \\ 7x_1 + x_3 \geq 30; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25. \end{cases} \\ (3) \quad & x_1 \geq 0; x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Giải.

- Đưa vào ẩn phụ $x_4 \geq 0$ để biến bất phương trình

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50$$

về phương trình $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 50$.

- Đưa vào ẩn phụ $x_5 \geq 0$ để biến bất phương trình

$$7x_1 + x_3 \geq 30$$

về phương trình $7x_1 + x_3 - x_5 = 30$.

- Đổi biến $x_2 = -x_2'$ với $x_2' \geq 0$.

- Đổi biến $x_3 = x_3' - x_3''$ với $x_3' \geq 0; x_3'' \geq 0$.

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2' + 2,5(x_3' - x_3'') \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 + 6x'_2 + 5(x'_3 - x''_3) + x_4 = 50; \\ 7x_1 + (x'_3 - x''_3) - x_5 = 30; \\ 2x_1 - 3x'_2 - 5(x'_3 - x''_3) = -25. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x'_2 \geq 0; x'_3 \geq 0; x''_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0.$$

3.2. *Dạng chính tắc* \rightarrow *Dạng chuẩn*.

Từ bài toán QHTT dạng chính tắc ta có thể xây dựng bài toán QHTT mở rộng có dạng chuẩn như sau:

1. Khi gặp hệ số tự do $b_i < 0$ ta đổi dấu hai vế của ràng buộc thứ i .
2. Khi ma trận hệ số ràng buộc A không chứa vectơ cột đơn vị thứ k là e_k , ta đưa vào ẩn giả $x_{n+k} \geq 0$ và cộng thêm ẩn giả x_{n+k} vào vế trái của phương trình ràng buộc thứ k để được phương trình ràng buộc mới:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + x_{n+k} = b_k$$

3. Hàm mục tiêu mở rộng $\bar{f}(\bar{x})$ được xây dựng từ hàm mục tiêu $f(x)$ ban đầu như sau:

- Đối với bài toán min:

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) + M(\sum \text{ẩn giả})$$

- Đối với bài toán max:

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) - M(\sum \text{ẩn giả})$$

trong đó M là đại lượng dương rất lớn (lớn hơn bất kỳ số nào cho trước).

Ví dụ. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 4).$$

Giải. Bài toán trên đã có dạng chính tắc, trong đó vế phải của phương trình ràng buộc thứ ba là $-25 < 0$. Đổi dấu hai vế của phương trình này ta được:

$$-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25.$$

và (2) trở thành

$$(2') \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25. \end{cases}$$

Ma trận hệ số ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Vì A còn thiếu 2 vectơ cột đơn vị là e_1 và e_3 nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

- Lập các ẩn giả $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ và xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \longrightarrow \min \\ \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25. \end{cases} \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

Ví dụ. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \longrightarrow \max \\ (2) \quad & \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25. \end{cases} \\ (3) \quad & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 4).. \end{aligned}$$

ta xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - Mx_5 - Mx_6 \longrightarrow \max \\ \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25. \end{cases} \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

3.3. Chú ý.

- Ẩn phụ: *Dạng tổng quát* \rightarrow *Dạng chính tắc*
- Ẩn giả: *Dạng chính tắc* \rightarrow *Dạng chuẩn*.

- Ẩn giả được đưa vào một cách “giả tạo” cốt để ma trận hệ số ràng buộc có chứa đủ vectơ cột đơn vị, nó chỉ được cộng hình thức vào vế trái của phương trình ràng buộc và tạo nên một phương trình ràng buộc mới. Trong khi ẩn phụ biến một bất phương trình thành phương trình theo đúng logic toán học
- Trong hàm mục tiêu mở rộng, hệ số của các ẩn giả đều bằng M (đối với bài toán min) hoặc đều bằng $-M$ (đối với bài toán max). Trong khi hệ số của các ẩn phụ đều bằng 0 trong hàm mục tiêu.

Ví dụ. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \longrightarrow \min \\
 (2) \quad & \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 \leq 50; \\ -6x_3 + 2x_4 = -120; \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -45. \end{cases} \\
 (3) \quad & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 4)
 \end{aligned}$$

Giải. Trước hết ta đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào 2 ẩn phụ $x_5 \geq 0$; $x_6 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \longrightarrow \min \\
 (2) \quad & \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 + x_5 = 50; \\ -6x_3 + 2x_4 = -120; \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_6 = -45. \end{cases} \\
 (3) \quad & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6).
 \end{aligned}$$

Bài toán trên chưa có dạng chuẩn.

Ta thấy các vế phải của các phương trình ràng buộc thứ 2 và 3 đều âm nên bằng cách đổi dấu hai vế của các phương trình này ta được:

$$(2) \quad \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 + x_5 = 50; \\ 6x_3 - 2x_4 = 120; \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45. \end{cases}$$

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Vì A còn thiếu 1 vectơ cột đơn vị là e_2 nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

- Lập ẩn giả $x_7 \geq 0$ và xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_7 \text{ -----} \rightarrow \min \\ &\begin{cases} -9x_2 + 15x_3 + x_5 = 50; \\ 6x_3 - 2x_4 + x_7 = 120; \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45. \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 7).$$

3.3. Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng

Mối quan hệ giữa Bài toán xuất phát (A) và Bài toán mở rộng (B) như sau:

(B) Vô nghiệm \Rightarrow (A) vô nghiệm

(B) Có nghiệm $\begin{cases} \nearrow \text{Mọi ẩn giả} = 0 \Rightarrow \text{Bỏ các ẩn giả, được PATU của (A).} \\ \searrow \text{Có ít nhất một ẩn giả} > 0 \Rightarrow \text{(A) không có phương án nào nên vô nghiệm.} \end{cases}$

B- PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

§1. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN QHTT DẠNG CHUẨN

1.1. Thuật toán giải bài toán min:

Xét bài toán QHTT dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1; \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2; \\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m. \end{cases}$$

$$(3) \quad \mathbf{x}_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Qua một số hữu hạn các bước sau đây ta sẽ giải được bài toán QHTT trên, nghĩa là chứng tỏ được rằng bài toán vô nghiệm hoặc chỉ ra được một phương án tối ưu của bài toán.

Bước 1: Lập bảng đơn hình đầu tiên:

Xác định các ẩn cơ bản 1, 2,..., m lần lượt là $x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_m}$ và lập bảng đơn hình đầu tiên:

Hệ số	Ảnh cơ bản	Phương án	\mathbf{c}_1	\mathbf{c}_v	\mathbf{c}_n	λ_i
			\mathbf{x}_1	\mathbf{x}_v	\mathbf{x}_n	
\mathbf{c}_{i_1}	\mathbf{x}_{i_1}	\mathbf{b}_1	\mathbf{a}_{11}	\mathbf{a}_{1v}	\mathbf{a}_{1n}	λ_r^*
.....	
\mathbf{c}_{i_r}	\mathbf{x}_{i_r}	\mathbf{b}_r	\mathbf{a}_{r1}	\mathbf{a}_{rv}	\mathbf{a}_{rn}	
.....	
\mathbf{c}_{i_m}	\mathbf{x}_{i_m}	\mathbf{b}_m	\mathbf{a}_{m1}	\mathbf{a}_{mv}	\mathbf{a}_{mn}	
	$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	\mathbf{f}_0	Δ_1	Δ_v^*	Δ_n	

trong đó

$$f_0 = c_{i_1} b_1 + c_{i_2} b_2 + \dots + c_{i_m} b_m$$

$$[= (\text{cột Hệ số})(\text{cột Phương án})]$$

$$\Delta_j = c_{i_1} a_{1j} + c_{i_2} a_{2j} + \dots + c_{i_m} a_{mj} - c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$[= (\text{cột Hệ số}) (\text{cột } x_j) - c_j]$$

Bước 2: Nhận định tính tối ưu.

- 1) Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = 1, \dots, n$, thì phương án cơ bản ban đầu x^0 (x^0 có thành phần thứ i_k là $x_{i_k}^0 = b_k$, còn các thành phần khác bằng 0) là một phương án tối ưu của bài toán min đang xét với $f(x^0) = f_0$.
- 2) Nếu tồn tại $\Delta_v > 0$ sao cho $a_{iv} \leq 0$ với mọi $i = 1, \dots, m$, thì bài toán min đang xét vô nghiệm, nghĩa là không có phương án tối ưu nào.
- 3) Nếu hai trường hợp trên đều không xảy ra, nghĩa là tồn tại $\Delta_v > 0$, và với mọi j mà $\Delta_j > 0$ đều tồn tại i sao cho $a_{ij} > 0$, thì sang bước 3.

Bước 3: Tìm ẩn đưa vào hệ ẩn cơ bản

Trong tất cả các $\Delta_j > 0$, ta chọn $\Delta_v > 0$ lớn nhất [Ta đánh dấu * cho Δ_v dương lớn nhất trong bảng]. Khi đó, x_v là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản.

Bước 4: Tìm ẩn đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản.

Lập các tỉ số $\lambda_k = \frac{b_k}{a_{kv}}$ với mọi k mà $a_{kv} > 0$ và ghi vào cột λ_i của bảng. Xác định

$$\lambda_r = \min\left\{\frac{b_k}{a_{kv}} : a_{kv} > 0\right\}$$

[Ta đánh dấu * cho λ_r nhỏ nhất trong bảng]. Khi đó x_r là ẩn mà ta sẽ đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản.

Bước 5: Tìm phần tử chốt.

Phần tử chốt là hệ số a_{rv} ở cột v (cột chứa Δ_v^*), hàng r (hàng chứa λ_r^*) [Ta đóng khung phần tử chốt a_{rv}].

Bước 6: Biến đổi bảng.

- 1) Trong cột **Ẩn cơ bản** ta thay x_r bằng x_v . Trong cột **Hệ số** ta thay c_r bằng c_v .
- 2) Dùng phép biến đổi $h_r := \frac{h_r}{a_{rv}}$, nghĩa là hàng r mới = hàng r cũ (của ma trận bổ sung các phương trình ràng buộc) chia cho phần tử chốt a_{rv} .

- 3) Với các hàng i ($i \neq r$) (của ma trận bổ sung các phương trình ràng buộc) ta dùng phép biến đổi

$$h_i := h_i - a_{iv} h_r,$$

nghĩa là (hàng i mới) = (hàng i cũ) – a_{iv} (hàng r mới).

- 4) Với hàng cuối cùng của bảng (gồm $f(x)$, f_0 và các Δ_j), ta dùng phép biến đổi

$$h_c := h_c - \Delta_v h_r,$$

nghĩa là (hàng cuối mới) = (hàng cuối cũ) – Δ_v (hàng r mới).

Bước 7: Quay về Bước 2.

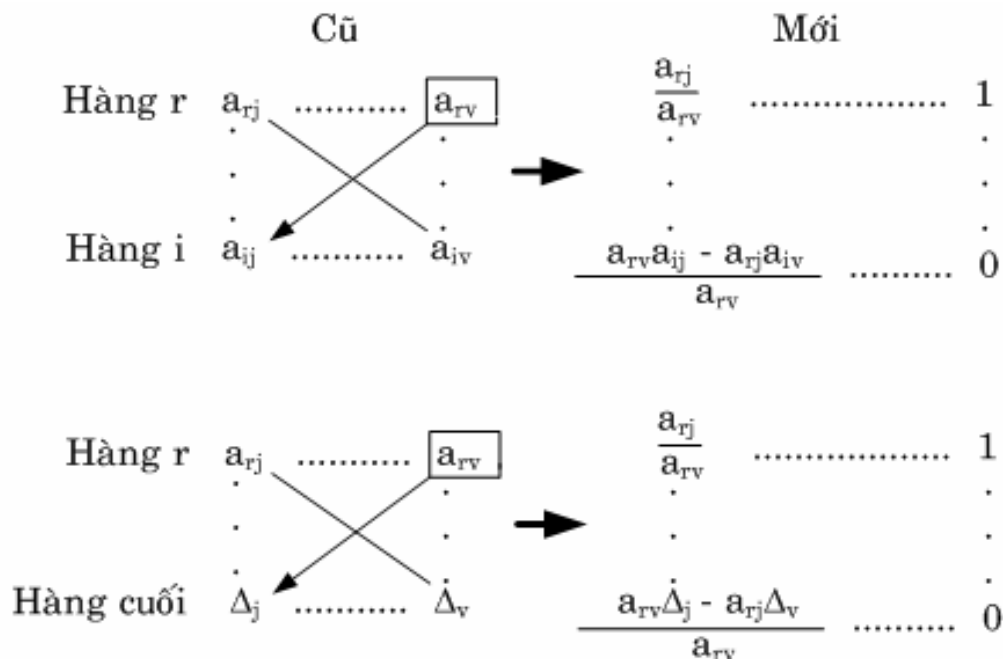
Chú ý:

- a) Trong Bước 3, nếu có nhiều $\Delta_v > 0$ lớn nhất thì ta chỉ chọn một trong số đó để đánh dấu * và xác định ẩn đưa vào tương ứng.
- b) Trong Bước 4, nếu có nhiều λ_r thỏa

$$\lambda_r = \min \left\{ \frac{b_k}{a_{kv}} : a_{kv} > 0 \right\}$$

thì ta chỉ chọn một trong số đó để đánh dấu * và xác định ẩn đưa ra tương ứng.

- c) Trong Bước 6, các phép biến đổi từ 2) đến 4) có thể được thực hiện bằng phương pháp “đường chéo hình chữ nhật” như sau:



- d) Trong Bước 6, hàng cuối có thể được tính nhờ vào các hàng trên của bảng mới như khi lập bảng đơn hình đầu tiên ở Bước 1.

1.2. Thuật toán giải bài toán max:

Đối với bài toán QHTT $f(x) \rightarrow \max$ ta có thể chuyển về bài toán min như sau:

Đặt $g(x) = -f(x)$. Ta có $g(x) \rightarrow \min$ và

$$f(x) \text{ đạt max tại } x^0 \Leftrightarrow g(x) \text{ đạt min tại } x^0.$$

Hơn nữa, khi đó $f(x^0) = -g(x^0)$.

Ngoài ra ta cũng có thuật toán giải trực tiếp bài toán max tương tự như thuật toán giải bài toán min, nhưng những điều kiện về các Δ_j ở hàng cuối sẽ hoàn toàn ngược lại, cụ thể có sự thay đổi như sau:

a) Bước 2 (Kiểm tra tính tối ưu):

- 1) Nếu $\Delta_j \geq 0$ với mọi $j = 1, \dots, n$, thì phương án cơ bản ban đầu x^0 (là phương án có thành phần thứ i_k là $x_{i_k}^0 = b_k$, còn các thành phần khác bằng 0) là một phương án tối ưu của bài toán max đang xét với $f(x^0) = f_0$.
- 2) Nếu tồn tại $\Delta_v < 0$ sao cho $a_{iv} \leq 0$ với mọi $i = 1, \dots, m$, thì bài toán max đang xét vô nghiệm, nghĩa là không có phương án tối ưu nào.
- 3) Nếu hai trường hợp trên đều không xảy ra, nghĩa là tồn tại $\Delta_v < 0$, và với mọi j mà $\Delta_j < 0$ đều tồn tại i sao cho $a_{ij} > 0$, thì sang Bước 3.

b) Bước 3 (Tìm ẩn đưa vào hệ ẩn cơ bản):

Trong tất cả các $\Delta_j < 0$, ta chọn $\Delta_v < 0$ **bé nhất** [Ta đánh dấu * cho Δ_v âm bé nhất trong bảng]. Khi đó, x_v là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản.

1.3. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Giải bài toán QHTT sau:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32; \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30; \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36. \end{cases} \\ (2) \quad & \\ (3) \quad & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6) \end{aligned}$$

Giải. Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 3), e_3 (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_1 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_3 ;
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_6 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	2	5	4	1	-5	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	32	1	-6	0	-2	-9	0	
4	x_3	30	0	2	1	1/2	3/2	0	
0	x_6	36	0	3	0	0	1	1	
	f(x)	184	0	-9	0	-3	-7	0	

$$f_0 = 2.32 + 4.30 + 0.36 = 184;$$

$$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0;$$

$$\Delta_2 = 2.(-6) + 4.2 + 0.3 - 5 = -9;$$

$$\Delta_4 = 2.(-2) + 4.(1/2) + 0.0 - 1 = -3;$$

$$\Delta_5 = 2.(-9) + 4.(3/2) + 0.1 - (-5) = -7.$$

Trong bảng trên ta thấy $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, 6$, nên bài toán min đang xét có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu x^0 định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 32; \\ x_3 = 30; \\ x_6 = 36; \\ x_2 = x_4 = x_5 = 0. \end{cases}$$

với $f(x^0) = 184$.

Kết luận: Bài toán có phương án tối ưu là $x^0 = (32, 0, 30, 0, 0, 36)$

với $f(x^0) = 184$.

Ví dụ 2. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15; \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9; \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6).$$

Giải. Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc thứ 2 trong (2) là $-9 < 0$. Đổi dấu hai vế của phương trình này, ta đưa về bài toán sau:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \min$$

$$(2') \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15; \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9; \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6).$$

Ma trận hệ số ràng buộc là:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vector cột đơn vị e_1 (cột 2), e_2 (cột 3), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_2 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_3 ;
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_5 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	6	1	1	3	1	-7	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
1	x_2	15	-1	1	0	-1	0	1	
1	x_3	9	-2	0	1	0	0	-2	
1	x_5	2	4	0	0	2	1	-3	
	f(x)	26	-5	0	0	-2	0	3*	
-7	x_6	15	-1	1	0	-1	0	1	
1	x_3	39	-4	2	1	-2	0	0	
1	x_5	47	1	3	0	-1	1	0	
	f(x)	-19	-2	-3	0	1	0	0	

Bảng I

$$h_2 := h_2 + 2h_1$$

$$h_3 := h_3 + 3h_1$$

$$h_c := h_c - 3h_1$$

Bảng II

Bảng I: Ta tìm được:

$$f_0 = 1.15 + 1.9 + 1.2 = 26;$$

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0;$$

$$\Delta_1 = 1.(-1) + 1.(-2) + 1.4 - 6 = -5;$$

$$\Delta_4 = 1.(-1) + 1.0 + 1.2 - 3 = -2;$$

$$\Delta_6 = 1.1 + 1.(-2) + 1.(-3) - (-7) = 3.$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại $\Delta_6 = 3 > 0$ và trên cột tương ứng có $a_{13}=1>0$ ($a_{23} = -2$, $a_{33} = -3$) nên ta chọn ẩn đưa vào là x_6 , ẩn đưa ra là x_2 , phần tử chốt là $a_{13}=1$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Trong Bảng II, ta thấy tồn tại $\Delta_4 = 1 > 0$ mà $a_{i4} \leq 0$ với mọi $j = 1, 2, 3$ ($a_{14} = -1$, $a_{24} = -2$, $a_{34} = -1$) nên bài toán min đang xét vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \quad \text{-----} \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_3 \leq 7; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Giải. Chuyển về bài toán min bằng cách đặt

$$g(x) = -f(x) = -3x_1 - 8x_2 - 5x_3$$

Ta có bài toán:

$$(1') \quad g(x) = -3x_1 - 8x_2 - 5x_3 \quad \text{-----} \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_3 \leq 7; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Biến đổi bài toán trên về dạng chính tắc bằng cách đưa vào các ẩn phụ $x_j \geq 0$ ($j = 4, 5, 6$):

$$(1') \quad g(x) = -3x_1 - 8x_2 - 5x_3 \quad \text{-----} \rightarrow \min$$

$$(2') \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 7; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 12. \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

Bài toán dạng chính tắc trên có các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2') đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị e_1 (cột 4), e_2 (cột 5), e_3 (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_4 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_5 ;
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_6 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	-3	-8	-5	0	0	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	4	1	<u>3</u>	0	1	0	0	$\lambda_1 = 4/3^*$
0	x_5	7	1	0	2	0	1	0	
0	x_6	12	1	3	2	0	0	1	$\lambda_3 = 12/3$
	g(x)	0	3	8*	5	0	0	0	
-8	x_2	4/3	1/3	1	0	1/3	0	0	
0	x_5	7	1	0	<u>2</u>	0	1	0	$\lambda_2 = 7/2^*$
0	x_6	8	0	0	2	-1	0	1	$\lambda_3 = 8/2$
	g(x)	-32/3	1/3	0	5*	-8/3	0	0	
-8	x_2	4/3	1/3	1	0	1/3	0	0	
-5	x_3	7/2	1/2	0	1	0	1/2	0	
0	x_6	1	-1	0	0	-1	-1	1	
	g(x)	-169/6	-13/6	0	0	-8/3	-5/2	0	

Bảng I

$$h_1 := (1/3)h_1$$

$$h_3 := h_3 - 3h_1$$

$$h_c := h_c - 8h_1$$

Bảng II

$$h_2 := (1/2)h_2$$

$$h_3 := h_3 - 2h_2$$

$$h_c := h_c - 5h_2$$

Bảng III

Bảng I: Ta tìm được:

$$g_0 = 0.4 + 0.7 + 0.12 = 0;$$

$$\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0;$$

$$\Delta_1 = 0.1 + 0.1 + 0.1 - (-3) = 3;$$

$$\Delta_2 = 0.3 + 0.0 + 0.3 - (-8) = 8;$$

$$\Delta_3 = 0.0 + 0.2 + 0.2 - (-5) = 5;$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại các $\Delta_j > 0$ là: $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 8$, $\Delta_3 = 5$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_2 = 8$ dương lớn nhất và ẩn đưa vào là x_2 , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{12} = 3$, $a_{32} = 3$ nên ta lập các tỉ số $\lambda_1 = 4/3$, $\lambda_3 = 12/3$. Ta chọn tỉ số $\lambda_1 = 4/3$ nhỏ nhất và ẩn đưa ra là x_4 , phần tử chốt là $a_{12}=3$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Lý luận tương tự như trên, ta thấy phương án cơ bản ban đầu trong bảng này chưa tối ưu và cũng không có dấu hiệu cho thấy bài toán vô nghiệm. Biến đổi Bảng II bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng III: Trong Bảng III ta thấy $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, 6$, nên bài toán min đang xét có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu x^1 định bởi:

$$\begin{cases} x_2 = 4/3; \\ x_3 = 7/2; \\ x_6 = 1; \\ x_1 = x_4 = x_5 = 0. \end{cases}$$

với $g(x^1) = -169/6$. Bỏ đi các ẩn phụ, ta được phương án tối ưu của bài toán min là $x^0 = (x_1, x_2, x_3) = (0, 4/3, 7/2)$ với $g(x^0) = -169/6$.

Kết luận: Bài toán max đã cho có phương án tối ưu là $x^0 = (0, 4/3, 7/2)$ với $f(x^0) = 169/6$.

Ví dụ 4. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52; \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60; \\ 3x_2 + x_5 = 36. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq 5)$$

Giải. Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 4), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_1 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_4 ;
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_5 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	-2	6	4	-2	3	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-2	x_1	52	1	2	4	0	0	$\lambda_1 = 52/4^*$
-2	x_4	60	0	4	2	1	0	$\lambda_2 = 60/2$
3	x_5	36	0	3	0	0	1	
	f(x)	-116	0	-9	-16*	0	0	
4	x_3	13	1/4	1/2	1	0	0	$\lambda_1 = 13.2$
-2	x_4	34	-1/2	3	0	1	0	$\lambda_2 = 34/3^*$
3	x_5	36	0	3	0	0	1	$\lambda_3 = 36/3$
	f(x)	92	4	-1*	0	0	0	
4	x_3	22/3	1/3	0	1	-1/6	0	
6	x_2	34/3	-1/6	1	0	1/3	0	
3	x_5	2	1/2	0	0	-1	1	
	f(x)	310/3	23/6	0	0	1/3	0	

Bảng I

$$h_1 := (1/4)h_1$$

$$h_2 := h_2 - 2h_1$$

$$h_c := h_c + 16h_1$$

Bảng II

$$h_2 := (1/3)h_2$$

$$h_1 := h_1 - (1/2)h_2$$

$$h_3 := h_3 - 3h_2$$

$$h_c := h_c + h_2$$

Bảng III

Bảng I: Ta tìm được:

$$f_0 = -2.52 - 2.60 + 3.36 = -116;$$

$$\Delta_1 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0;$$

$$\Delta_2 = -2.2 - 2.4 + 3.3 - 6 = -9;$$

$$\Delta_3 = -2.4 - 2.2 + 3.0 - 4 = -16.$$

Trong Bảng I, ta thấy tồn tại các $\Delta_j < 0$ là: $\Delta_2 = -9$, $\Delta_3 = -16$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_3 = -16$ âm nhỏ nhất và ẩn đưa vào là x_3 , khi đó

trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{13} = 4$, $a_{23} = 2$ nên ta lập các tỉ số $\lambda_1 = 52/4$, $\lambda_2 = 60/2$. Ta chọn tỉ số $\lambda_1 = 52/4$ nhỏ nhất và ẩn đưa ra là x_1 , phần tử chốt là $a_{13} = 4$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Lý luận tương tự như trên, ta thấy phương án cơ bản ban đầu trong bảng này chưa tối ưu và cũng không có dấu hiệu cho thấy bài toán vô nghiệm. Biến đổi Bảng II bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng III: Trong Bảng III ta thấy $\Delta_j \geq 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, 5$, nên bài toán max đang xét có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu x^0 định bởi:

$$\begin{cases} x_3 = 22/3; \\ x_2 = 34/3; \\ x_5 = 2; \\ x_1 = x_4 = 0. \end{cases}$$

với $f(x^0) = 310/3$.

Kết luận: Bài toán max đã cho có phương án tối ưu là $x^0 = (0, 34/3, 22/3, 0, 2)$ với $f(x^0) = 310/3$.

§2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH MỞ RỘNG GIẢI BÀI TOÁN QHTT DẠNG CHÍNH TẮC

Thuật toán đơn hình mở rộng giải bài toán QHTT dạng chính tắc tương tự như thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chuẩn, nhưng có một số điểm cần chú ý như sau:

- 1) Do hàm mục tiêu mở rộng là $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) + M(\sum \text{ẩn giả})$ đối với bài toán min, và là $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) - M(\sum \text{ẩn giả})$ đối với bài toán max, nên trong các bảng đơn hình, ở cột Hệ số có thể có các hệ số phụ thuộc M . Khi đó, ở hàng cuối gồm $\bar{f}(\bar{x})$; \bar{f}_0 và các Δ_j , các hệ số sẽ có dạng $\alpha_j + \beta_j M$, do đó người ta thường chia hàng cuối thành 2 hàng nhỏ: Hàng nhỏ trên ghi các số α_j ; Hàng nhỏ trên ghi các số $\beta_j M$. Các hàng này cũng tuân thủ các phép biến đổi của bảng giống như các hàng khác.
- 2) Vì M là một đại lượng dương rất lớn, nên khi so sánh các số dạng $\alpha + \beta M$ và $\alpha' + \beta' M$, ta có qui tắc sau:

$$\alpha + \beta M = \alpha' + \beta' M \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha'; \\ \beta = \beta'. \end{cases}$$

$$\alpha + \beta M > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0; \\ \alpha \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

$$\alpha + \beta M > \alpha' + \beta' M \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > \beta'; \\ \alpha, \alpha' \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Do đó khi xét dấu Δ_j , hệ số β_j ở hàng nhỏ dưới được xem xét trước; và chỉ khi nào $\beta_j = 0$, ta mới xét đến hệ số α_j ở hàng nhỏ trên. Tương tự, khi so sánh các Δ_j , các hệ số β_j ở hàng nhỏ dưới được so sánh trước; và chỉ khi nào các β_j bằng nhau, ta mới so sánh các hệ số α_j ở hàng nhỏ trên.

- 3) Trong bảng đơn hình đầu tiên, tất cả các ẩn giả đều có trong cột Ẩn cơ bản (vì chúng đều là các ẩn cơ bản). Mỗi khi một ẩn giả bị đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản thì không bao giờ ta đưa ẩn giả đó trở lại nữa, vì vậy trong bảng đơn hình ta có thể bỏ đi các cột ứng với các ẩn giả.

Ví dụ 1. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} -3x_3 - 9x_4 = 0; \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 5; \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq 5)$$

Giải. Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

A chứa vectơ cột đơn vị e_3 (cột 1), không chứa các vectơ cột đơn vị e_1, e_2 nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào các ẩn giả $x_j \geq 0$ ($j = 6, 7$) và lần lượt cộng x_6, x_7 vào vế trái của các phương trình ràng buộc thứ 1, thứ 2 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1) \quad \bar{f}(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} -3x_3 - 9x_4 + x_6 = 0; \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 + x_7 = 5; \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq 7)$$

Khi đó bài toán có

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_6 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_7 ;
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_1 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng.

Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	1 x_1	2 x_2	0 x_3	1 x_4	-5 x_5	λ_i
M	x_6	0	0	0	-3	-9	0	
M	x_7	5	0	<u>1</u>	-7	-5	-2	
1	x_1	2/3	1	- 1/3	2/3	4/3	1/3	
	$\bar{f}(\bar{x})$	2/3	0	- 7/3	2/3	1/3	16/3	
		5M	0	M*	-10M	-14M	-2M	
M	x_6	0	0	0	-3	-9	0	
2	x_2	5	0	1	-7	-5	-2	
1	x_1	7/3	1	0	-5/3	-1/3	-1/3	
	$\bar{f}(\bar{x})$	37/3	0	0	-47/3	-34/3	2/3	
		0	0	0	-3M	-9M	0	

Bảng I

$$h_3 := h_3 + (1/3)h_2$$

$$h_{c1} := h_{c1} + (7/3)h_2$$

$$h_{c2} := h_{c2} - M.h_2$$

Bảng II

Bảng I: Ta tìm được:

$$\bar{f}_0 = M.0 + M.5 + 1.(2/3) = 2/3 + 5M;$$

$$\Delta_1 = 0;$$

$$\Delta_2 = M.0 + M.1 + 1.(-1/3) - 2 = -7/3 + M;$$

$$\Delta_3 = M.(-3) + M.(-7) + 1.(2/3) - 0 = 2/3 - 10M;$$

$$\Delta_4 = M.(-9) + M.(-5) + 1.(4/3) - 1 = 1/3 - 14M;$$

$$\Delta_5 = M.0 + M.(-2) + 1.(1/3) - 5 = 16/3 - 2M.$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại duy nhất một $\Delta_j > 0$ là: $\Delta_2 = -7/3 + M > 0$ và trên cột tương ứng chỉ có một hệ số dương là $a_{22}=1>0$ nên ta chọn ẩn đưa vào là x_2 , ẩn đưa ra là x_7 , phần tử chốt là $a_{22}=1$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Trong Bảng II, ta thấy tồn tại $\Delta_5 = 2/3 > 0$ mà $a_{i5} \leq 0$ với mọi $j = 1, 2, 3$ ($a_{15}=0$, $a_{25}=-2$, $a_{35}=-1/3$) nên bài toán min mở rộng vô nghiệm. Suy ra bài toán min xuất phát cũng vô nghiệm.

Kết luận: Bài toán đã cho không có phương án tối ưu.

Ví dụ 2. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50; \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$$

Giải. Biến đổi bài toán trên về dạng chính tắc bằng cách đưa và ẩn phụ $x_4 \geq 0$:

$$(1') \quad f(x) = -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$(2') \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

Các vế phải của phương trình ràng buộc trong (2') đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A chứa vectơ cột đơn vị e_3 (cột 4), không chứa các vectơ cột đơn vị e_1, e_2 nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào các ẩn giả $x_5 \geq 0$ ($j = 5, 6$) và lần lượt cộng x_5, x_6 vào vế trái của các phương trình ràng buộc thứ 1, thứ 2 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1'') \quad \bar{f}(\bar{x}) = -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max$$

$$(2'') \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 27; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 50; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

$$(3'') \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 6})$$

Khi đó bài toán có

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_5 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_6 ;
- Ẩn cơ bản thứ 3 là x_4 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng. Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	-2	-4	2	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	
-M	x_5	27	1	-2	1	0	$\lambda_1=27/1$ $\lambda_2=50/2^*$
-M	x_6	50	2	1	<u>2</u>	0	
0	x_4	18	1	-1	-1	1	
	$\bar{f}(\bar{x})$	0	2	4	-2	0	
		-77M	-3M	M	-3M*	0	
-M	x_5	2	0	-5/2	0	0	
2	x_3	25	1	1/2	1	0	
0	x_4	43	2	-1/2	0	1	
	$\bar{f}(\bar{x})$	50	4	5	0	0	
		-2M	0	5M/2	0	0	

Bảng I

$$h_2 := (1/2)h_2$$

$$h_1 := h_1 + h_2$$

$$h_3 := h_3 + h_2$$

$$h_{c1} := h_{c1} + 2h_2$$

$$h_{c2} := h_{c2} + 3M.h_2$$

Bảng II

Bảng I: Ta tìm được:

$$\bar{f}_0 = -M.27 - M.50 + 0.18 = -77M;$$

$$\Delta_4 = 0;$$

$$\Delta_1 = -M.1 - M.2 + 0.1 - (-2) = 2 - 3M;$$

$$\Delta_2 = -M.(-2) - M.1 + 0.(-1) - (-4) = 4 + M;$$

$$\Delta_3 = -M.1 - M.2 + 0.(-1) - 2 = -2 - 3M.$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại các $\Delta_j < 0$ là: $\Delta_1 = 2 - 3M < 0$, $\Delta_3 = -2 - 3M < 0$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_3 = -2 - 3M$ dương lớn nhất và ẩn đưa vào là x_3 , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{13} = 1 > 0$, $a_{23} = 2 > 0$. Ta lập các tỉ số $\lambda_1 = 27/1$, $\lambda_2 = 50/2$; chọn tỉ số $\lambda_2 = 25$ nhỏ nhất và ẩn đưa ra là

x_6 , phần tử chốt là $a_{23} = 2$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng:

Bảng II: Trong Bảng II ta thấy $\Delta_j \geq 0$ với mọi $j = 1, 2, 3, 4$, nên bài toán mở rộng max có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu \bar{x}^0 định bởi:

$$\begin{cases} x_5 = 2; \\ x_3 = 25; \\ x_4 = 43; \\ x_1 = x_2 = x_6 = 0. \end{cases}$$

với $\bar{f}(\bar{x}^0) = 50 - 2M$.

Vì bài toán mở rộng max có phương án tối ưu là $\bar{x}^0 = (0, 0, 25, 43, 2, 0)$, trong đó ẩn giả $x_5 = 2 > 0$ nên bài toán max xuất phát không có phương án nào.

Kết luận: Bài toán đã cho không có phương án nào và do đó không có phương án tối ưu.

Ví dụ 3. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3}; \\ -5x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$$

Giải. Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

A chứa vectơ cột đơn vị e_1 (cột 3), không chứa vectơ cột đơn vị e_2 , nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào ẩn giả $x_4 \geq 0$ và x_4 vào vế trái của phương trình ràng buộc thứ 2 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1') \quad \bar{f}(\bar{x}) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 + Mx_4 \rightarrow \min$$

$$(2') \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3}; \\ -5x_1 + 5x_2 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

Khi đó bài toán có

- Ẩn cơ bản thứ 1 là x_3 ;
- Ẩn cơ bản thứ 2 là x_4 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng. Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	-16	7	9	λ_i
			x_1	x_2	x_3	
9	x_3	1/3	-2/3	-1/3	1	Bảng I
M	x_4	7	-5	5	0	
	$\bar{f}(\bar{x})$	3	10	-10	0	$h_1 := h_1 + (1/3)h_2$ $h_{c1} := h_{c1} + 10h_2$
		7M	-5M	5M*	0	
9	x_3	4/5	-1	0	1	$h_{c2} := h_{c2} - 5M.h_2$ Bảng II
7	x_2	7/5	-1	1	0	
	$\bar{f}(\bar{x})$	17	0	0	0	

Bảng I: Ta tìm được:

$$\bar{f}_0 = 9.(1/3) + M.7 = 3 + 7M;$$

$$\Delta_3 = 0;$$

$$\Delta_1 = 9.(-2/3) + M.(-5) - (-16) = 10 - 5M;$$

$$\Delta_2 = 9.(-1/3) + M.5 - 7 = -10 + 5M.$$

Trong Bảng I, ta thấy tồn tại duy nhất một $\Delta_j > 0$ là: $\Delta_2 = -10 + 5M > 0$ và trên cột tương ứng chỉ có một hệ số dương là $a_{22}=5>0$ nên ta chọn ẩn đưa vào là x_2 , ẩn đưa ra là x_4 , phần tử chốt là $a_{22}=5$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Trong Bảng II ta thấy $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = 1, 2, 3$ nên bài toán mở rộng min có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu \bar{x}^0 định bởi:

$$\begin{cases} x_3 = 4/5; \\ x_2 = 7/5; \\ x_1 = x_4 = 0. \end{cases}$$

với $\bar{f}(\bar{x}^0) = 17$.

Bài toán mở rộng $\bar{f}(\bar{x}) \rightarrow \min$ có phương án tối ưu là $\bar{x}^0 = (0, 7/5, 4/5, 0)$, trong đó ẩn giả duy nhất $x_4 = 0$ nên bài toán $f(x) \rightarrow \min$ xuất phát có phương án tối ưu là $x^0 = (0, 7/5, 4/5)$ với $f(x^0) = 17$.

Kết luận: Bài toán đã cho có phương án tối ưu là $x^0 = (0, 7/5, 4/5)$ với $f(x^0) = 17$.

Ví dụ 4. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$$

Giải. Chuyển về bài toán min bằng cách đặt

$$g(x) = -f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 3x_3$$

Ta có bài toán:

$$(1') \quad g(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$$

Biến đổi bài toán trên về dạng chính tắc bằng cách đưa và ẩn phụ $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$:

$$(1') \quad g(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$(2') \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5})$$

Các vế phải của phương trình ràng buộc trong (2') đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A chứa vectơ cột đơn vị e_1 (cột 4), không chứa các vectơ cột đơn vị e_2, e_3 nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào các ẩn giả $x_j \geq 0$ ($j = 6, 7$) và lần lượt cộng x_6, x_7 vào vế trái của các phương trình ràng buộc thứ 2, thứ 3 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1'') \quad \bar{g}(\bar{x}) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$(2'') \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = 3. \end{cases}$$

$$(3'') \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 7})$$

Khi đó bài toán có

- Ấn cơ bản thứ 1 là x_4 ;
- Ấn cơ bản thứ 2 là x_6 ;
- Ấn cơ bản thứ 3 là x_7 .

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng. Lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	2 x_1	-3 x_2	3 x_3	0 x_4	0 x_5	λ_i
0	x_4	12	3	-1	0	1	0	$\lambda_1 = 12/3$
M	x_6	1	1	2	-1	0	-1	$\lambda_2 = 1/1^*$
M	x_7	3	1	-1	-1	0	0	$\lambda_3 = 3/1$
	$\bar{g}(\bar{x})$	0	-2	3	-3	0	0	
		4M	2M*	M	-2M	0	-M	
0	x_4	9	0	-7	3	1	3	$\lambda_1 = 9/3$
2	x_1	1	1	2	-1	0	-1	$\lambda_3 = 2/1$
M	x_7	2	0	-3	0	0	1	
	$\bar{g}(\bar{x})$	2	0	7	-5	0	-2	
		2M	0	-3M	0	0	M*	
0	x_4	3	0	2	3	1	0	
2	x_1	3	1	-1	-1	0	0	
0	x_5	2	0	-3	0	0	1	
	$\bar{g}(\bar{x})$	6	0	1*	-5	0	0	
-3	x_2	3/2	0	1	3/2	1/2	0	
2	x_1	9/2	1	0	1/2	1/2	0	
0	x_5	13/2	0	0	9/2	3/2	1	
	$\bar{g}(\bar{x})$	9/2	0	0	-13/2	-1/2	0	

Bảng I

$$h_1 := h_1 - 3h_2$$

$$h_3 := h_3 - h_2$$

$$h_{c1} := h_{c1} + 2h_2$$

$$h_{c2} := h_{c2} - 2M.h_2$$

Bảng II

$$h_1 := h_1 - 3h_3$$

$$h_2 := h_2 + h_3$$

$$h_{c1} := h_{c1} + 2h_3$$

$$h_{c2} := h_{c2} - M.h_3$$

Bảng III

$$h_1 := (1/2)h_1$$

$$h_2 := h_2 + h_1$$

$$h_3 := h_3 + 3h_1$$

$$h_c := h_c - h_1$$

Bảng IV

Bảng I: Ta tìm được:

$$\bar{f}_0 = 0.12 + M.1 + M.3 = 4M;$$

$$\Delta_4 = 0;$$

$$\Delta_1 = 0.3 + M.1 + M.1 - 2 = -2 + 2M;$$

$$\Delta_2 = 0.(-1) + M.2 + M.(-1) - (-3) = 3 + M;$$

$$\Delta_3 = 0.0 + M.(-1) + M.(-1) - 3 = -3 - 2M;$$

$$\Delta_5 = 0.0 + M.(-1) + M.0 - 0 = -M.$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại các $\Delta_j > 0$ là: $\Delta_1 = -2 + 2M > 0$, $\Delta_3 = 3 + M > 0$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_1 = -2 + 2M$ dương lớn nhất và ẩn đưa vào là x_1 , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{11} = 3 > 0$, $a_{21} = 1 > 0$, $a_{31} = 1 > 0$. Ta lập các tỉ số $\lambda_1 = 12/3$, $\lambda_2 = 1/1$, $\lambda_3 = 3/1$; chọn tỉ số $\lambda_2 = 1$ nhỏ nhất và ẩn đưa ra là x_6 , phần tử chốt là $a_{21} = 1$. Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II và III: Lý luận tương tự như trên, ta thấy các phương án cơ bản ban đầu trong các bảng này chưa tối ưu và cũng không có dấu hiệu cho thấy bài toán vô nghiệm. Biến đổi các bảng bằng các phép biến đổi ghi cạnh các bảng.

Bảng IV: Trong Bảng Iv ta thấy $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, 5$, nên bài toán mở rộng min có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu \bar{x}^0 định bởi:

$$\begin{cases} x_2 = 3/2; \\ x_1 = 9/2; \\ x_5 = 13/2; \\ x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0. \end{cases}$$

với $\bar{g}(\bar{x}^0) = 9/2$.

Bài toán mở rộng $\bar{g}(\bar{x}) \rightarrow \min$ có phương án tối ưu là $\bar{x}^0 = (9/2, 3/2, 0, 0, 13/2, 0, 0)$, trong đó các ẩn giả x_6, x_7 đều bằng 0 nên bài toán $g(x) \rightarrow \min$ có phương án tối ưu là $x^0 = (9/2, 3/2, 0)$ với $g(x^0) = 9/2$ (ta bỏ đi các ẩn phụ $x_4 = 0, x_5 = 13/2$).

Kết luận: Bài toán max đã cho có phương án tối ưu là $x^0 = (9/2, 3/2, 0)$ với $f(x^0) = -9/2$.

C - BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

§1. ĐỊNH NGHĨA BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU.

Cặp bài toán QHTT đối ngẫu là cặp bài toán có dạng sau:

Bài toán min		Bài toán max
<p>(1) $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$</p> <p>(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \dots \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$</p> <p>(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \dots \\ \text{tùy ý} \end{matrix}$</p>		<p>(1') $g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \max$</p> <p>(2') $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ \dots \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$</p> <p>(3') $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \dots \\ \text{tùy ý} \end{matrix}$</p>

trong đó mỗi cặp ràng buộc đối ngẫu là một cặp gồm: Ràng buộc thứ i ở bài toán này và Ràng buộc về dấu của ẩn thứ i của bài toán kia.

Như vậy, với qui ước:

- Đối với bài toán min một ràng buộc được gọi là *bất phương trình ràng buộc tương thích* nếu có dạng \geq , là *bất phương trình ràng buộc không tương thích* nếu có dạng \leq .
- Đối với bài toán max một ràng buộc được gọi là *bất phương trình ràng buộc tương thích* nếu có dạng \leq , là *bất phương trình ràng buộc không tương thích* nếu có dạng \geq .

	Bất phương trình ràng buộc tương thích	Bất phương trình ràng buộc không tương thích
Bài toán min	\geq	\leq
Bài toán max	\leq	\geq

trong cặp bài toán đối ngẫu, ta có:

- 1) Số ẩn của bài toán này bằng số ràng buộc của bài toán kia.

- 2) Bài toán này tìm min (max) thì bài toán kia tìm max (min). Hệ số của các ẩn số trong hàm mục tiêu ở bài toán này chính là các hệ số ở vế phải của các ràng buộc ở bài toán kia.
- 3) Ma trận hệ số ràng buộc của bài toán này bằng chuyển vị của ma trận hệ số ràng buộc của bài toán kia.
- 4) Trong mỗi *cặp ràng buộc đối ngẫu* các tính chất sau được thỏa:

Ràng buộc của bài toán này	Ẩn của bài toán kia
Bất phương trình ràng buộc tương thích	≥ 0
Bất phương trình ràng buộc không tương thích	≤ 0
Phương trình	Tùy ý

Như vậy, xét bài toán (I) (không phân biệt min hay max) theo n ẩn x_1, x_2, \dots, x_n với m ràng buộc. Bài toán (II) đối ngẫu m ẩn y_1, y_2, \dots, y_m với n ràng buộc. Để lập bài toán (II) ta dựa vào các tính chất 1, 2, 3 để lập hàm mục tiêu, xác định các hệ số ràng buộc, còn để xác định các ràng buộc là bất phương trình loại gì hay là phương trình cũng như để xác định dấu của các ẩn, ta dựa vào tính chất 4, cụ thể như sau:

- Nếu ẩn $x_j \geq 0$ thì ràng buộc thứ j của bài toán (II) là bất phương trình ràng buộc tương thích.
- Nếu ẩn $x_j \leq 0$ thì ràng buộc thứ j của bài toán (II) là bất phương trình ràng buộc không tương thích.
- Nếu ẩn x_j tùy ý thì ràng buộc thứ j của bài toán (II) là phương trình.
- Nếu ràng buộc thứ i của bài toán (I) là bất phương trình ràng buộc tương thích thì ẩn $y_i \geq 0$.
- Nếu ràng buộc thứ i của bài toán (I) là bất phương trình ràng buộc không tương thích thì ẩn $y_i \leq 0$.
- Nếu ràng buộc thứ i của bài toán (I) là phương trình thì ẩn y_i tùy ý.

Ví dụ 1. Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

(1) $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \min$

(2)
$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25. \end{cases}$$

(3) $x_1 \geq 0; x_2 \leq 0.$

(4)

Giải. Ta thấy bài toán min 4 ẩn, 3 ràng buộc có

- Véc tơ hệ số các ẩn trong hàm mục tiêu là

$$C = (3, 2, -5, 1).$$

- Ma trận hệ số ràng buộc về trái là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 & -5 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Véc tơ các hệ số tự do về phải là

$$B = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ -25 \end{pmatrix}$$

- Ràng buộc 1 là bất phương trình ràng buộc không tương thích.
Ràng buộc 2 là phương trình.
Ràng buộc 3 là bất phương trình ràng buộc tương thích.
- $x_1 \geq 0$;
 $x_2 \leq 0$;
 x_3 tùy ý;
 x_4 tùy ý.

Bài toán đối ngẫu là:

$$(1') \quad g(x) = g(y_1, y_2, y_3) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \text{ -----} \rightarrow \max$$

$$(2') \quad \begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \text{ (tương thích);} \\ -6y_1 + 3y_3 \geq 2 \text{ (không tương thích);} \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5; \\ -5y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

$$(3') \quad y_1 \leq 0; y_2 \text{ tùy ý; } y_3 \geq 0.$$

Ví dụ 2: Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \text{ ----} \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50; \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2 \leq 0.$$

Giải. Ta thấy bài toán max 4 ẩn, 3 ràng buộc có

- Véc tơ hệ số các ẩn trong hàm mục tiêu là

$$C = (3, 2, -5, 1).$$

- Ma trận hệ số ràng buộc vế trái là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 & -5 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Véc tơ các hệ số tự do vế phải là

$$B = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ -25 \end{pmatrix}$$

- Ràng buộc 1 là bất phương trình ràng buộc tương thích.
Ràng buộc 2 là phương trình.
Ràng buộc 3 là bất phương trình ràng buộc không tương thích.
- $x_1 \geq 0$;
 $x_2 \leq 0$;
 x_3 tùy ý;
 x_4 tùy ý.

Bài toán đối ngẫu là:

$$(1') \quad g(y) = g(y_1, y_2, y_3) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \text{ -----} \rightarrow \min$$

$$(2') \quad \begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \geq 3 \text{ (tương thích);} \\ -6y_1 + 3y_3 \leq 2 \text{ (không tương thích);} \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5; \\ -5y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

$$(3') \quad y_1 \geq 0; y_2 \text{ tùy ý; } y_3 \leq 0.$$

§2. QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN GỐC VÀ BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

- 1) Nếu bài toán đối ngẫu không có PATU thì bài toán gốc cũng không có PATU.
- 2) Nếu bài toán đối ngẫu có PATU là $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ thì bài toán gốc cũng không có PATU. Ta xác định PATU $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ của bài toán gốc dựa vào các tính chất sau:

a) Tại phương án $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, nếu trong ràng buộc thứ j của bài toán đối ngẫu không xảy ra dấu $=$, nghĩa là $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_j^0 \neq c_j$, thì ta có $x_j^0 = 0$.

b) Nếu trong phương án y^0 , ẩn y_i lấy giá trị $y_i^0 \neq 0$ thì ở bài toán gốc, dấu $=$ sẽ xảy ra ở ràng buộc thứ i , nghĩa là:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 = b_i.$$

c) $f(x^0) = g(y^0)$.

Ví dụ 1: Giải bài toán QHTT sau:

(1) $f(x) = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \rightarrow \min$

(2)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq -2; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 & \geq -4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq 2. \end{cases}$$

(3) $x_3 \geq 0$.

Giải. Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

(1) $g(y) = -2y_1 - 4y_2 + 2y_3 \rightarrow \max$

(2)
$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 27; \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 50; \\ y_1 - y_2 - y_3 \leq 18. \end{cases}$$

(3) $y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$

Trong Phần B, §1, Ví dụ 2, ta đã giải bài toán đối ngẫu trên và kết quả cho thấy bài toán này không có PATU. Do đó bài toán đã cho cũng không có PATU.

Ví dụ 2. Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 12x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq -2; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3; \\ -x_2 - x_3 \geq -3. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2 \leq 0.$$

Giải. Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$(1') \quad g(y) = -2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \rightarrow \max$$

$$(2') \quad \begin{cases} 3y_1 - y_2 \leq 12; \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1; \\ y_1 - y_2 - y_3 = 3. \end{cases}$$

$$(3') \quad y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$$

Trong Phần B, §1, Ví dụ 4, ta đã giải bài toán đối ngẫu trên và kết quả cho thấy bài toán này có PATU là $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0) = (9/2, 3/2, 0)$ với $g(y^0) = -9/2$.

Bây giờ ta tìm PATU $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ của bài toán gốc.

a) Thay $y^0 = (9/2, 3/2, 0)$ vào các ràng buộc trong (2'), ta thấy ở ràng buộc thứ 2: $y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1$ không xảy ra dấu = (VT = 15/2). Do đó $x_2^0 = 0$.

b) Do $\begin{cases} y_1^0 = 9/2 > 0; \\ y_2^0 = 3/2 > 0. \end{cases}$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = -2; \\ -x_1^0 + 2x_2^0 - x_3^0 = 3. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^0 + x_3^0 = -2; \\ -x_1^0 - x_3^0 = 3. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^0 = 1/2; \\ x_3^0 = -7/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy PATU của bài toán gốc đã cho là $x^0 = (1/2, 0, -7/2)$ với $f(x^0) = g(y^0) = -9/2$.

Ví dụ 3. Cho bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3}; \\ -5x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$$

Hãy lập bài toán và tìm PATU của bài toán đối ngẫu.

Giải. Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$(1') \quad g(y) = \frac{1}{3}y_1 + 7y_2 \rightarrow \max$$

$$(2') \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}y_1 - 5y_2 \leq -16; \\ -\frac{1}{3}y_1 + 5y_2 \leq 7; \\ y_1 \leq 9. \end{cases}$$

$$(3') \quad y_1, y_2 \text{ tùy ý.}$$

Trong Phần B, §1, Ví dụ 3, ta đã giải bài toán đã cho và kết quả cho thấy bài toán này có PATU là $x^0 = (0, 7/5, 4/5)$ với $f(x^0) = 17$.

Bây giờ ta tìm PATU $y^0 = (y_1^0, y_2^0)$ của bài toán đối ngẫu.

Do $\begin{cases} x_2^0 = 7/5 > 0; \\ x_3^0 = 4/5 > 0. \end{cases}$ nên ta có:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}y_1^0 + 5y_2^0 = 7; \\ y_1^0 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^0 = 9; \\ y_2^0 = 2. \end{cases}$$

Vậy PATU của bài toán đối ngẫu là $y^0 = (9, 2)$ với $g(y^0) = f(x^0) = 17$.

BÀI TẬP

1. Một xí nghiệp sản xuất đồ gỗ sản xuất 4 loại bàn A, B, C, D. Xí nghiệp có hai phân xưởng: Phân xưởng mộc và phân xưởng trang trí. Số giờ công có thể huy động được cho hai phân xưởng tương ứng lần lượt là 1000 và 2500. Số gỗ quý có thể mua được là $350m^3$. Suất tiêu hao gỗ và lao động đối với mỗi loại bàn và mỗi loại công việc, cũng như lãi cho 1 bàn mỗi loại được cho trong bảng sau:

Bàn	A	B	C	D
Công việc				
Mộc	$0,08m^3/4h$	$0,12m^3/6h$	$0,3m^3/9h$	$0,21m^3/12h$
Trang trí	1h	2h	3h	4h
Lãi	250000đ	350000đ	380000đ	850000đ

Lập mô hình bài toán tìm kế hoạch sản xuất để tổng số lãi thu được lớn nhất.

2. Một trại chăn nuôi sử dụng 3 loại thực phẩm I, II, III. Lượng chất dinh dưỡng Albumin, chất béo, chất đạm cho gia súc trong 1 ngày cũng như tỉ lệ các chất này trong 3 loại thức ăn được cho trong bảng sau:

Chất dinh dưỡng	Lượng cần trong ngày	Tỉ lệ có trong thực phẩm		
		I	II	III
Albumin	Ít nhất 20kg	20%	10%	10%
Chất béo	Đúng 10kg	30%	40%	20%
Chất đạm	Không quá 15kg	5%	30%	30%

Giá 1kg của từng loại thực phẩm I, II, III lần lượt là 80, 120, 90 (ngàn). Cần lập kế hoạch mua các loại thực phẩm theo đúng yêu cầu trong ngày sao cho tổng chi phí thấp nhất.

a) Lập mô hình bài toán.

b) Mô hình bài toán thay đổi thế nào nếu có yêu cầu lượng Albumin không vượt quá hai lần lượng chất đạm?

3. Để sản xuất 3 loại sản phẩm A, B, C cần dùng 4 loại nguyên liệu I, II, III, IV. Lượng dự trữ nguyên liệu, định mức tiêu hao nguyên liệu, tiền lãi cho 1 đơn vị sản phẩm được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Lượng dự trữ (tấn)	Định mức tiêu hao nguyên liệu(kg) cho 1đv		
		A	B	C
I	25	1	2	0
II	30	2	3	7
III	35	4	0	1
IV	40	0	1	4
Tiền lãi cho 1đv		6	7	8

Cần lập kế hoạch sản xuất để không bị động về nguyên liệu và tổng lãi đạt cao nhất.

a) Lập mô hình bài toán.

b) Mô hình bài toán thay đổi thế nào nếu trong lượng nguyên liệu dự trữ có 10 tấn loại I và 15 tấn loại III sắp hết hạn sử dụng?

4. Hai kho I và II có nhiệm vụ cung cấp sắt cho hai công trường xây dựng A và B. Kho I có khả năng cung cấp 60 tấn, kho II có khả năng cung cấp 40 tấn. Công trường A cần ít nhất 50 tấn, công trường B cần ít nhất 30 tấn. Cước phí vận chuyển (đv: ngàn đồng) 1tấn sắt từ các kho đến các công trường được cho trong bảng sau:

	A	B
I	40	10
II	20	30

Lập mô hình bài toán tìm kế hoạch vận chuyển sao cho đảm bảo được nhu cầu xây dựng mà chi phí vận chuyển đạt thấp nhất.

5. Có hai khu vườn A và B với diện tích lần lượt là 30ha và 40ha. Người ta dự định trồng ba loại cây I, II và III sao cho tỉ lệ sản lượng khi thu hoạch ba loại cây đó là $I:II:III = 2:1:4$. Biết rằng năng suất (tấn/ha) mỗi loại cây trên hai khu vườn được cho trong bảng sau:

	I	II	III
A	1	3	1
B	1	2	2

- Lập mô hình bài toán xác định diện tích trồng các loại cây trên hai khu vườn trên để sản lượng đạt được cao nhất.
- Mô hình bài toán sẽ thay đổi thế nào nếu có yêu cầu sản lượng cây loại I ít nhất 10 tấn?

6. Công ty X dự định trồng hai loại cây Tiêu và Điều trên ba khu đất I, II, III có diện tích lần lượt là 30, 40, 50 (ha). Chi phí sản xuất (triệu đồng/ha) và năng suất (tạ/ha) được cho trong bảng sau:

Khu đất	Tiêu	Điều
I	1,4 8	2,1 7
II	1,3 7	2,4 11
III	1,6 10	1,8 6

(Trong mỗi ô, số liệu ở góc trái là chi phí sản xuất, ở góc phải là năng suất). Yêu cầu sản lượng tối thiểu của Tiêu và Điều lần lượt là 6 tấn và 5 tấn. Lập mô hình bài toán xác định diện tích trồng các loại cây trên sao cho chi phí sản xuất đạt thấp nhất.

7. Công ty Y dự định trồng hai loại cây Tiêu và Điều trên ba khu đất I, II, III có diện tích lần lượt là 50, 60, 70 (ha). Chi phí sản xuất (triệu đồng/ha) và năng suất (tạ/ha) được cho trong bảng sau:

Khu đất	Tiêu	Điều
I	1,2 9	2,2 8
II	1,4 7	2,3 11
III	1,8 10	2 6

(Trong mỗi ô, số liệu ở góc trái là chi phí sản xuất, ở góc phải là năng suất). Tiền vốn huy động được cho sản xuất là 180 (triệu đồng). Tiền lãi mỗi tạ Tiêu, Điều lần

lượt là 2 và 2,5 (triệu đồng). Lập mô hình bài toán xác định diện tích trồng các loại cây trên sao cho tiền lãi đạt cao nhất.

8. Giải các bài toán QHTT sau bằng phương pháp đơn hình:

a) $f(x) = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 16; \\ -4x_1 + 2x_3 \leq 8; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 12. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

b) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -12; \\ -2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq 8; \\ -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 20. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

c) $f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 25; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$$

d) $f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$$

e) $f(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

f) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

g) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq -6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

h) $f(x) = 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 25; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 40. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

i) $f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$$

j) $f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 10; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$$

9. Một xí nghiệp sản xuất 4 mặt hàng : H_1, H_2, H_3, H_4 . Nguyên liệu cần dùng là N_1, N_2 , mà lượng tối đa xí nghiệp có thể huy động được lần lượt là 600kg và 800kg.

Định mức tiêu hao mỗi loại nguyên liệu đối với mỗi mặt hàng cũng như tiền lãi cho 1 đơn vị hàng hóa mỗi loại được cho trong bảng sau:

Suất tiêu hao(kg)	Hàng	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄
Nguyên liệu					
N ₁ : 600kg		0,5	0,2	0,3	0,6
N ₂ : 800kg		0,1	0,4	0,2	0,5
Tiền lãi (ngàn)		0,8	0,3	0,38	0,4

Hãy tìm phương án sản xuất mỗi mặt hàng bao nhiêu đơn vị để tổng tiền lãi thu được cao nhất.

10. Giải bài toán tương tự như trong bài 2 với một số bổ sung sau:

- Tổng số sản phẩm mặt hàng H₁ và H₂ không ít hơn 1000.
- Tiền lãi cho 1 đơn vị mặt hàng H₃ không phải là 0,38 mà là 0,5.

11. Xí nghiệp dùng các tấm kim loại kích thước 60cm×100cm để sản xuất 3 loại bán thành phẩm là các tấm kim loại T₁, T₂, T₃. Có 4 phương thức cắt P₁, P₂, P₃, P₄. Số lượng bán thành phẩm cần trong sản xuất; số lượng bán thành phẩm có được cũng như lượng thừa sau khi cắt một tấm theo mỗi cách được cho trong bảng sau:

Bán thành phẩm	Phương thức cắt				Lượng bán thành phẩm cần có
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	
T ₁	3	4	5	10	240
T ₂	2	0	1	0	100
T ₃	1	2	1	0	80
Lượng thừa (cm ²)	200	400	200	0	

Hãy tìm phương án cắt sao cho lượng bán thành phẩm cần trong sản xuất được đảm bảo mà tổng số lượng thừa là ít nhất.

12. Có ba loại thức ăn I, II, III dùng trong chăn nuôi. Mức yêu cầu cần phải có đủ các chất cho gia súc trong một ngày đêm và giá mỗi đơn vị thức ăn mỗi loại được cho trong bảng sau:

Chất	Lượng yêu cầu trong 1 ngày đêm	Lượng chất (đv: g) có trong 1đv thức ăn mỗi loại		
		I	II	III
Albumin	Ít nhất 200g	0,3	0,8	2
Chất béo	Không quá 100g	3	0	0,4
Chất đạm	Đúng 150g	1	10	0
Giá 1đv thức ăn (ngàn đồng)		0,8	1,5	3

Hãy xác định lượng thức ăn cần dùng mỗi loại sao cho tổng chi phí thấp nhất mà vẫn đảm bảo được mức yêu cầu cho gia súc về các chất trong 1 ngày đêm.

13. Một nông trường sử dụng 3000ha để trồng 3 loại nông sản A, B, C có thông số sau:

Nông sản	Chi phí sản xuất cho 1ha		Giá trị sản lượng thu được trên 1ha (ngàn đồng)
	Vốn (ngàn đồng)	Lao động (ngàn đồng)	
A	300	500	2.000
B	350	400	1.500
C	400	450	2.500

Khả năng của nông trường về vốn là 1.200 triệu đồng, về lao động là 1.600 triệu đồng. Ngoài ra, để đảm bảo hợp đồng đã ký kết, cần trồng ít nhất 600ha nông sản A. Hãy xác định diện tích trồng mỗi loại nông sản để tổng giá trị sản lượng thu được là cao nhất.

14. Một công ty muốn quảng cáo một loại sản phẩm trong 1 tháng với tổng chi phí 100 triệu đồng. Các phương tiện được chọn để quảng cáo là: Truyền hình, Phát thanh và Báo với các số liệu sau:

Phương tiện	Chi phí mỗi lần quảng cáo (triệu đồng)	Số lần quảng cáo tối đa trong 1 tháng	Dự kiến số người tiếp nhận trong 1 lần quảng cáo
Truyền hình (1 phút/lần)	1,5	60	15.000
Phát thanh (1 phút/lần)	0,5	90	9.000
Báo (1/2 trang/lần)	1	26	30.000

Do chiến lược tiếp thị, công ty phải có ít nhất 30 lần quảng cáo trên truyền hình trong 1 tháng. Hãy xác định số lần quảng cáo trên mỗi phương tiện sao cho số người dự kiến tiếp nhận quảng cáo là cao nhất.

15. Lập các bài toán đối ngẫu của các bài toán QHTT sau và xác định các cặp ràng buộc đối ngẫu:

a) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -12 \\ -2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq 8 \\ -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

c) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

b) $f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_4 \leq 0$$

d) $f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0$$

16. Với bài toán QHTT đã cho và phương án tối ưu tương ứng hãy lập bài toán đối ngẫu và tìm PATU của bài toán đối ngẫu (không giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình):

a) $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max$ với phương án tối ưu $x^0 = (3, 3, 1, 0)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

b) $f(x) = -3x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \min$ với phương án tối ưu $x^0 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5})$$

c) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$ với phương án tối ưu $x^0 = (0, 5, 11, 3)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 24 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 22 \\ x_2 + x_4 \geq 8 \\ x_2 + x_3 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

d) $f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$ với phương án tối ưu $x^0 = (0, 15, 6, 2, 0)$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 8x_5 \geq 5 \\ -\frac{23}{2}x_1 + 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 6x_4 + 20x_5 \geq 20 \\ -\frac{17}{4}x_1 + x_2 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + 6x_5 \leq \frac{15}{2} \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5})$$

17. Giải các bài toán QHTT sau bằng phương pháp đơn hình. Lập các bài toán đối ngẫu và dùng kết quả trên để suy ra nghiệm của bài toán đối ngẫu (không giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình):

a) $f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 \geq 8 \\ -3x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 18 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

b) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 27 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

$$\begin{array}{ll}
\text{c)} & f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max \quad \text{d)} \quad f(x) = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 \rightarrow \max \\
& \begin{cases} x_1 - 2x_4 + 3x_5 \geq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 34 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 \leq -16 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 2x_4 + 3x_5 \geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 25 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 8 \end{cases} \\
& x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5})
\end{array}$$

18. Lập các bài toán đối ngẫu và giải các bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình. Dùng kết quả trên để suy ra nghiệm của các bài toán đã cho (không giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình):

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & f(x) = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \rightarrow \max \quad \text{b)} \quad f(x) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \min \\
& \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -2. \end{cases} & \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 40 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 32 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 \leq 69 \end{cases} \\
& x_1; x_2 \text{ tùy ý; } x_3 \leq 0. & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{c)} & f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min \quad \text{d)} \quad f(x) = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 \rightarrow \max \\
& \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_4 \geq 14 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 13 \\ -x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 10 \end{cases} & \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + 5x_2 - \frac{5}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \leq \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x_1 + 3x_2 - x_3 - \frac{5}{3}x_4 - \frac{13}{3}x_5 \leq -\frac{13}{3} \\ -x_1 - 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \leq 5 \end{cases} \\
& x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5})
\end{array}$$

ĐÁP SỐ

8a. Vô nghiệm

8b. VN vì PATU của bài toán mở rộng là: (0,2,7,0,0,0,10)

8c. $X = (7,6,1,0)$; $f = -22$

8d. $X = (3,2,5,0)$; $f = 8$

8e. VN vì PATU của bài toán mở rộng là: (1/2,0,0,0,0,1/2)

8f. $X = (14/5, 12/5, 2/5)$; $f = 36/5$

8g: $X = (11/2, 7, 0)$; $f = 39/2$

8h. $X = (50/3, 5/3, 5)$; $f = 135$

8i. $X = (3, 2, 5, 0)$; $f = 8$

8j. $X = (28, 108, 0, 62)$; $f = 38$

9. $X = (1200, 0, 0, 0)$; $f = 960$

10. $X = (1000, 0, 1000/3, 0)$; $f = 2900/3$

11. $X = (50, 15, 0, 3)$; $f = 16000$

12. $X = (0, 15, 94)$; $f = 609/2$

13. $X = (600, 0, 2400)$; $f = 7200000$ ngàn đồng.

14. $X = (30, 58, 26)$; $f = 1.752.000$.

16a. $Y = (2/11, 7/11, 6/11)$, $g = 8$

16b. $Y = (-27, 18, -4)$, $g = -15$.

16c. $Y = (1/2, 1, 3/2, 0)$, $g = 46$

16d. $Y = (-1, 0, 2, 5)$, $g = 25$

17a. $X = (0, 0, 12, 4)$, $Y = (3/2, 0, 2)$, $f = g = 52$

17b. $X = (0, 6, 5, 0)$, $Y = (-3, 4, 0)$, $f = g = 45$

17c. VN

17d. $X = (0, 3, 9, 0, 2)$, $Y = (-1, 2, -2)$, $f = g = 28$

18a. VN

18b. $Y = (3/4, 1/2, 0)$, $X = (0, 3, 20, 0)$, $f = g = 46$

18c. $Y = (1/2, 6, 21/2, 0)$, $X = (0, 21, 11, 2)$, $f = g = 85$

18d. $Y = (1, 5, 3)$, $X = (6, 0, 5, 2, 0)$, $f = g = -6$
