



Contrôle Continu de Mécanique

Exercice 1 (6pts):

- A. On suspend un solide de masse m à un ressort de raideur k , dont la dimension est $[k]=MT^{-2}$.
Trouver l'expression de l'accélération de la pesanteur g en l'a supposant de la forme :
 $g = c m^{\alpha} x^{\beta} k^{\gamma}$
avec c une constante sans dimensions et x l'allongement du ressort à l'équilibre
- B. Déterminer l'incertitude relative sur g en fonction de Δm , Δk et Δx .

Exercice 2 (8pts):

- A. On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(2, 0, 0)$, $B(2, -2, 0)$ et $C(2, 3, -1)$.
1- Calculer le produit vectoriel $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$
2- Calculer l'aire du triangle OAB.
3- Calculer le produit mixte $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$, En déduire le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs
- B. Ecrire le vecteur $\vec{C} = x \cdot \vec{i} - 2 \cdot y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ en coordonnées cylindriques c-à-d en fonction de ρ , θ , z et \vec{u}_{ρ} , \vec{u}_{θ} , \vec{u}_z (en utilisant les relations de passage entre les deux systèmes de coordonnées).
- C. Si la position du point M est donnée par $\begin{cases} \vec{OM} = t^3 \vec{u}_{\rho} + 5t^2 \vec{u}_z \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante)
Trouver l'expression des vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} en coordonnées cylindriques.

Exercice 3 (6pts):

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes :

$$x = t^2 - 1, \quad y = 2t$$

Trouver :

- 1- L'équation de la trajectoire.
- 2- Les composantes de la vitesse et son module.
- 3- Les composantes de l'accélération et son module.
- 4- La nature du mouvement.
- 5- Les accélérations tangentielle et normale.
- 6- Le rayon de courbure.

Bon courage

Corrigé du contrôle continu de la première année MI 2018/2019

Exercice1 (6pts) :

1- l'expression de l'accélération de la pesanteur g : **04 pts**

On considère la formule de g ($g = c m^\alpha x^\beta k^\gamma$) est homogène

$$\left\{ \begin{array}{l} [g] = [c] [m]^\alpha [x]^\beta [k]^\gamma \quad (0.25\text{pts}) \\ [g] = [a] = \mathbf{LT}^{-2} \quad (0.25\text{ pts}) \\ [x] = \mathbf{L} \quad (0.25\text{ pts}) \\ [k] = \mathbf{MT}^{-2} \quad (0.25\text{ pts}) \\ [c] = \mathbf{1} \quad (0.25\text{ pts}) \\ [m] = \mathbf{M} \quad (0.25\text{ pts}) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{LT}^{-2} = (\mathbf{M})^\alpha (\mathbf{L})^\beta (\mathbf{MT}^{-2})^\gamma \quad (0.25\text{pts})$$

$$\mathbf{LT}^{-2} = \mathbf{M}^{\alpha+\gamma} \mathbf{L}^\beta \mathbf{T}^{-2\gamma} \quad (0.25\text{pts})$$

Par identification on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \quad (0.25\text{pts}) \\ \beta = 1 \quad (0.25\text{pts}) \\ -2\gamma = -2 \quad (0.25\text{pts}) \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1 \quad (0.25\text{pts}) \\ \beta = 1 \quad (0.25\text{pts}) \\ \gamma = 1 \quad (0.25\text{pts}) \end{array} \right.$$

$$g = c m^{-1} x k \quad \text{Ou bien} \quad g = c \frac{x k}{m} \quad (0.5\text{pts})$$

2- L'incertitude relative $\Delta g/g$ en fonction de Δx , Δk et Δm . **02 pts**

Méthode logarithmique :

$$\log g = \log c + \log x + \log k - \log m \quad (0.5\text{pts})$$

$$\text{En passant à la dérivée} \quad \frac{dg}{g} = \frac{dx}{x} + \frac{dk}{k} - \frac{dm}{m} \quad (0.5\text{pts})$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta k}{k} \right| + \left| -\frac{\Delta m}{m} \right| \quad (0.5\text{pts}) \Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta m}{m} \quad (0.5\text{pts})$$

Exercice 2 (8pts) :

A- **02 pts** Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$1- \text{ Le produit vectoriel } \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{k} \quad (0.5\text{pts})$$

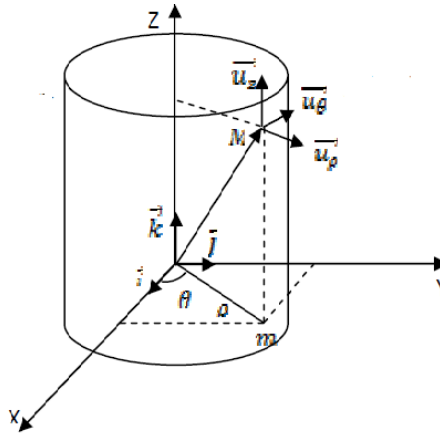
$$2- \text{ L'aire du triangle OAB ; } S_{OAB} = \frac{|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}|}{2} = 2 \quad (0.5\text{pts})$$

$$3- \text{ Le produit mixte } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) ; (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = (-4\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = 4 \quad (0.5\text{pts})$$

Le volume du parallélépipède formé des 3 vecteurs est 4m^3 (0.25pts)

B. L'écriture du vecteur $\vec{C} = x \cdot \vec{i} - 2 \cdot y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ en coordonnées cylindriques : **03 pts**

Les relations de passage entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes



$$\begin{cases} x_M = \rho \cos \theta \\ y_M = \rho \sin \theta \\ z_M = m \end{cases} \quad (0.75 \text{pts})$$

(0.25pts)

Donc le vecteur \overrightarrow{OM} en coordonnées cartésiennes s'écrit $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$
 $\overrightarrow{OM} = \rho(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + z \vec{k}$

On avait : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$ (en coordonnées cylindriques)

Par identification $\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ (0.25pts) et $\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ (0.25pts) et $\vec{u}_z = \vec{k}$ (0.25pts)

En utilisant le tableau de passage (0.25pts),

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta \quad (0.25 \text{pts}) \text{ et}$$

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta \quad (0.25 \text{pts}) \text{ et } \vec{k} = \vec{u}_z \quad (0.25 \text{pts})$$

	\vec{u}_ρ	\vec{u}_θ	\vec{u}_z
\vec{i}	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
\vec{j}	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
\vec{k}	0	0	1

Le vecteur \vec{B} s'écrit alors

$$\vec{B} = \rho \cos \theta (\cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta) - 2 \rho \sin \theta (\sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta) + z \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \rho (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \vec{u}_\rho - 3 \rho \sin \theta \cos \theta \vec{u}_\theta + z \vec{u}_z \quad (0.25 \text{pts})$$

C. La position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^3 \vec{u}_\rho + 5t^2 \vec{u}_z \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante) **03 pts**

1. La vitesse s'écrit : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 3t^2 \vec{u}_\rho + t^3 \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + 10t \vec{u}_z + 5t^2 \frac{d\vec{u}_z}{dt}$ (0.5pts)

avec $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \vec{u}_\theta$ (0.25pts) et $\frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$ (0.25pts)

$$\Rightarrow \vec{v} = 3t^2 \vec{u}_\rho + t^3 \omega \vec{u}_\theta + 10t \vec{u}_z \quad (0.5 \text{pts})$$

2. L'accélération s'écrit

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6t \vec{u}_\rho + 3t^2 \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + 3t^2 \omega \vec{u}_\theta + t^3 \omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + 10 \vec{u}_z \quad (0.5 \text{pts})$$

avec $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \omega \vec{u}_\theta$ (0.25pts) et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\omega \vec{u}_\rho$ (0.25pts)

Alors $\vec{a} = (6t - t^3 \omega^2) \vec{u}_\rho + 6t^2 \omega \vec{u}_\theta + 10 \vec{u}_z$ (0.5pts)

Exercice 3: (6pts)

1- L'équation de la trajectoire 0.5 pts

Nous avons $x(t) = t^2 - 1$ et $y = 2t$ donc $t = y/2$ (0.25pts)

Donc $x = (y/2)^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} - 1$ (0.25pts)

2- Les composantes de la vitesse et son module 01.25 pts

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (0.5pts) \Rightarrow \begin{cases} v_x = 2t \\ v_y = 2 \end{cases} \quad (0.5pts)$$

Le module de la vitesse :

$$\vec{v} = 2t \vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = v = \sqrt{4t^2 + 4} \quad (0.25pts)$$

3- les composantes de l'accélération et son module 01.25 pts

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (0.5pts) \Rightarrow \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 0 \end{cases} \quad (0.5pts)$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} \Rightarrow |\vec{a}| = a = 2 \text{ m/s}^2 \quad (0.25pts)$$

4- La nature du mouvement 0.5 pts

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 2t \cdot 2 = 4t > 0 \quad (0.25pts) \Rightarrow \text{Le mouvement est uniformément accéléré.} \quad (0.25pts)$$

5- les accélérations normale et tangentielle

• L'accélération tangentielle 01 pts

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad (0.25pts) \Rightarrow a_T = \frac{d(\sqrt{4t^2+4})}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+4}} = \frac{4t}{v} \quad (0.75pts)$$

• L'accélération normale 01 pts

$$\text{Nous avons } a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \text{donc } a_N^2 = a^2 - a_T^2 \quad (0.5pts)$$

$$a_N^2 = 4 - \frac{16t^2}{4t^2+4} \Rightarrow a_N^2 = \frac{16}{v^2} \Rightarrow a_N = \frac{4}{v} \quad (0.5pts)$$

$$6- \text{ Le rayon de courbure 0.5 pts } \quad a_N = \frac{v^2}{R} \quad (0.25pts) \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{4} \quad (0.25pts)$$