

SCIENCES SUP

*Cours et exercices corrigés*

Écoles d'ingénieurs • Masters

# MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS FINIS

3<sup>e</sup> édition

*Jean-Charles Craveur*

DUNOD

# **MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS FINIS**

## **Cours et exercices corrigés**

# Consultez nos parutions sur dunod.com

Dunod Éditeur, édition de livres, Microsoft Press, ETSF, Ediscience, IntraEditions

Recherche  OK

Collection Index thématique

Mon compte

Accueil Contact

Interviews

Réinventer les RH (urgence) Gilles Verrier

Ramassez 2008 : exigez la nouvelle formule ! Thierry de Montbrial

toutes les interviews

Club Enseignants

Evénements

Découvrez le **Python** Profession dirigeant

En librairie ce mois-ci

Développement personnel et coaching : découvrez le **PRODIGE** !

www.dunod.com

Rechercher

Sciences et Techniques Informatique Gestion et Management Sciences Humaines

**Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés**

**Bacchus 2008**  
Enjeux, stratégies et pratiques dans la filière vitivinicole  
Jean-Pierre Couderc, Hervé Hanen, François d'Hauterville, Etienne Montagne

**Profession dirigeant**  
De la conception du changement à l'action  
Gérard Roth, Michel Kuryla

**PYTHON**  
Petit guide à l'usage du développeur agile  
Tarek Ziade

**100 ans de psychologie « sport »**  
150 petites expériences de psychologie du sport pour mieux comprendre les champions, et les autres  
Yvan Paquet, Pascal Legrand, Elisabeth Rosnet, Stéphane Rusinek

**LES BIBLIOTHEQUES DES METIERS**

Bibliothèque du DSI  
Gestion industrielle  
Métiers de la vigne et du vin  
Marketing et Communication  
Directeur d'établissement social et médico-social  
Toutes les bibliothèques

**LES NEWSLETTERS**

Action sociale  
Psychologie  
Développement personnel et bien-être  
Entreprise  
Expertise comptable  
Informatique et ITC  
Industrie  
Toutes les newsletters

bibliothèque des métiers nouveautés Microsoft Press Ediscience IntraEditions support-aw.com

Force 4gite

# MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS FINIS

Cours et exercices corrigés

*Jean-Charles Craveur*

Enseignant à l'Institut supérieur des matériaux du Mans

**3<sup>e</sup> édition**

DUNOD





# Chapitre 1

## Rappels de mécanique

### 1.1. VECTEUR DES CONTRAINTES

On ne s'intéresse qu'aux **milieux continus** qui sont des domaines de l'espace à trois dimensions. Ce sont des corps purement fictifs où la matière est uniformément distribuée dans le volume, de sorte que tout élément infinitésimal a les mêmes propriétés que le corps lui-même. On suppose de plus qu'au voisinage d'un point quelconque du milieu, ces propriétés sont des fonctions continues et différentiables par rapport à toutes les variables définissant le point (coordonnées, temps...). Ces milieux continus ne subissent que des **transformations continues**. En particulier, deux points initialement voisins le restent à tout instant, tout en ayant des déplacements quelconques (finis ou infinitésimaux). Les **forces de surface** sont réparties sur la surface (ou portion de surface) extérieure du corps, elles ont la dimension d'une pression en  $\text{N/m}^2$  dans le système international. Ce sont par exemple des efforts de contact entre deux solides mais aussi les efforts exercés par un fluide sur la structure (vent, neige, charge hydrostatique dans une cuve ...). En Résistance Des Matériaux, si la surface  $dS$  sur laquelle s'exerce l'effort est suffisamment petite devant la surface  $S$  de l'enveloppe du corps, on admet que la force est ponctuelle. En Mécanique des Milieux Continus, ce modèle mathématique n'est pas utilisable. Les efforts volumiques sont des actions à distance exprimées en  $\text{N/m}^3$ , réparties dans le volume de la structure. Il n'y a pas d'agent extérieur qui transmet ces efforts, comme dans le cas précédent. Les forces d'inertie, les forces centrifuges, les forces thermiques ou les forces électro-magnétiques en sont des exemples.

A l'intérieur de toute structure mécanique, il existe des actions mécaniques s'exerçant entre les différentes parties qui le constituent, appelées « forces intérieures » par abus de langage. Pour déterminer ce qui se produit dans la structure sous l'action des forces extérieures, on est amené à imaginer des

coupures virtuelles au sein de la structure considérée, et à prendre en compte les actions mutuelles de ces deux parties au travers de la section effectuée. On isole la partie I, la section est définie par un point de passage M, et la normale à la section, dirigée vers l'extérieur de la partie I considérée. On appelle **facette** un élément infinitésimal de surface  $dS$  appartenant au plan de coupe. Soient  $F_I$  et  $F_{II}$  les deux systèmes partiels de forces extérieures respectivement appliqués aux parties I et II. Pour qu'en isolant la partie I, elle garde la position d'équilibre, il faut y appliquer les efforts extérieurs  $F_I$  et les actions de la partie II sur la partie I dans la section (Figure 1.1).  $\Delta \vec{F}$  est la force qui représente l'action exercée en M par la partie II sur la partie I.

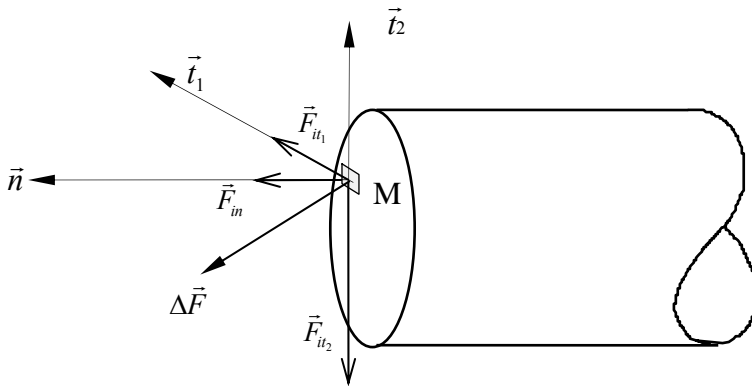


Figure 1.1 : Efforts en M dans la section orientée

On appelle **vecteur contrainte** en M suivant la normale  $\vec{n}$  le vecteur défini par :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{dS}$$

Bien que la notion de contrainte soit très largement utilisée en mécanique, c'est une notion purement mathématique. Une contrainte ne se mesure pas. On a accès, sur la surface externe des solides, à des déformations par l'intermédiaire des **jauges de déformations**, que les francophones appellent **jauges de contraintes**. Une contrainte est homogène à une pression, c'est-à-dire à une force par unité de surface. Elle s'exprime dans le système SI en Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ) mais on utilise souvent le Méga-Pascal ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$ ). Le vecteur contrainte peut être projeté sur la normale et selon deux directions qui lui sont orthogonales et sont contenues dans le plan de la facette,

ou dans tout autre système d'axes. Les composantes du vecteur contrainte dans le repère attaché à la section en M sont :

$$\frac{\Delta F_n}{dS}, \frac{\Delta F_{t1}}{dS}, \frac{\Delta F_{t2}}{dS}$$

Ces rapports ont une limite finie lorsque  $dS$  tend vers 0. Par abus de langage, on parle de contrainte au point M. En fait, il s'agit des trois composantes du **vecteur contrainte** au point M, dans le plan de coupe dont la normale est orientée selon  $\vec{n}$ .

$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{dS}$  est une **contrainte normale** car c'est la composante du vecteur contrainte au point M orthogonale au plan de coupe. On la note généralement  $\sigma_{nn}$ . C'est une traction si elle est dirigée dans le sens de la normale sortante, auquel cas elle a une valeur positive. C'est une compression si elle est dirigée dans le sens de la normale rentrante, auquel cas, elle a une valeur négative.

$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{t1}}{dS}$  et  $\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{t2}}{dS}$  sont les **contraintes tangentielles** ou **contraintes de cisaillement** et elles sont notées respectivement  $\sigma_{nt1}$  et  $\sigma_{nt2}$  ou  $\tau_{nt1}$  et  $\tau_{nt2}$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} = \sigma \vec{n} + \tau_{nt1} \vec{t}_1 + \tau_{nt2} \vec{t}_2$$

Dans la notation  $\sigma_{ij}$  ou plus fréquemment  $\tau_{ij}$ , le premier indice indique que la normale au point considéré est portée par l'axe dont le vecteur directeur est  $i$ . Le second indice indique quelle est la composante du vecteur contrainte qui est considérée. On a défini le vecteur contrainte et ses composantes pour la partie I dans la section orientée passant par le point M. Par application du principe d'action/réaction, le vecteur contrainte représentant l'action en M de la partie I sur la partie II est l'opposé de celui représentant l'action de la partie II sur la partie I. Mais la normale sortante pour la partie II est l'opposée de la normale sortante pour la partie I, de sorte que les composantes du vecteur contrainte en M sont les mêmes que l'on considère l'équilibre de l'une ou l'autre des deux parties. La contrainte en un point de la section caractérise intrinsèquement ce qui s'y passe et ne dépend pas du fait que l'on examine l'action de II sur I ou de I sur II.

## 1.2. MATRICE DES CONTRAINTES

Puisqu'il existe une infinité de plans passant par un point donné, on y définit une infinité de vecteurs contraintes qui forment le **faisceau des contraintes** en M, l'extrémité du vecteur contrainte en M décrivant dans l'espace une surface. La contrainte normale et les contraintes tangentielles changent avec

l'orientation de la normale sortante. La connaissance au point M d'une matrice 3x3 appelée **matrice des contraintes** est néanmoins suffisante pour déterminer **l'état de contrainte** en ce point pour une orientation quelconque de la facette. Prenons trois axes de référence absolus, par exemple les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . On suppose connus les vecteurs contraintes en M suivant les directions de ces trois axes. Soit un tétraèdre infinitésimal d'origine M dont trois arêtes sont parallèles aux axes (Figure 1.2). Ce tétraèdre étant en équilibre, la somme des efforts qui y sont appliqués est nulle.

$$\vec{T}(M, -\vec{x})ds_1 + \vec{T}(M, -\vec{y})ds_2 + \vec{T}(M, -\vec{z})ds_3 + \vec{T}(M, \vec{n})ds = \vec{0}$$

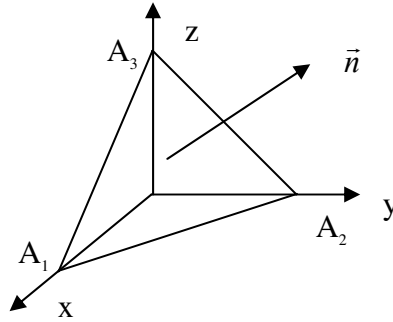


Figure 1.2 : Equilibre du tétraèdre

On projette cette équation vectorielle sur les trois axes de coordonnées, on obtient :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = [\sigma] \vec{n}$$

La matrice  $[\sigma]$  est la matrice des contraintes au point M. Si on connaît les vecteurs contraintes sur trois facettes deux à deux perpendiculaires, on peut calculer le vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque. Cette matrice est définie par neuf termes qui sont les trois composantes des trois vecteurs contraintes dans un repère orthonormé direct arbitraire de référence. La relation ci-dessus donne les composantes du vecteur contrainte dans le repère  $Oxyz$ . Les composantes normales et tangentielles sont les composantes du vecteur contrainte dans le repère lié à la facette (Figure 1.3). La matrice des contraintes est représentative d'un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes**.

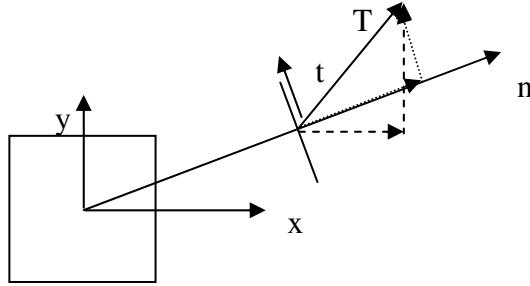


Figure 1.3 : Décomposition du vecteur contrainte

### 1.3. ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Isolons autour du point M un volume élémentaire de côtés  $dx$  et  $dy$ , d'épaisseur uniforme  $\Delta z$ , et intéressons-nous aux contraintes tangentielles perpendiculaires à l'axe  $z$  (Figure 1.4). Le volume élémentaire étant arbitraire et infinitésimal, il est toujours possible de choisir des dimensions arbitraires telles que les contraintes évoluent peu entre deux faces parallèles, auquel cas un développement limité au premier ordre s'avère suffisant pour donner l'évolution des contraintes. Les forces de volume éventuelles ont une résultante qui passe par le centre de gravité du volume, à savoir le point M, leur moment par rapport au point M est nul. On suppose, au vu des dimensions arbitraires des côtés du volume, qu'il en est de même pour les contraintes normales : elles n'engendrent aucun moment. Pour les contraintes tangentielles, la convention est que, ayant choisi une facette de référence, le cisaillement  $y$  est représenté dans le sens trigonométrique ; sur la facette suivante, le cisaillement est représenté dans le sens opposé. Lorsqu'un effort fait basculer la structure de  $x$  vers  $y$  dans le sens trigonométrique, le moment associé est compté positivement. Il est négatif dans le cas contraire. Du fait de l'équilibre en rotation, la somme des quatre moments dus aux contraintes tangentielles appliquées sur le volume élémentaire autour de l'axe  $Oz$  est nulle :

$$\left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} dy dz - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{2} dx dz - \tau_{yx} \frac{dy}{2} dx dz + \tau_{xy} \frac{dx}{2} dy dz = 0$$

L'équation ci-dessus est vraie quel que soit l'élément de volume. Les longueurs  $dx$  et  $dy$  étant arbitraires et infinitésimales, il est légitime de supposer que les variations des contraintes sur  $dx$  et  $dy$  sont négligeables par rapport aux contraintes elles-mêmes. Il reste après simplification l'égalité entre les deux contraintes de cisaillement agissant sur deux facettes perpendiculaires :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

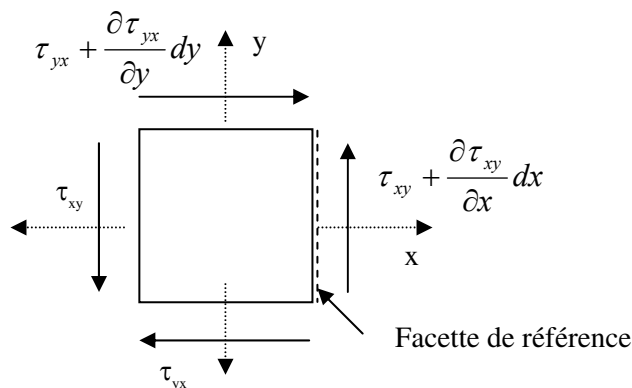


Figure 1.4 : Equilibre en rotation (contraintes normales et cisaillements)

Par un raisonnement similaire sur les autres faces du volume élémentaire, on montre que le tenseur des contraintes est symétrique : c'est le **théorème de réciprocité des contraintes tangentielles**. Ceci implique qu'avec la convention de signe utilisée, les contraintes de cisaillement agissant sur deux faces adjacentes sont toutes les deux orientées vers l'arête commune ou en sens inverse. Il en résulte que la matrice des contraintes est entièrement déterminée par la connaissance de six de ses neuf termes : les trois contraintes normales et trois des six contraintes de cisaillement. La matrice des contraintes est une matrice symétrique.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{ou} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Soit maintenant un petit volume élémentaire autour de M, en équilibre dans la structure soumise à des forces de volume de densité  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$ . Sur chaque facette du volume s'exercent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. Ecrivons l'équilibre en translation sur  $x$  du volume élémentaire en ne représentant sur chaque face que la contrainte agissant selon  $x$  pour simplifier la représentation graphique. Si la contrainte a pour valeur  $\sigma_{xx}$  sur la face 1, la force qui s'y exerce est  $-\sigma_{xx}dydz$  car la normale sortante de la face 1 est dirigée selon les  $x$  négatifs. La contrainte est susceptible de varier d'une face à celle qui lui est parallèle. Mais les dimensions de l'élément de volume sont infinitésimales de sorte qu'il est possible de supposer qu'un développement au premier ordre traduit cette évolution. En respectant ces conventions, on représente sur la Figure 1.5 les forces appliquées sur chaque facette selon l'axe  $x$ . La somme de toutes les forces dans chaque direction est nulle pour chaque volume élémentaire d'une structure elle-même en équilibre et après simplification, il reste :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + F_x dx dy dz = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

Par un raisonnement analogue, la somme des forces appliquées sur l'axe  $y$  est nulle ainsi que celle sur l'axe  $z$ . On obtient des formules équivalentes à la précédente en permutant les indices, qui se regroupent en une seule en adoptant les conventions classiques pour les indices muets et les dérivées partielles :

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$$

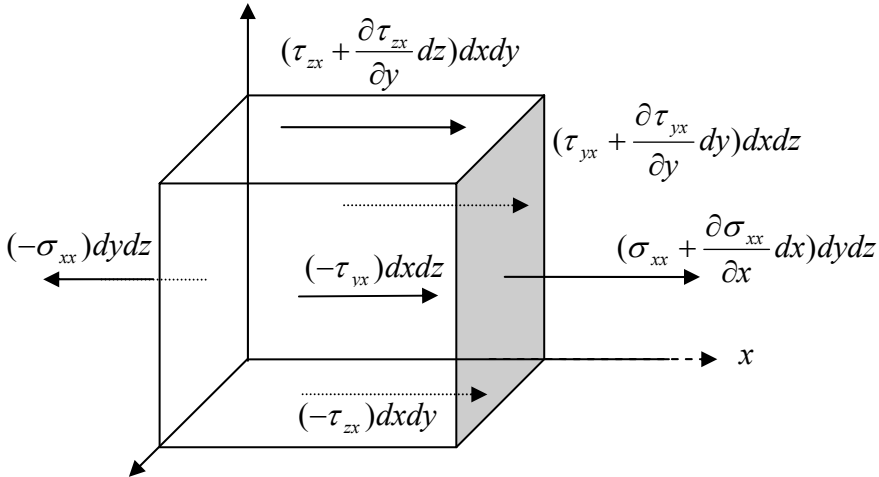


Figure 1.5 : Equilibre en translation selon l'axe  $x$

Cette équation doit être vérifiée en tout point du solide et est considérée comme l'équation de base de la mécanique des milieux continus. On peut aussi partir de l'équation vectorielle globale, en appelant  $D$  le domaine continu et  $S$  sa frontière :

$$\iint_S \vec{T} dS + \iiint_V \vec{f} dv = 0$$

Le premier terme représente l'action de toutes les forces de surfaces, le second l'action de toutes les forces de volume. En utilisant le théorème de la divergence et le fait que cette relation soit vraie quel que soit le volume choisi, on écrit :



$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{f} = \vec{0}$$

Cette écriture est encore plus compacte que la précédente, car elle est vectorielle alors que la relation (1.3) est scalaire et représente l'une des trois équations d'équilibre, les deux autres étant obtenues par permutation sur les indices. Les plans de coupe utilisés jusqu'à présent étaient des plans parallèles aux plans de coordonnées  $xOy$ ,  $xOz$  et  $yOz$ . Quand, dans un plan de coupe d'orientation donnée, on change l'orientation des deux axes du plan, les nouvelles composantes du vecteur contrainte sont reliées aux anciennes par des relations faisant intervenir  $\theta$ , angle entre l'axe des  $x$  et la normale à la facette. En supposant par exemple que le plan de coupe soit  $xOy$ , donc de normale  $Oz$ , les relations entre composantes sont :

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{xy} \sin(2\theta) \\ \sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{xy} \sin(2\theta) \\ \sigma'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \sigma_{xy} \cos(2\theta) \end{cases}$$

Il existe dans le plan deux orientations particulières, orthogonales entre elles, pour lesquelles le cisaillement est nul, solutions de l'équation, les contraintes normales sont alors maximale et minimale (Figure 1.6)

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Ces deux repères sont les **repères principaux pour les contraintes**. Elles y sont notées traditionnellement  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$ , et sont appelées **contraintes principales**. Il existe dans le plan deux autres orientations particulières, à  $\pm 45$  degrés des précédentes, pour lesquelles la contrainte de cisaillement est extrême, les contraintes normales étant alors égales. Il existe toujours trois contraintes principales, de valeur éventuellement nulle. Par convention, ces contraintes sont rangées dans l'ordre décroissant de leur valeur algébrique, ce qui n'implique pas obligatoirement l'ordre décroissant de leur valeur absolue :

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Dans le repère principal des contraintes, la matrice est diagonale et s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

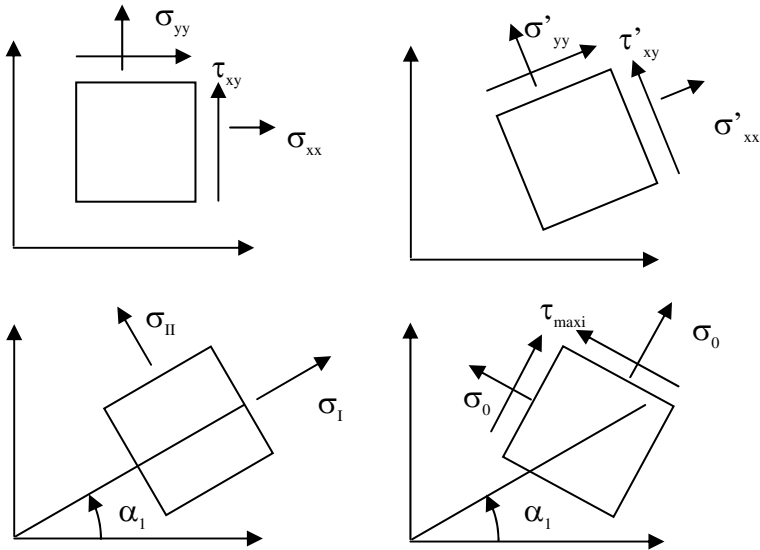


Figure 1.6 : Contraintes en un point pour différentes orientations de la normale

Les trois invariants du tenseur des contraintes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sum_i \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \frac{1}{2} \sum_i (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \tau_{ij}^2) = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \\ I_3 = \det[\sigma] = \prod_i \sigma_{ii} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{array} \right.$$

Beaucoup d'autres invariants peuvent être obtenus par combinaison de ces trois invariants de base qui peuvent être écrits aussi bien en termes des composantes du tenseur des contraintes qu'en termes des composantes principales.

La **contrainte hydrostatique** et le **tenseur sphérique** dit aussi **tenseur isotrope** sont définis par la relation suivante :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii} = \frac{I_1}{3} \Rightarrow [\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

On peut toujours décomposer le tenseur des contraintes en deux : la partie sphérique et la **partie déviatorique** définie par :

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij}] - [\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

Ce déviateur est diagonalisable, a trois valeurs propres et trois vecteurs propres colinéaires aux vecteurs propres du tenseur des contraintes lui-même. Son premier invariant est nul, le deuxième joue un rôle très important en mécanique, il est à la base du critère de plasticité de Von Mises et a pour expression :

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]$$

## 1.4. TENSEUR DES DÉFORMATIONS

Si l'on fait l'hypothèse de linéarité géométrique, c'est-à-dire de petites rotations et de petites déformations, on définit les **déformations**  $\varepsilon_{ij}$  par la formule classique de la mécanique linéaire,  $u_k$  est le déplacement dans la direction  $k$  :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En mécanique linéaire,  $\varepsilon_{ii}$  est la variation relative de déplacement, dans la direction de l'axe  $i$ , entre deux points très proches avant déformation.  $\varepsilon_{ii}$  est comptée positivement lorsqu'il y a allongement ou étirement et négativement dans le cas contraire. Les déformations sont symétriques du fait de la commutativité de l'addition des nombres réels.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

En mécanique linéaire, la quantité  $2\varepsilon_{ij}$  (**distorsion angulaire**) représente la variation d'angle entre les directions  $i$  et  $j$ . C'est le double de la **déformation angulaire**  $\varepsilon_{ij}$ . Les déformations dépendent des dérivées des déplacements et non pas des déplacements eux-mêmes. Les déformations sont des quantités adimensionnelles, souvent exprimées en pourcents. On définit le **tenseur des déformations** en un point, tenseur qui peut toujours être diagonalisé.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

## 1.5. RELATIONS DE COMPATIBILITÉ

Ces relations lient entre elles les dérivées secondes des composantes de la déformation en un point. Si elles sont vérifiées, elles garantissent l'existence et l'unicité du champ de déplacement solution du problème. En pratique, elles n'apparaissent pas explicitement dans la formulation des éléments finis de type déplacement car l'approximation portant a priori sur le champ de déplacement, celui-ci existe et est unique dans chaque élément.

## 1.6. RELATIONS CONTRAINTES-DÉFORMATIONS

On ne considère ici que les **matériaux homogènes** : les caractéristiques du matériau ne dépendent pas du point étudié. On se limite également au **domaine élastique linéaire**, les contraintes varient proportionnellement à la déformation. Les déformations doivent être suffisamment petites de manière à rester dans la partie linéaire de la loi constitutive et présenter le même comportement en traction et en compression. La loi reliant les déplacements aux déformations est également linéaire : on se place donc dans le cadre de la mécanique linéaire. Le tenseur des contraintes, symétrique, est entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$$

La relation qui relie ces deux « vecteurs » se note sous la forme d'une matrice carrée de dimension 6 : c'est la **matrice de Hooke** dite aussi **loi constitutive**.

$$\{\sigma\} = H\{\varepsilon\}$$

Cette matrice 6x6 n'est pas symétrique à moins de l'exprimer en utilisant les distorsions angulaires  $\gamma_{ij}$  au lieu des déformations angulaires  $\varepsilon_{ij}$ . Pour un **matériau homogène et isotrope**, c'est-à-dire un matériau pour lequel les caractéristiques mécaniques sont les mêmes en tout point et dans toutes les directions de l'espace, deux coefficients élastiques sont suffisants pour la relation précédente.  $E$  est le **module de Young**, encore appelé **module d'élasticité**,  $\nu$  est le **coefficient de Poisson**. Le coefficient qui relie les contraintes tangentielles aux déformations angulaires est le **module d'élasticité en cisaillement** ou le **module de glissement**, traditionnellement noté  $G$ .

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Sous l'action de contraintes normales, il ne se produit aucune déformation en cisaillement, donc pas de changement de forme. Sous l'action de contraintes tangentielles, il ne se produit aucune déformation axiale, donc pas de changement de dimension. Quand on exerce une contrainte normale, les dimensions changent selon les trois axes, quand on exerce une contrainte de cisaillement, la variation de forme ne se produit que dans le plan du cisaillement. Le module de Young et le module de glissement sont homogènes à des contraintes et s'expriment en N/m<sup>2</sup> dans le système international, le coefficient de Poisson est adimensionnel. Il relie la déformation obtenue dans la direction  $j$  quand on impose une déformation dans la direction  $i$ , il traduit le couplage entre les différentes directions de l'espace :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}$$

Un matériau isotrope est caractérisé par un coefficient de Poisson dont la valeur est de l'ordre de 0,3 pour la plupart des matériaux métalliques utilisés en construction. Pour certains matériaux, il n'y a pas de couplage, le coefficient de Poisson est nul (liège). Pour d'autres, le couplage est total (**matériaux incompressibles**) : quand on exerce une traction sur une éprouvette constituée d'un tel matériau, son volume ne change pas, le coefficient de Poisson est alors égal à 1/2 (caoutchouc, silicone).

## 1.7. PROBLÈMES D'ÉLASTICITÉ

Résoudre un problème d'élasticité consiste à déterminer, en tout point de la structure en équilibre, 15 grandeurs dans le cas tridimensionnel :

6 contraintes :	$\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}$
6 déformations :	$\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{xz} \quad 2\varepsilon_{yz}$
3 déplacements :	$u \quad v \quad w$

Ces grandeurs doivent vérifier :

3 relations d'équilibre :	$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$
6 relations contraintes/déformations :	$\sigma = H\varepsilon$
6 relations déformations/déplacements :	$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$

auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites de type déplacement imposé, nul ou non et les conditions aux limites de type équilibre.

Pour un problème bi-dimensionnel, 8 grandeurs seulement doivent être déterminées en tout point :

3 contraintes :	$\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}$
3 déformations :	$\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}$
2 déplacements :	$u \quad v$

Ces grandeurs doivent vérifier :

2 relations d'équilibre :	$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$
3 relations contraintes/déformations :	$\sigma = H\varepsilon$
3 relations déformations/déplacements :	$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$

auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites de type déplacement imposé, nul ou non et les conditions aux limites de type équilibre.

## 1.8. LIMITE ÉLASTIQUE

Soit un point M d'une structure en équilibre. L'état de contrainte en ce point est tri-axial, caractérisé par les trois contraintes principales en ce point  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ . Il existe un certain niveau de contrainte au-delà duquel la structure casse (matériau fragile) ou subit des modifications irréversibles en rentrant dans le domaine plastique (matériau ductile). Or les contraintes sont en tous points variables en intensité et en direction, leur étude exhaustive n'est pas envisageable. La question est donc de prévoir le comportement de la structure pour un état de contrainte qui n'est pas uniaxial. Expérimentalement, on réalise des essais mono, bi ou tri axiaux et pour chaque état de contrainte, on regarde

pour l'échantillon sollicité si on est ou non dans le domaine élastique. Par exemple, se fixant les deux premières contraintes principales, on cherche la limite que peut atteindre la troisième. En représentant l'ensemble des points limites dans un espace tridimensionnel où les axes seraient les trois directions principales des contraintes, on construit une surface dans l'espace, appelée **surface de plasticité**. Un **critère de limite élastique** est une relation entre les composantes du tenseur des contraintes en un point qui permet de ramener l'état de contrainte défini par une matrice des contraintes en un scalaire. Le scalaire obtenu par utilisation du critère est la **contrainte équivalente** qui reflète l'état de contrainte en un point, indépendamment du type de sollicitation que subit la structure. L'intérêt de cette contrainte équivalente est qu'il est très facile de la comparer à un autre scalaire caractéristique du matériau (sa limite élastique) pour savoir si on est entré ou non dans le domaine plastique. Dans le cas d'un état de contrainte monoaxial, la contrainte équivalente doit être égale à la composante non nulle du tenseur, ou à sa valeur absolue. On pose généralement

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq K$$

Si cette inégalité est satisfaite, le point représentant l'état de contrainte est dans le volume délimité par la surface de plasticité : l'état de contrainte est élastique. Si le critère  $f$  est égal à  $K$ , on est sur la surface de plasticité : on est en plasticité. Le point ne peut pas être en dehors du volume bordé par la surface de plasticité : c'est un état non admissible. Il n'existe pas de critère général, valable pour tous les matériaux. Il existe un certain nombre de critères, et pour chaque matériau, après essais, on détermine quel est le critère qui se rapproche le plus des observations réalisées. En mécanique des structures, pour les matériaux isotropes traditionnels, les deux critères les plus utilisés sont ceux de Tresca et de Von Mises. La limite élastique est en général déterminée à partir d'un essai de traction uniaxial car c'est l'essai mécanique le plus simple à mettre en place. Les éprouvettes sont normalisées et leur section dépend de leur longueur (norme AFNOR).

## 1.9. CRITÈRES

### 1.9.1. Critères mono-axiaux

Les critères mono-axiaux de la traction, de la compression, ou de la déformation ne sont en général plus ou très peu utilisés pour les matériaux métalliques, alors qu'ils le sont encore pour les matériaux composites. Une structure peut être dans le domaine linéaire pour une charge mono-axiale qui engendre la contrainte  $\sigma_1$  selon un axe, pour une charge mono-axiale indépendante qui engendre la contrainte  $\sigma_2$  selon un axe perpendiculaire au premier, mais sortir du domaine linéaire lorsque les deux charges sont appliquées simultanément.

### 1.9.2. Critères multiaxiaux

Le critère de Tresca définit la **contrainte équivalente au sens de Tresca**. Selon l'hypothèse de Tresca, l'écoulement de la matière se produit lorsque la contrainte de cisaillement dépasse la limite admissible notée  $\sigma_e$ . Le cisaillement maximal  $\tau_{\max}$  est donné par la relation :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

où  $\sigma_I$  et  $\sigma_{III}$  sont la plus grande et la plus petite des contraintes principales. A partir d'un essai de traction uniaxiale permettant de déterminer la limite élastique  $\sigma_e$ , le comportement est élastique si

$$\sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_e$$

La Figure 1.7 donne une représentation du critère de Tresca en état plan de contrainte. La limite du domaine élastique est atteinte lorsqu'on arrive sur la frontière de l'hexagone de Tresca.

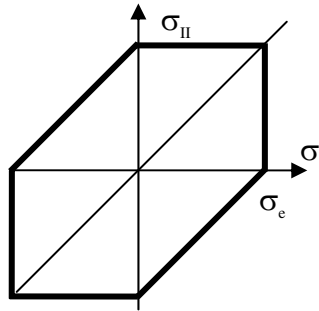


Figure 1.7 : Une représentation du critère de Tresca

Selon l'hypothèse de Von Mises, l'écoulement de la matière se produit lorsque l'énergie de distorsion atteint une valeur critique. La mise en place du critère est basée sur le fait qu'un volume donné de matériau ne peut absorber qu'une quantité limitée d'énergie élastique. Explicité dans le repère principal des contraintes, la **contrainte équivalente au sens de Von Mises** s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_{VM}$$

Le comportement est élastique si la contrainte équivalente est inférieure à la limite élastique du matériau. C'est le critère le plus utilisé dans le monde industriel pour les structures en matériaux métalliques. Une représentation graphique de ce critère pour l'état plan de contrainte est une ellipse qui englobe



le critère de Tresca (Figure 1.8). L'écart maximal entre ces deux critères est d'environ 15% pour un cisaillement pur.

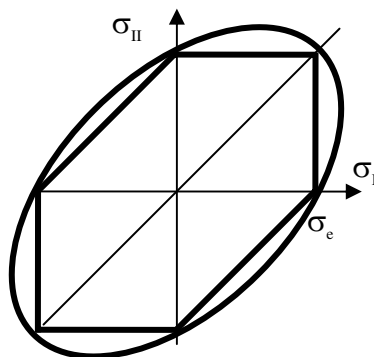


Figure 1.8 : Une représentation du critère de Von Mises

On ne choisit pas un critère : après essais mécaniques, on détermine quel est le critère qui représente le mieux la surface de plasticité du matériau. Le critère de définition de la contrainte équivalente est donc une donnée du matériau pour les calculs. On ne mesure pas une contrainte équivalente, qu'elle soit de Tresca ou de Von Mises. Une contrainte équivalente en un point n'est que la représentation scalaire du tenseur des contraintes en ce point. Une contrainte équivalente de Von Mises ou de Tresca est une quantité positive ou nulle, qui ne permet donc pas de savoir si une partie de la structure est soumise à de la traction ou à de la compression. Pour comprendre la circulation des efforts dans la structure, et distinguer les zones en traction des zones en compression, il faut analyser les contraintes principales et non les contraintes équivalentes. Il existe des matériaux sensibles à la pression hydrostatique, dont le comportement est différent en traction et en compression tels le béton, les sols, les colles : il existe d'autres critères comme ceux de Hill, Drucker-Prager, Raghava...

## 1.10. ÉTAT PLAN DE CONTRAINTE (EPC)

Ce cas s'applique aux structures planes minces, qui ne sont sollicitées que par des charges agissant dans leur plan. Conventionnellement, le plan de la structure est  $xOy$ . L'épaisseur de la structure, très petite par rapport à ses deux autres dimensions, est symétriquement répartie de part et d'autre du plan  $xOy$  qui s'appelle le **feuillet moyen**. Ce type de comportement mécanique est par exemple applicable dans le cas d'un disque mince sollicité dans son plan ou d'une éprouvette de traction pour peu qu'elle soit suffisamment mince. Les hypothèses sur le chargement impliquent la nullité en tout point de 3 des 6 composantes du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

En reportant ces contraintes dans les relations constitutives générales pour un matériau isotrope, on obtient :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

Sous l'action des charges appliquées dans son plan, la structure change d'épaisseur, la déformation transversale se calculant a posteriori à partir des contraintes existant dans le plan de la structure : le problème est bidimensionnel. Les déplacements  $u$  et  $v$  d'un point quelconque du plan, de coordonnées  $x$  et  $y$ , ne dépendent que de  $x$  et de  $y$ . La loi de Hooke s'écrit dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

### 1.11. ÉTAT PLAN DE DÉFORMATION (EPD)

Ce modèle s'applique à un corps de section quelconque, constante, infiniment long, d'axe  $Oz$ , encasté à ses deux extrémités, soumis à un chargement orthogonal à l'axe  $Oz$ , uniforme sur toute sa longueur. Il peut aussi s'appliquer à un cylindre de longueur finie si ses bases sont en appui sur des plans indéformables. Le déplacement dans la direction  $z$  est nul en tout point et les déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  sont indépendants de  $z$ . Les trois déformations hors plan sont nulles :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

Soit deux tranches adjacentes de longueur  $dz$  soumises à des charges selon  $x$  et  $y$ , par exemple en compression. Par effet de Poisson, la « tranche de gauche » a tendance à se dilater selon l'axe  $Oz$ . Mais la « tranche de droite » aussi, dans le sens inverse, de la même quantité : la dilatation selon l'axe  $Oz$  est impossible car la structure est encastée. Chaque « tranche » ne se déforme que dans son plan : la contrainte normale  $\sigma_{zz}$ , non nulle, est la contrainte qui retient chaque « tranche » dans son plan. Les déplacements  $u$  et  $v$  dans un plan quelconque ne dépendent que de  $x$  et de  $y$ . On peut donc résoudre le problème dans un plan de section quelconque dont l'épaisseur est conventionnellement prise égale à 1.

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

On en déduit donc que les deux contraintes de cisaillement transversal au plan sont nulles.  $\sigma_{zz}$  est calculée a posteriori à partir des contraintes ou des déformations dans le plan. Les contraintes non nulles sont indépendantes de  $z$ .

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

La loi de Hooke en état plan de déformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Du fait d'hypothèses et de géométries fondamentalement différentes, il n'y a pas à comparer ces deux approches qui ne s'appliquent pas aux mêmes structures, bien que l'on puisse mathématiquement passer de l'une à l'autre en modifiant les coefficients élastiques.

## 1.12. AXISYMÉTRIE

Le tenseur des déformations s'écrit de façon générale dans le système d'axes cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

Il comporte généralement six composantes non nulles tout comme le tenseur des contraintes exprimé dans ce même repère. L'**axisymétrie** s'applique aux structures géométriquement et matériellement de révolution, les conditions aux limites et les chargements l'étant également,  $Oz$  étant supposé être l'axe de révolution de la structure. Du fait de la symétrie de révolution, toutes les relations sont exprimées dans un repère cylindrique d'axe  $Oz$ . Par raison de symétrie, un point situé dans un plan contenant l'axe de révolution, dit **plan méridien**, ne peut que se déplacer dans ce plan : le déplacement tangentiel  $u_\theta$  est nul en tout point. Le champ des déplacements est entièrement déterminé par le déplacement radial  $u_r$ , le déplacement axial  $u_z$ , eux-mêmes indépendants de l'angle  $\theta$  puisqu'il y a symétrie de révolution. On en déduit que les déformations angulaires  $\varepsilon_{r\theta}$  et  $\varepsilon_{z\theta}$  ainsi que les contraintes de cisaillement  $\tau_{r\theta}$  et

$\tau_{z\theta}$  sont nulles. La loi de comportement est donc de dimension 4 seulement et pour un matériau isotrope, elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{bmatrix}$$

La **déformation tangentielle**  $\varepsilon_{\theta\theta}$  est non nulle : sous l'effet de charges radiales, la structure change de rayon. Il en résulte donc une déformation non nulle  $\varepsilon_{rr}$  qui s'accompagne d'une variation relative de périmètre  $\varepsilon_{\theta\theta}$  et d'une contrainte non nulle  $\sigma_{\theta\theta}$  dite **contrainte circonférentielle** liée à cette variation de périmètre. Les quatre composantes non nulles du tenseur des déformations ont pour expression :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$



## Chapitre 2

### Méthodes d'approximation

#### 2.1. RÉSIDUS PONDÉRÉS

##### 2.1.1. Formulation forte des résidus pondérés

On se propose de résoudre un problème, monodimensionnel dans un premier temps, régi par une équation différentielle qui se met sous la forme suivante dans un certain domaine  $\Omega$ , ici l'intervalle  $[a, b]$ , limité par une frontière  $\Gamma$  :

$$A(u(x)) + g(x) = 0 \quad I)$$

$u(x)$  est la fonction inconnue,  $g(x)$  est une fonction connue.  $x$  prend ses valeurs possibles dans l'intervalle  $[a, b]$ .  $A$  est un opérateur différentiel linéaire. En mécanique puis en thermique par exemple, pour une barre, l'équation locale de l'équilibre ou de la chaleur en régime stationnaire est :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + f_x = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q = 0 \qquad (2)$$

Il existe également des conditions aux limites qui sont nécessairement connues sur la frontière  $\Gamma$  du domaine, en l'occurrence les points  $a$  et  $b$ , par exemple

$$\sigma(a) = -P \quad \text{et} \quad \sigma(b) = 0 \qquad T(a) = T_a \quad \text{et} \quad T(b) = T_b$$

Plus généralement, ces conditions aux limites s'écrivent sur  $\Gamma$  sous la forme :

$$B(u(x)) + h(x) = 0$$

Dans le cas des **méthodes universelles**, on travaille à partir des équations locales. On se donne une approximation ayant une forme possible pour la solution cherchée, et on la reporte dans les équations locales. On cherche ensuite à minimiser l'erreur selon différents critères. L'équation différentielle et

les conditions aux limites peuvent être respectivement multipliées par  $v(x)$  et  $w(x)$  non nulles, complètement arbitraires et elles restent satisfaites dans tout le domaine et sur toute sa frontière :

$$v(x)(A(u(x)) + g(x)) = 0 \quad w(x)(B(u(x)) + h(x)) = 0$$

Puisque les expressions ci-dessus sont nulles en tout point du domaine et en tout point de son enveloppe, leurs intégrales le sont aussi et on peut écrire :

$$\int_{\Omega} v(x)(A(u(x)) + g(x))dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} w(x)(B(u(x)) + h(x))dx = 0$$

Ces deux intégrales peuvent être regroupées, ce qui donne

$$\int_{\Omega} v(x)(A(u(x)) + g(x))dx + \int_{\Gamma} w(x)(B(u(x)) + h(x))dx = 0$$

On a remplacé une équation différentielle locale et un ensemble de conditions aux limites par une forme intégrale sur le domaine appelée **formulation intégrale forte** du problème.  $v$  et  $w$  sont quelconques. On peut également voir que si l'équation ci-dessus est vérifiée quels que soient  $v(x)$  et  $w(x)$ , alors l'équation différentielle est satisfaite en tout point du domaine et les conditions aux limites en tout point de la frontière. Il existe en fait une seule restriction au développement ci-dessus : les intégrales doivent rester définies dans le domaine et sur sa frontière. La fonction  $u(x)$  que l'on cherche est approchée dans le domaine  $\Omega$  par une combinaison linéaire de la forme

$$u^*(x) = \sum_i a_i \phi_i(x)$$

Les fonctions  $\phi_i$  sont connues a priori, les coefficients  $a_i$  sont les inconnues du problème approché. Les fonctions choisies sont appelées **fonctions tests**, **fonctions d'essai** ou **fonctions de forme**. Si on réussit à déterminer les coefficients  $a_i$ , on a une solution approchée du problème. La qualité de la solution approchée dépend bien évidemment du nombre de fonctions  $\phi_i$  et de leur forme analytique. Ces fonctions doivent être linéairement indépendantes et définir une base fonctionnelle.  $u^*(x)$  appartient donc nécessairement à l'espace défini par les  $N$  fonctions choisies. Quand on reporte l'expression de  $u^*(x)$  dans l'équation différentielle (1), cette équation locale n'est évidemment plus satisfaite :

$$A(u^*(x)) + g(x) = R(x) = \sum_i a_i A(\phi_i(x)) + g(x)$$

$R(x)$  est l'erreur commise du fait de l'approximation réalisée, également appelé résidu. Ce résidu représente l'écart entre le zéro que l'on aurait pour la solution exacte et la valeur obtenue. Compte tenu du choix préalable des fonctions d'essai, les meilleures valeurs des coefficients  $a_i$  sont celles pour lesquelles le résidu est minimal ; ce résidu n'est nul que si l'expression approchée  $u^*(x)$  est égale à la solution exacte  $u(x)$  sur tout le domaine.  $v(x)$  étant le **poide** associé au résidu, le premier terme de la formulation intégrale forte peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} v(x) (A(u^*(x)) + g(x)) dx = \int_{\Omega} v(x) R(x) dx$$

De la même manière, on peut reporter l'approximation que l'on se donne dans l'équation (2) puis dans le second terme de la formulation intégrale forte : on obtient un résidu de contour que l'on regroupe avec le précédent. Puis on cherche à annuler le résidu pondéré sur le domaine et sa frontière, l'équation scalaire obtenue faisant intervenir les inconnues  $a_i$  :

$$\int_{\Omega} v(x) R(x) dx + \int_{\Gamma} w(x) R^*(x) dx = 0 \quad (3)$$

Les conditions aux limites étant souvent homogènes ( $h(x) = 0$ ), on choisit des fonctions d'essai  $\phi_i$  qui vérifient systématiquement les conditions aux limites portant sur la fonction dont on se donne une approximation (déplacement, température...).

$$B(u^*(x)) + h(x) = B(u^*(x)) = \sum_i a_i B(\phi_i(x)) = \sum_i a_i \times 0 = R^*(x)$$

Il ne reste alors que le premier terme de l'expression (3).

$$\int_{\Omega} v(x) R(x) dx = 0 \quad (4)$$

Cette équation fait apparaître  $N$  inconnues qui sont les coefficients  $a_i$  définissant la solution approchée  $u^*(x)$ . L'équation devant être vérifiée pour tout  $v$  arbitraire, elle doit l'être pour  $N$  fonctions  $v$  indépendantes, ce qui conduit à la mise en place d'un système algébrique de  $N$  équations à  $N$  inconnues qui sont les  $a_i$ .

$$\begin{aligned} \int v(x) R(x) dx = 0 &\Rightarrow \int v(x) (A(\sum \alpha_i \phi_i(x)) + g(x)) dx = 0 \\ \Rightarrow \sum \alpha_i \int v(x) (A(\phi_i(x)) + g(x)) dx &= 0 \\ \Rightarrow \sum \alpha_i \int v(x) A(\phi_i(x)) dx + \int v(x) g(x) dx &= 0 \end{aligned}$$



En notant  $A(\phi_i) = A_i$ , puis en introduisant la matrice  $\mathbf{K}$  et le vecteur  $\mathbf{f}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \text{première fonction} \quad & \int v_1 A_1 dx \alpha_1 + \int v_1 A_2 dx \alpha_2 + \dots + \int v_1 A_N dx \alpha_N = - \int v_1 g(x) dx \\
 \text{deuxième fonction} \quad & \int v_2 A_1 dx \alpha_1 + \int v_2 A_2 dx \alpha_2 + \dots + \int v_2 A_N dx \alpha_N = - \int v_2 g(x) dx \\
 \text{dernière fonction} \quad & \int v_N A_1 dx \alpha_1 + \int v_N A_2 dx \alpha_2 + \dots + \int v_N A_N dx \alpha_N = - \int v_N g(x) dx \\
 \Rightarrow \quad \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad & \text{avec} \quad K_{ij} = \int_{\Omega} v_i A(\phi_j) dx \quad \text{et} \quad f_i = - \int_{\Omega} v_i g dx
 \end{aligned}$$

$\mathbf{K}$  est une matrice carrée, pleine, non symétrique. La résolution du système fournit le vecteur contenant les  $a_i$ , donnant ainsi la solution approchée  $u^*(x)$ . Dans le vecteur  $\mathbf{f}$ , on voit bien apparaître le terme  $g$  qui provient de l'équation locale, qui est par exemple la charge volumique en mécanique. Mais on calcule les  $a_i$  en utilisant la moyenne sur le domaine de la modulation appliquée à  $g$  par les  $v_i(x)$  et non exclusivement  $g$ . La charge  $\mathbf{f}$  n'est pas la charge réelle  $g$ . On met en place plusieurs méthodes de résidus pondérés mais elles sont toutes basées sur le développement exposé dans ce paragraphe. S'il y a plus d'équations que d'inconnues, la méthode de résolution utilisée est alors celle des moindres carrés, qui est une méthode particulière de résidus pondérés. Dans la méthode de **collocation par points**, on choisit pour  $v_i(x)$  un ensemble de distributions de Dirac aux points  $x_i$  que l'on se donne a priori, et qui s'appellent les points de collocation. Le système mis en place s'écrit :

$$\forall i \quad \int_{\Omega} v_i(x) R(x) dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \delta(x - x_i) R(x) dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(x_i) = 0$$

On cherche à annuler le résidu aux points choisis. Il existe des techniques permettant de déterminer la position optimale de ces points car leur nombre et leur position dans le domaine ont une très grande influence sur la qualité de la solution. Le système mis en place par cette méthode s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A(\phi_1(x_1)) & \dots & A(\phi_n(x_1)) \\ A(\phi_1(x_n)) & \dots & A(\phi_n(x_n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

Dans la méthode de **collocation par sous-domaine**,  $v_i(x)$  est le créneau de valeur 1 sur le sous-domaine  $i$ . Cela conduit à annuler la moyenne du résidu sur chaque sous-domaine. Là encore, le nombre et la taille des sous-domaines ont une grande influence sur la qualité de la solution. Pour la **méthode de Galerkin**, on choisit pour les  $v_i(x)$  les fonctions d'essai  $\phi_i(x)$ . En reportant ces fonctions particulières dans l'expression générale, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} \phi_1(x) A(\phi_1(x)) dx & \int_{\Omega} \phi_1(x) A(\phi_n(x)) dx \\ \int_{\Omega} \phi_n(x) A(\phi_1(x)) dx & \dots & \int_{\Omega} \phi_n(x) A(\phi_n(x)) dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \phi_1(x) g dx \\ \int_{\Omega} \phi_n(x) g dx \end{pmatrix}$$

### 2.1.2. Formulation faible des résidus pondérés

La formulation forte des résidus pondérés pose plusieurs problèmes. On exige de nombreuses propriétés mathématiques pour la fonction approchée  $u^*(x)$  et rien pour les  $v_i(x)$ . En intégrant par parties l'équation (4), on diminue d'un ordre le degré de dérivation des fonctions  $\phi_i$  mais on augmente d'une unité l'ordre de dérivation des  $v_i(x)$  : on est « moins regardant » sur la régularité de la solution approchée. La formulation obtenue par intégration s'appelle la **formulation faible** des résidus pondérés. Elle impose que les  $v_i(x)$  soient continues et au moins une fois dérivables: les méthodes de collocation ne sont plus possibles. La méthode de Galerkin est la plus employée pour cette approche. Malgré cette avancée, il subsiste une difficulté majeure qui, en pratique, limite très fortement l'utilisation de la méthode des résidus pondérés en formulation faible : les fonctions  $\phi_i$  doivent vérifier toutes les conditions aux limites. Or, dès que la géométrie du domaine devient complexe ou que la forme de la solution cherchée devient complexe sur ce domaine, on ne peut plus trouver un ensemble de fonctions  $\phi_i$  indépendantes ayant toutes les propriétés requises, en particulier vérifiant toutes les conditions aux limites.

La seconde avancée majeure consiste à travailler sur la formulation faible complète des résidus pondérés, obtenue à partir de l'équation (3) et sans faire l'hypothèse que l'intégrale de frontière est a priori nulle. On décompose le domaine en sous-domaines et on se donne une solution approchée sur chaque sous-domaine  $u_i^*$ . On n'exige pas de  $u_i^*$  qu'elle vérifie les conditions aux limites, ce qui n'aurait pas de sens puisque les sous-domaines ne forment pas l'enveloppe du domaine mais le domaine lui-même. Les fonctions  $\phi_i$  peuvent donc être assez simples. A partir de la forme de la solution approchée sur chaque sous-domaine, on construit la forme de la solution approchée sur tout le domaine. On met en place un système d'équations dont les inconnues sont les coefficients  $a_i$ . On calcule ces coefficients par inversion du système ce qui donne la solution approchée  $u_i^*$  sur chaque sous-domaine et donc sur le domaine complet.

La matrice **K** est symétrique, ce qui est intéressant d'un point de vue informatique, que ce soit en termes de stockage ou d'inversion. Une autre particularité de la matrice est qu'elle est creuse : ce qui se passe dans un sous-

domaine n'a d'influence que dans les sous-domaines adjacents. Se donner une approximation par sous-domaine pour la formulation faible complète des résidus pondérés présente donc des avantages considérables. Mais les résultats ne sont pas très « parlants » : les **coordonnées généralisées**  $a_i$  n'ont pas d'interprétation physique. Pour chaque sous-domaine, ce sont les composantes de l'approximation  $u_i^*$  dans la base des fonctions  $\phi_i$ . La dernière avancée consiste à se donner pour forme de la solution approchée sur un sous-domaine :

$$u^*(x) = \sum_i N_i(x) q_i$$

Cela revient à rechercher la solution approchée pour chaque sous-domaine dans la base des fonctions  $N_i$  qui portent le nom de **fonction de forme** ou **fonction d'interpolation**. Les inconnues du problème (les  $q_i$ ) ont une interprétation physique directe : en mécanique, ce sont les déplacements des points qui délimitent les sous-domaines ; en thermique, leur température. La méthode des résidus pondérés en formulation faible porte alors un autre nom : la méthode des éléments finis. Chaque sous-domaine est un élément fini, la décomposition du domaine en sous-domaine est le maillage de la structure.

### 2.1.3. Conditions aux limites

Sur la surface externe  $S$  d'un solide ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites : soit des déplacements imposés, nuls ou non nuls, soit des efforts, nuls ou non. Les **conditions aux limites** portant sur les déplacements sont dites **cinématiques**. Elles s'appliquent sur une partie de la surface  $S$ , notée  $S_1$ . Les **conditions aux limites** portant sur les efforts sont dites **statiques**. Elles sont appliquées sur une partie  $S_2$  de la surface  $S$ . L'intersection des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est vide, l'union des deux est la surface  $S$  totale : il n'est pas possible d'appliquer en un point une charge et un déplacement dans la même direction. Les points de la surface qui ne sont soumis à aucune charge et à aucun déplacement imposé sont en fait sollicités par une charge nulle. D'un point de vue matriciel, la dimension du vecteur de charge  $\mathbf{F}$  doit être égale à celle du produit  $\mathbf{Kq}$ , même si seulement un degré de liberté sur les  $N$  du problème est sollicité.

### 2.1.4. Champ de déplacement cinématiquement admissible (C.A.)

Un **champ de déplacement cinématiquement admissible** satisfait les conditions de continuité inter-élément, et les conditions aux limites cinématiques. En élasticité, les éléments n'ont que des degrés de liberté de translation aux nœuds. La continuité du champ de déplacement, sur laquelle est basée la théorie cinématique des éléments finis, ne nécessite que des fonctions de classe  $C^0$ . Pour les éléments possédant des degrés de liberté de translation et des degrés de liberté de rotation aux nœuds, il est indispensable d'assurer la

continuité des déplacements et des rotations. Selon la formulation des éléments, la continuité  $C^1$  peut être requise.

## 2.2. MÉTHODES VARIATIONNELLES

Avec les **méthodes variationnelles**, le point de départ n'est pas l'équation locale : on exprime les conditions d'extremum d'une fonctionnelle, qui peut être par exemple l'énergie potentielle totale pour l'équilibre statique d'une structure. La forme de l'approximation que l'on se donne pour la solution cherchée est introduite dans la fonctionnelle et on détermine pour quelle valeur des coordonnées généralisées la fonctionnelle est minimale. C'est la **méthode de Ritz**. Soit  $\Pi(u)$  l'énergie potentielle totale de la structure en équilibre statique. On remplace  $u$  par son approximation  $u^*$ . Puisque toutes les coordonnées généralisées  $a_i$  sont indépendantes, la condition d'extremum  $\delta\Pi = 0$  s'écrit :

$$\partial\Pi / \partial a_i = 0 \quad i \in [1, N]$$

où  $N$  est le nombre de coordonnées généralisées. Les  $N$  équations forment un système mais elles sont entièrement couplées : la matrice associée est pleine. Se donner sur le domaine une expression vérifiant toutes les conditions aux limites n'est pas envisageable dans le cas général. On décompose donc le domaine en sous-domaine de forme géométrique simple, sur lesquels on se donne une approximation locale de la solution. Les coordonnées généralisées décrivant l'approximation sur un sous-domaine n'ayant pas d'interprétation physique, on écrit l'approximation sous la forme

$$u^*(x) = \sum_i N_i(x) q_i$$

Les inconnues du problème (les  $q_i$ ) ont une interprétation physique directe, la méthode variationnelle est alors la méthode des éléments finis. On impose la continuité du champ de déplacement aux nœuds de la structure et sur les frontières de tous les éléments. Les conditions aux limites cinématiques sont appliquées sur la structure et non sur chaque élément. La condition d'extremum conduit d'un point de vue formel au même système que précédemment

$$\partial\Pi / \partial q_i = 0$$

où  $q_i$  sont les degrés de liberté indépendants de la structure. Par rapport à la méthode de Ritz, chaque  $q_i$  n'influence que les degrés de liberté appartenant aux mêmes éléments que lui, conduisant à une matrice de type bande. Lorsque l'approximation que l'on se donne porte uniquement sur le champ de déplacement et qu'elle est introduite dans les champs de contrainte et de déformation, on parle de l'**approche cinématique**. C'est la technique la plus simple à mettre en œuvre et la plus largement répandue : la très grande majorité

des éléments finis utilisés dans les programmes industriels sont basés sur cette approche. La fonctionnelle utilisée est l'énergie potentielle totale de la structure, à laquelle on se limitera dans cet ouvrage. Les éléments finis développés par cette méthode sont dits de **type cinématique**. Lorsque l'approximation que l'on se donne porte uniquement sur le champ de contrainte et qu'elle est introduite dans les autres champs, on parle de l'**approche statique**, la fonctionnelle utilisée est l'énergie potentielle complémentaire. Les éléments finis développés par cette méthode sont dits de **type équilibre**. Il est également possible de travailler conjointement sur les deux approches donnant ainsi des éléments mixtes ou des éléments hybrides.

## 2.3. EXEMPLE

Le but de l'exemple simple présenté ici est d'illustrer l'approche variationnelle dans le cadre de la théorie cinématique et d'introduire un certain nombre de concepts fondamentaux. Une structure dont deux dimensions sont petites par rapport à la troisième et dont les caractéristiques sont constantes (section  $S$ , module de Young  $E$ , longueur  $L$ , masse volumique  $\rho$ ), est encastree à une extrémité et soumise à un chargement volumique réparti dont l'intensité est  $g$  (Figure 2.1). Le déplacement dans la structure et la contrainte peuvent être calculés analytiquement en tout point d'abscisse  $x$ , comptée à partir de l'encastrement. Le but de l'étude n'étant pas de regarder des effets locaux dans la zone d'encastrement, le problème peut être considéré comme mono-dimensionnel et la structure peut être modélisée par une barre (cf. chapitre 7).

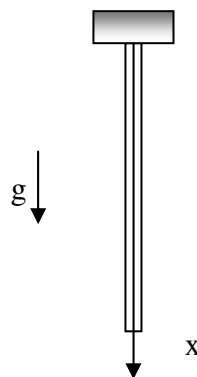


Figure 2.1 : Barre soumise à la gravité

### 2.3.1. Résolution analytique

Le problème est mono-dimensionnel, les équations d'équilibre se ramènent à une équation scalaire. On isole une tranche de hauteur  $dx$  dont on écrit l'équilibre :

$$-F + \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx\right) + \rho g S dx = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \rho g S = 0$$

La seule composante non nulle du tenseur des déformations pour ce problème est  $\varepsilon_{xx}$  avec la condition essentielle  $u(0) = 0$  car la barre est encastree à

l'extrémité prise comme origine du repère. La loi de comportement se réduit à l'équation scalaire  $\sigma = E\varepsilon$ . La force  $F$  vérifie en tout point de la barre

$$F = \sigma S = E\varepsilon S = ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

En reportant cette relation dans l'équation d'équilibre, on obtient l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui régit le déplacement dans la barre.

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho S g = 0$$

On détermine la solution analytique exacte par deux intégrations successives, et les deux constantes d'intégration en utilisant les deux conditions aux limites, l'une cinématique et l'autre statique :  $u(0) = 0$  et  $F(L) = 0$

$$u(x) = \frac{\gamma x}{2ES} (2L - x) \quad \sigma(x) = \frac{\gamma}{S} (L - x)$$

### 2.3.2. Solutions numériques approchées

L'énergie potentielle totale est la différence entre l'énergie de déformation  $U$  et le travail des charges appliquées  $W$ . Elle s'écrit dans le cas de cette structure :

$$\Pi(u) = \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon^2 S dx - \int_0^L \rho g S u dx$$

On choisit pour commencer un développement polynomial de degré 1, la constante étant nulle car il faut vérifier  $u(0) = 0$ .

$$u(x) = ax + b \Rightarrow \varepsilon(x) = a$$

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} E a^2 S dx - \int_0^L \rho g S a x dx \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} E a^2 S L - \frac{1}{2} \rho g S a L^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \Rightarrow a = \frac{\rho g L}{2E} \Rightarrow u(x) = \frac{\rho g L}{2E} x \Rightarrow \sigma(x) = \frac{\rho g L}{2}$$

On choisit maintenant un polynôme du second degré, la constante étant nulle pour que soit vérifiée la condition  $u(0) = 0$ .

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad a_1 = 0 \quad \varepsilon(x) = a_2 + 2a_3 x$$

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} ES(a_2 + 2a_3x)^2 dx - \int_0^L \rho g S(a_2x + a_3x^2) dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{\rho g L}{E} \quad a_3 = -\frac{\rho g}{2E}$$

$$u(x) = \frac{\rho g x}{2E} (2L - x) \quad \sigma(x) = \rho g (L - x)$$

On peut couper la barre en deux parties, délimitées par trois points : l'origine, le point milieu et le point extrémité. C'est la méthode de Ritz par morceaux : on ne cherche plus une approximation sur tout le domaine qui satisfait les conditions aux limites. On suppose le déplacement linéaire sur chaque tronçon, et continu au point milieu.  $u_1$  et  $u_2$  sont respectivement les déplacements du point milieu et de l'extrémité libre. On écrit pour chacune des deux parties :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{2x}{L} u_1 & \varepsilon_1 = \frac{2}{L} u_1 & \text{pour } x \in \left[0; \frac{L}{2}\right] \\ u(x) = \frac{2}{L} (u_2 - u_1)x + 2u_1 - u_2 & \varepsilon_2 = \frac{2}{L} (u_2 - u_1) & \text{pour } x \in \left[\frac{L}{2}; L\right] \end{cases}$$

L'énergie potentielle totale de la structure est la somme des énergies potentielles totales de chaque partie de la structure, et sa dérivée est nulle à l'équilibre, quelles que soient les caractéristiques réelles de la barre donc quels que soient les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  : elle est indépendante de ces valeurs. Chaque dérivée partielle est donc nulle, ce qui fournit un système linéaire de deux équations à deux inconnues  $u_1$  et  $u_2$  :

$$\int_0^{L/2} \frac{1}{2} ES \left( \frac{2}{L} u_1 \right)^2 dx + \int_{L/2}^L \frac{1}{2} ES \left( \frac{2}{L} (u_2 - u_1) \right)^2 dx = \frac{ES}{L} u_1^2 + \frac{ES}{L} (u_2 - u_1)^2$$

$$\int_0^{L/2} \rho g S \frac{2x}{L} u_1 dx + \int_{L/2}^L \rho g S \left( 2u_1 - u_2 + 2 \frac{x}{L} (u_2 - u_1) \right) dx = \frac{\rho g SL}{2} u_1 + \frac{\rho g SL}{4} u_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{8} \frac{\rho g L^2}{E} \\ u_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{E} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x) = \frac{3}{4} \frac{\rho g L}{E} x & \text{et } \sigma(x) = \frac{3}{4} \rho g L \quad \text{pour } x \in \left[ 0; \frac{L}{2} \right] \\ u(x) = \frac{1}{4} \frac{\rho g L}{E} x + \frac{1}{4} \frac{\rho g L^2}{E} & \text{et } \sigma(x) = \frac{1}{4} \rho g L \quad \text{pour } x \in \left[ \frac{L}{2}; L \right] \end{array} \right.$$

La première approximation, linéaire sur toute la barre, ne fournit la bonne solution qu'aux extrémités de la barre (Figure 2.2). La seconde approximation, parabolique sur toute la barre, est elle aussi exacte aux extrémités mais fournit une bien meilleure approximation de la solution que la précédente. On a choisi un espace vectoriel comportant une dimension de plus, la solution recherchée est « plus riche » en termes d'information. On a gardé la discrétisation initiale et augmenté le degré du champ de déplacement. On peut imaginer aller bien au-delà du degré deux, tout en gardant des modèles géométriquement très grossiers : c'est la **méthode P**, développée dans certains codes de calcul. Plutôt que d'augmenter le degré, on peut raffiner le maillage. La troisième approximation comporte deux éléments, l'approximation étant linéaire sur chacun d'entre eux. Cela illustre, bien que ce soit un cas d'école, la notion de convergence vers la solution lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Lorsqu'il y en a suffisamment, l'énergie potentielle totale est bien discrétisée et ne varie plus en première approximation lorsqu'on raffine le maillage ou lorsque la position des nœuds du maillage change. Un découpage de la barre en 3, 4 ou plus, avec une approximation linéaire sur chaque intervalle et la continuité aux points de raccord permettrait d'améliorer encore la qualité de la solution. La méthode qui consiste à augmenter le nombre d'éléments d'un modèle s'appelle la **méthode H**. Il ne rentre pas dans le cadre de cet ouvrage de comparer les avantages et inconvénients de ces deux méthodes diamétralement opposées par leur philosophie de base : beaucoup d'éléments de faible degré pour l'une, peu d'éléments de degré élevé pour l'autre.

En ce qui concerne l'évolution de la contrainte dans la barre, les représentations linéaires conduisent à des champs de contrainte constants par morceaux et discontinus. La contrainte n'est pas nulle sur l'extrémité libre de contrainte et ne donne pas la valeur attendue à l'encastrement. En raffinant le maillage constitué d'éléments pour lesquels l'approximation du champ de déplacement est linéaire, la fonction en escalier colle de mieux en mieux à la solution, y compris à l'encastrement. La surface sous les trois courbes est la même. Dans l'approche cinématique, l'approximation porte sur le champ de déplacement qui est continu dans l'élément. Le passage par une forme intégrale assure que les équations d'équilibre sont satisfaites en moyenne sur chaque élément constituant le maillage, mais les équations locales ne peuvent plus être satisfaites. La continuité du champ de contrainte ne peut pas être garantie d'un élément à l'autre, alors qu'elle l'est physiquement en dehors des zones singulières



(changements de matériau, d'épaisseur...). Il existe des méthodes permettant de reconstruire a posteriori un champ de contrainte continu, dont des techniques d'extrapolation, objet du chapitre 6.

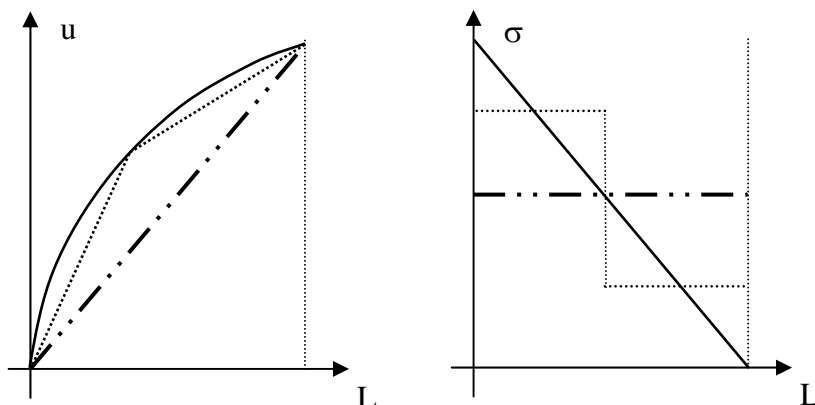


Figure 2.2 : Déplacement et contrainte dans la barre

## 2.4. SYSTÈME MATRICIEL (MÉCANIQUE LINÉAIRE)

Quand on se limite à la mécanique linéaire, les déplacements sont suffisamment petits pour que l'on puisse confondre la structure déformée et la structure non déformée, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Il existe une énergie de déformation  $U$ , forme quadratique linéaire et symétrique des déformations, qui s'écrit sous la forme

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} dv$$

$\boldsymbol{\sigma}$  est le vecteur contenant les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes, le vecteur contenant les six composantes indépendantes du tenseur des déformations en notation ingénieur. L'énergie de déformation correspond au travail des forces de cohésion, également appelées forces internes. Les **charges** appliquées sur la structure sont dites **conservatives** quand elles sont indépendantes des déplacements, ce qui est toujours le cas en mécanique linéaire. Ce sont soit des charges de volume d'intensité  $\mathbf{F}$ , soit des charges de surface d'intensité  $\mathbf{t}$ . Le travail produit par ces charges extérieures est

$$W = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} dv + \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS$$

L'énergie potentielle totale de la structure  $\Pi(u)$  est égale à  $U-W$ . Elle ne dépend que du champ de déplacement, qui doit vérifier les conditions de continuité. Cette énergie ne change pas, au second ordre près, lorsque la structure passe d'une configuration d'équilibre à une configuration infiniment voisine quelconque : sa variation première est nulle. On dit que l'énergie potentielle totale d'un corps en équilibre est stationnaire. Le **théorème des travaux virtuels** consiste à imposer un déplacement cinématiquement admissible arbitraire  $\delta u$  sur la structure et à évaluer les travaux des efforts externes et internes pour trouver la condition d'équilibre. Le travail virtuel des forces internes s'écrit pour les matériaux élastiques

$$\delta U = \int_V \sigma^T \delta \varepsilon \, dv$$

Le travail virtuel des forces externes s'écrit  $\delta W = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \, dv + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, dS$

En supposant que le champ de déplacement soit de la forme  $u = \mathbf{N}\mathbf{q}$ , où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des degrés de liberté choisis pour en représenter le comportement, et  $\mathbf{N}$  la matrice des fonctions d'interpolation, ces travaux virtuels ont pour expression

$$\delta u = \mathbf{N} \delta \mathbf{q} \quad \delta \varepsilon = \mathbf{D} \delta \mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{N} \delta \mathbf{q} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \delta \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{q} \, dv = \delta \mathbf{q}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \, dv \right) \mathbf{q} \\ \delta W &= \int_V \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \mathbf{F} \, dv + \int_S \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, dS = \delta \mathbf{q}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{F} \, dv + \delta \mathbf{q}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, dS \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre de la structure sous forme discrétisée s'écrit,  $\mathbf{K}$  étant la matrice de raideur de la structure et  $\mathbf{g}$  le vecteur des charges nodales appliquées sur la structure :

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \, dv \quad \mathbf{g} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{F} \, dv + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, dS \quad \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g}$$

La matrice de raideur est symétrique, mais n'est que semi-définie positive. Ce point très important sera traité par la suite. Le vecteur de charge appliqué sur la structure est un vecteur de charges interprétées, qui intègre les fonctions d'essais choisies sur l'élément sollicité pour des charges qui ne sont pas ponctuelles : ce n'est pas le vecteur de charge physiquement appliqué. Changer le maillage ou changer de type d'élément fini change la discrétisation des charges réparties mais donne en moyenne aux mêmes résultats. Dans l'approche cinématique, l'approximation porte sur le champ de déplacement, les équations

d'équilibre locales ne peuvent pas être satisfaites en tout point mais seulement en moyenne. La raideur obtenue avec la solution approchée est toujours supérieure à la rigidité exacte. La solution approchée converge globalement vers la solution en énergie (critère global), rien ne permet d'affirmer qu'un déplacement local est inférieur au déplacement exact (critère local). En pratique, il existe aujourd'hui très peu d'éléments cinématiques purs dans les programmes industriels. Les techniques d'intégration numérique, la condensation de modes internes font qu'en général, il n'y a pas de garantie de convergence monotone et la solution peut osciller en s'amortissant quand le nombre de degrés de liberté augmente. On peut quand même retenir, même si ce n'est pas absolu, que plus le nombre de degrés de liberté augmente et plus la solution numérique doit se rapprocher, même localement, de la solution cherchée si le modèle est approprié.

## Chapitre 3

### Formulation d'un élément

#### 3.1. FONCTIONS D'INTERPOLATION

Les **fonctions de forme** ou **fonctions d'interpolation** sont les fonctions  $N_i$  qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieur à un élément aux  $n$  déplacements nodaux  $q_i$  qui sont les degrés de liberté dans le cas de l'approche cinématique : il y a pour un élément autant de fonctions de forme que de degrés de liberté dans l'élément.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) q_i$$

Elles assurent le passage du problème continu au problème discret, la connaissance du déplacement en quelques nœuds discrets permettant de reconstruire le champ de déplacement dans l'élément. Le déplacement en un point quelconque de l'élément est une combinaison linéaire des déplacements nodaux, dont les coefficients sont les valeurs des fonctions de forme en ce point. La connexion entre éléments obéit à certaines règles car la violation du critère de **continuité inter-éléments** entraîne des modes de déformations inadmissibles du point de vue physique pour une structure continue, comme par exemple l'effet « boutonnière ». Dans les deux exemples suivants (Figure 3.1), les nœuds ont été placés à l'intérieur de chaque élément pour bien appréhender les problèmes de continuité. Pour les problèmes d'élasticité, l'équation d'équilibre intégrée ne fait intervenir que la dérivée première des déplacements (déformations) : il faut donc que le champ de déplacement soit de classe  $C^0$  au moins sur chaque élément. Pour les problèmes de flexion, l'équation d'équilibre fait intervenir la dérivée seconde des déplacements : il faut que les déplacements soit de classe  $C^1$  au moins sur chaque élément. Il doit y avoir continuité des déplacements et des pentes normales le long des interfaces (cf.

Eléments de poutres). La continuité des degrés de liberté nodaux assure, pour les problèmes d'élasticité, la continuité parfaite des déplacements le long de tous les bords. Un élément fini doit permettre à la limite de représenter n'importe quelle valeur des déformations (ou des courbures) quand sa taille diminue : c'est la **complétude**. En particulier, les modes rigides et les états de déformation constante (cas académiques à déformation constante ou maillage suffisamment fin pour que l'on puisse considérer la déformation comme constante sur l'élément). Pour un mode rigide (également appelé mouvement d'ensemble), les déformations sont nulles car tous les points de la structure ont les mêmes déplacements dans le cas des translations. Dans le cas des rotations d'ensemble, les points ont des translations différentes mais leur distance relative est invariable. L'expression analytique du champ de déplacement doit comporter un terme constant pour passer ces modes. Pour représenter les modes de déformation constante, le déplacement doit comporter au moins un polynôme complet d'ordre 1 pour les problèmes d'élasticité. Pour les problèmes de flexion, ce n'est pas la déformation mais la courbure qui doit être constante.

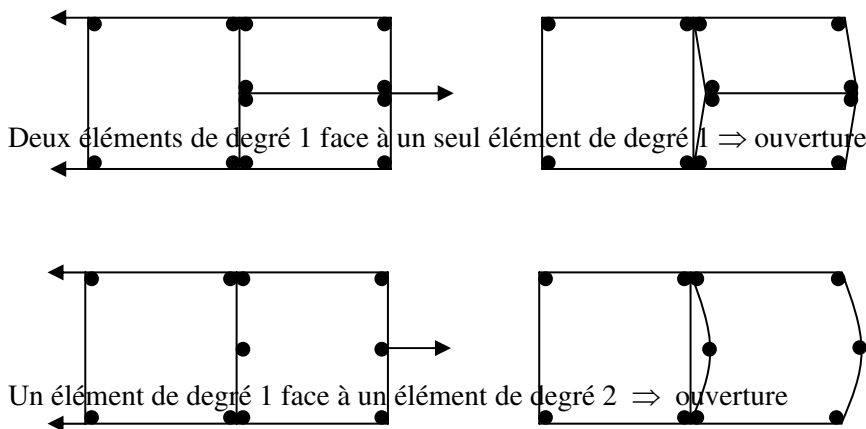


Figure 3.1 : Continuité inter-éléments non satisfaite

### 3.2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS D'INTERPOLATION

Les fonctions de forme doivent être telles que la continuité du déplacement inter-élément soit garantie. Il en résulte que la fonction  $N_i$  associée au degré de liberté  $q_i$  y prend pour valeur 1 car le déplacement physique dans une direction en un point matériel situé sur un nœud du maillage est égal à la valeur du degré de liberté  $q_i$  qui le représente. D'autre part, elle a pour valeur 0 sur tous les

autres degrés de liberté de l'élément ce qui a pour conséquence que le déplacement sur un côté ne doit dépendre que des déplacements des nœuds situés sur ce côté pour respecter la condition de continuité inter-élément.

$$u(x = x_i) = q_i = \sum N_j(x = x_i)q_j = N_1(x_i)q_1 + N_2(x_i)q_2 + \dots + N_i(x_i)q_i + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_i(x_i) = 1 \\ N_j(x_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow N_j(x_i) = \delta_{ij}$$

Un **mode rigide** de translation est caractérisé par le même déplacement en tout point, égal à  $U$ . La somme des fonctions d'interpolation sur un élément doit avoir pour valeur 1.

$$u = U = \sum N_i q_i = \sum N_i U = (\sum N_i) U \Rightarrow \sum N_i = 1$$

L'invariance géométrique est une qualité souhaitée dont le caractère obligatoire n'est pas démontré. L'énergie de déformation ne doit pas dépendre du repère dans lequel sont menés les calculs : c'est la notion d'invariance. Elle implique l'utilisation de polynômes complets si l'élément est défini dans son repère propre. Si l'élément est construit dans un système d'axes dits « intrinsèques », il suffit que les polynômes soient symétriques par rapport aux variables d'espace.

### 3.3. EXEMPLE SIMPLE DE DÉTERMINATION

L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément fini consiste à approximer son champ de déplacement interne par des séries de polynômes. Dans le cas uniaxial, on peut par exemple écrire :

$$u = \mathbf{PA} = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$A$  est le vecteur des **coordonnées généralisées** ou encore des **variables internes** qui n'ont aucune signification physique. Il faut assurer la connexion des nœuds de l'élément au monde extérieur, et la continuité des déplacements. Or les coordonnées généralisées varient d'un élément à l'autre et il est difficile d'exprimer simplement les conditions de continuité. Il est donc naturel de chercher une autre façon de décrire le champ de déplacement, permettant d'écrire simplement les conditions de continuité. Il semble naturel, au vu des paragraphes précédents, de remplacer le vecteur des coordonnées généralisées par le vecteur qui contient le déplacement des nœuds et, si besoin est, les dérivées de ces déplacements. On exprime donc la relation générale aux nœuds

de l'élément pour lesquels on connaît la valeur des déplacements et des éventuelles dérivées. En regroupant toutes ces relations sous une forme matricielle, on obtient :

$$\mathbf{q} = \mathbf{QA}$$

$\mathbf{q}$  est le **vecteur des degrés de liberté** de l'élément, encore appelés **variables externes** ou **connecteurs**.  $\mathbf{Q}$  est la **matrice de connexion**. On peut déduire  $\mathbf{A}$  de cette relation et l'injecter dans l'expression du champ de déplacement :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad u = \mathbf{PQ}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{Nq} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \mathbf{PQ}^{-1}$$

Le nombre de coordonnées généralisées et le nombre de degrés de liberté ne sont pas indépendants, la matrice  $\mathbf{Q}$  doit être inversible pour calculer la matrice  $\mathbf{N}$ . Si la matrice  $\mathbf{Q}$  n'est pas carrée, il existe différentes techniques pour construire l'élément, non abordées ici. Soit une barre de caractéristiques constantes, de longueur  $L$ , soumise à des charges exclusivement ponctuelles (Figure 3.2). Dans le repère propre qui lui est associé, la barre ne travaille qu'en traction-compression selon son axe topologique  $x$  et le champ de déplacement, qui est linéaire pour des charges ponctuelles, ne dépend que de  $x$ . Du fait de la topologie particulière d'une barre, la compatibilité est automatique car toute l'information passe exclusivement par les nœuds.

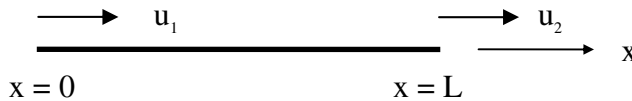


Figure 3.2 : Barre du premier degré

Pour vérifier la complétude, il faut au moins un terme constant et un terme linéaire. Le champ de déplacement peut s'écrire,  $f(x)$  étant un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 :

$$u(x) = a + bx + f(x) = \mathbf{PA}$$

L'élément n'ayant que deux nœuds, il n'a que deux degrés de liberté dans son repère propre, il n'existe que deux valeurs de  $x$  pour lesquelles le déplacement est connu. Si  $f(x)$  n'est pas identiquement nulle, la matrice  $\mathbf{Q}$  ne sera pas carrée et ne sera donc pas inversible. En d'autres termes, il ne sera pas possible d'exprimer les coordonnées généralisées  $a$  et  $b$  uniquement en fonction des déplacements  $u(0)$  et  $u(L)$  à moins d'ajouter des contraintes entre les coefficients. En supposant  $f(x)$  nul, on peut calculer la matrice des fonctions d'interpolation. L'élément est dit du premier degré car le champ de déplacement

dans l'élément est un polynôme du premier degré, du second degré quand le champ de déplacement dans l'élément est un polynôme du second degré.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(x=0)=u_1=a \\ u(x=L)=u_2=a+bL \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=u_1 \\ b=(u_2-u_1)/L \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow u(x) = \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q} = (1, x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \left(1 - \frac{x}{L}; \frac{x}{L}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N}(x)\mathbf{q} \end{aligned}$$

Le déplacement en un point intérieur de l'élément est une combinaison linéaire des déplacements aux nœuds, les coefficients de combinaison étant les valeurs que prennent les fonctions d'interpolation en ce point. Pour un élément triangulaire du premier degré, comportant trois degrés de liberté pour représenter le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  et trois degrés de liberté pour représenter le déplacement  $v$  dans la direction  $y$ , il faut un terme constant et deux termes linéaires, définissant un polynôme complet d'ordre un, soit six coordonnées généralisées pour l'élément, et six degrés de liberté.

$$\begin{cases} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 \\ v(x, y) = N_4(x, y)v_1 + N_5(x, y)v_2 + N_6(x, y)v_3 \end{cases}$$

Pour un triangle du second degré, il faut trois termes de plus pour chaque composante du champ de déplacement. On peut choisir  $x^2$ ,  $y^2$  et  $xy$  ce qui conduit à un polynôme complet d'ordre deux. Pour un rectangle du premier degré, dont les cotés sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ , il faut huit coordonnées généralisées et huit degrés de liberté : le développement est imposé.

$$\begin{cases} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{cases}$$

### 3.4. FAMILLE DE LAGRANGE

Les fonctions de forme  $N_i$  forment une base de l'espace des fonctions choisies pour représenter le déplacement dans l'élément : tout déplacement interne est une combinaison linéaire des fonctions d'interpolation. Il existe de très nombreuses familles connues définissant des **bases fonctionnelles** et qui peuvent être directement utilisées pour les fonctions de forme. Les séries de Fourier, les polynômes de Lagrange, Hermite, Legendre... en sont des exemples. Le polynôme de Lagrange d'ordre  $i$  passe exactement par 1 au point  $x_i$  et par 0 sur tous les autres points  $x_j$ . On peut donc l'utiliser comme fonction de forme :



$$N_i(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

Pour représenter un champ du premier degré le long d'un bord, ce qui suppose donc deux inconnues, il faut deux connecteurs indépendants donc deux nœuds : un à chaque extrémité de l'arête. Pour une barre du premier degré de longueur  $L$  et de caractéristiques constantes, on peut écrire directement :  $x_1 = 0$  et  $x_2 = L$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x-L}{0-L} = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x-0}{L-0} = \frac{x}{L} \end{cases}$$

On retrouve les deux fonctions d'interpolation précédemment calculées. Toute fonction linéaire  $ax + b$  peut s'exprimer de façon unique dans la base définie par les « vecteurs » 1 et  $x$ , les variables internes  $a$  et  $b$  étant les composantes de la fonction  $f$  dans la base choisie. Mais toute fonction linéaire peut également s'exprimer de façon unique dans la base définie par les « vecteurs »  $1-x/L$  et  $x/L$ , les variables externes  $u_1$  et  $u_2$  étant les composantes de cette même fonction  $f$  dans la nouvelle base choisie. Pour représenter un champ parabolique le long d'un bord, ce qui suppose trois inconnues, il y faut trois connecteurs. On peut choisir par exemple un nœud à chaque extrémité plus un nœud au milieu de l'arête, ou un nœud à chaque extrémité plus un connecteur de bord comme par exemple l'intégrale du déplacement sur l'arête. Soit une barre de longueur  $L$  et de caractéristiques constantes, du second degré :  $x_1 = 0$   $x_2 = L/2$  et  $x_3 = L$ .

Par application de la formule donnant l'expression des polynômes de Lagrange, on détermine les trois fonctions d'interpolation associées aux trois degrés de liberté de cet élément de barre du second degré :

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{(x-L/2)(x-L)}{(0-L/2)(0-L)} = \frac{(2x-L)(x-L)}{L^2} \\ N_2(x) = \frac{(x-0)(x-L)}{(L/2-0)(L/2-L)} = \frac{4x(L-x)}{L^2} \\ N_3(x) = \frac{(x-0)(x-L/2)}{(L-0)(L-L/2)} = \frac{x(2x-L)}{L^2} \end{cases}$$

Toute parabole est une combinaison linéaire des trois monômes 1,  $x$  et  $x^2$ , mais est également une combinaison linéaire unique des trois fonctions ci-dessus. Une façon simple de générer des fonctions de forme pour les éléments rectangulaires ou cubiques dont les faces sont parallèles aux axes structuraux

consiste à effectuer des produits de polynômes pour chaque variable, la continuité le long des bords devant être respectée d'un élément à celui qui lui est adjacent. Cette condition de continuité impose qu'il y ait exactement  $(n+1)$  valeurs connues sur les bords d'un élément de degré  $n$ , donc  $n$  nœuds. En supposant une approximation linéaire selon chaque axe, on détermine

$$u(x,y)=(a_0+a_1x)(b_0+b_1y) \text{ ou } u(x,y,z)=(a_0+a_1x)(b_0+b_1y)(c_0+c_1z)$$

Ce même type de développement peut être réalisé pour des interpolations paraboliques, cubiques ou plus selon chaque direction. Pour des degrés supérieurs à 1, il est nécessaire de définir des nœuds sur chaque arête mais aussi des nœuds internes, ce qui enrichit le comportement de l'élément mais augmente le nombre de degrés de liberté de l'élément (Figure 3.3). Les fonctions de forme associées aux nœuds internes, appelées « **modes bulles** », n'ont pas d'incidence sur les éléments voisins (Figure 3.4). C'est la raison pour laquelle on élimine parfois des degrés de liberté internes par **condensation**, le temps nécessaire pour cette opération au niveau de chaque élément étant nettement compensé par le gain de temps résultant de la réduction de taille du système à résoudre. La technique de condensation fait l'objet du chapitre 19.

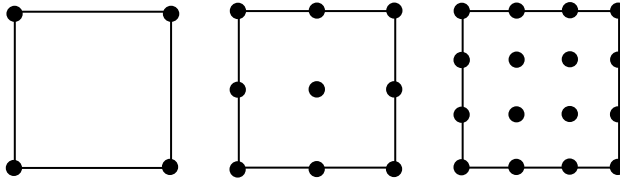


Figure 3.3 : Position des nœuds pour le carré de Lagrange (degrés 1, 2 et 3)

Tous calculs faits, les fonctions de forme  $N_i$  sont des produits pour chaque direction des **polynômes de Lagrange** d'où le nom donné à cette famille. On peut aussi les construire directement par application de la formule les définissant. Pour une barre du premier degré parallèle à l'axe des  $x$ , avec  $x_1 = 0$  et  $x_2 = L$ ,

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{L}$$

Au second degré, on calcule directement avec  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L/2$  et  $x_3 = L$  :

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = (2\frac{x}{L} - 1)(\frac{x}{L} - 1) \quad N_2(x) = 4\frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L})$$

$$N_3(x) = \frac{x}{L} \left( 2 \frac{x}{L} - 1 \right)$$

Même lorsqu'il s'agit de fonctions de forme associées à des degrés de liberté dans le plan de l'élément, la représentation graphique qui en est faite est transversale, ce n'est que la valeur prise par la fonction en un point. La figure 3.5 illustre la fonction de forme associée à un nœud d'élément quadrangulaire linéaire : elle prend la valeur 1 sur le nœud considéré et 0 sur les autres pour garantir la condition de continuité inter-éléments.

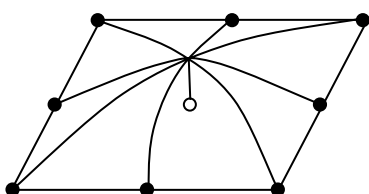


Figure 3.4 : Exemple de mode bulle associé à un nœud interne

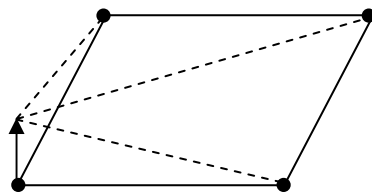


Figure 3.5 : Fonction d'interpolation associée à un nœud sommet

### 3.5. FAMILLE DE SERENDIP

On ne rajoute des nœuds que sur les arêtes des éléments pour augmenter leur degré. Au premier degré, les **éléments de Lagrange** et de **Serendip** sont identiques. Au second degré, le rectangle de Serendip est défini par 8 nœuds alors que celui de Lagrange est défini par 9 nœuds (Figure 3.6).

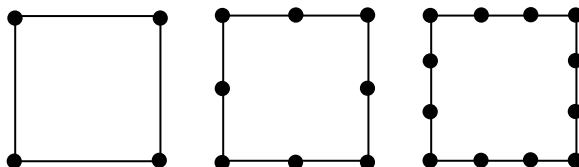


Figure 3.6 : Position des nœuds pour le carré de Serendip (degrés 1, 2 et 3)

Les fonctions de forme de ces éléments sont classiques et connues. Au second degré, pour un carré de côté 2 dont les bords sont parallèles aux axes structuraux, les coordonnées  $x$  et  $y$  variant de -1 à +1, les fonctions de forme sont :

pour le nœud  $x = 1$  et  $y = 1$   $N_i = -\frac{1}{4}(1+x)(1+y)(1-x-y)$

pour le nœud milieu  $x = 0$  et  $y = 1$   $N_i = \frac{1}{2}(1-x^2)(1+y)$

pour le nœud milieu  $y = 0$  et  $x = -1$   $N_i = \frac{1}{2}(1-y^2)(1+x)$

Pour déterminer les fonctions manquantes, il suffit de remplacer  $x$  par  $-x$  et  $y$  par  $-y$ . Ces fonctions de forme sont faciles à construire pour les deux familles si les éléments ont des bords droits parallèles aux axes structuraux, si les quadrilatères sont des rectangles, les hexaèdres des parallélépipèdes rectangles. Pour un quadrilatère quelconque (Figure 3.7), se pose le problème suivant.

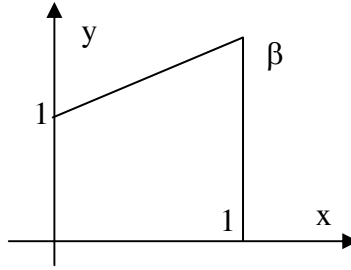


Figure 3.7 : Quadrilatère non rectangulaire

On choisit pour le champ de déplacement selon la direction  $x$  la forme classique pour le rectangle du premier degré  $u(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ . Après calculs,

$$u(x,y) = (1-x-y-xy)u_1 + (x-\frac{xy}{\beta})u_2 + (\frac{xy}{\beta})u_3 + (y-xy)u_4$$

Le déplacement d'un point appartenant au premier bord défini par  $y = 0$  est

$$u(x,y) = (1-x)u_1 + (x)u_2 + 0 \times u_3 + 0 \times u_4 = (1-x)u_1 + (x)u_2$$

Ce déplacement ne dépend donc que des positions prises par les nœuds 1 et 2 qui sont les extrémités de l'arête. Mais le déplacement d'un point appartenant au troisième bord défini par  $y = (\beta-1)x+1$  dépend des quatre nœuds de l'élément. Or pour garantir continuité avec l'élément voisin, il faudrait que le déplacement d'un point de cette arête ne dépende que des deux nœuds qui définissent cette arête. On ne peut donc pas construire par cette méthode un quadrangle non rectangle, car les seules fonctions que l'on peut déterminer ne vérifient pas les propriétés nécessaires. Cela limite considérablement la forme des éléments finis que l'on peut générer ainsi. Les fonctions de forme sont par

contre faciles à déterminer pour des éléments très particuliers dont les bords sont parallèles aux axes structuraux : le carré de côté 2, le cube de côté 2, le triangle rectangle isocèle de côté 1. L'idée est donc d'établir une relation entre l'élément à construire et l'élément de forme particulière associé que l'on sait construire.

### 3.6. ÉLÉMENTS ISOPARAMÉTRIQUES

Soit un quadrilatère quelconque, défini par ses quatre sommets, dont les nœuds ont des coordonnées connues dans un système global  $(x,y)$ . Soit un élément carré de côté 2, dans le système de coordonnées  $(\zeta,\eta)$ , appelé élément de référence. Les **coordonnées intrinsèques**  $(\zeta,\eta)$  ou  $(\zeta,\eta,\xi)$  pour un élément 3D, varient de -1 à +1, sauf pour le triangle pour lequel elles varient de 0 à 1 (Figure 3.8). La transformation  $F$ , qui est en fait un changement de système de coordonnées, est telle que :

- à un point de coordonnées  $(\zeta,\eta)$  ne correspond qu'un seul point de coordonnées  $(x,y)$
- les nœuds et les frontières des deux éléments associés se correspondent par  $F$
- $F$  est définie par les mêmes nœuds que ceux utilisés pour les degrés de liberté.

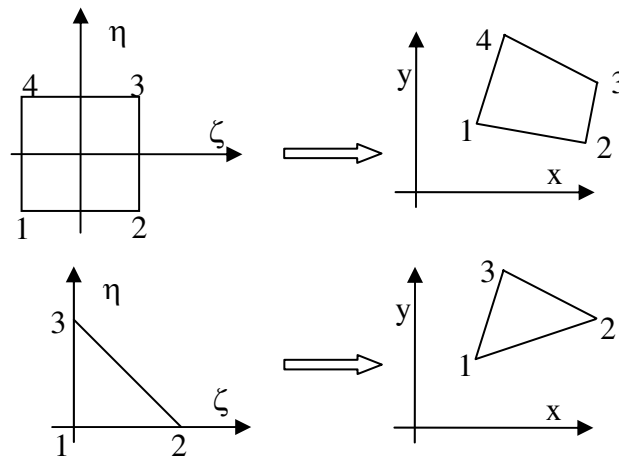


Figure 3.8 : Interpolation géométrique

La coordonnée d'un point physique appartenant de l'élément réel peut s'écrire sous la forme suivante, puisque c'est l'image par  $F$  d'un point de coordonnées réduites  $(\zeta,\eta)$  dans l'élément de référence :

$$x = a_0 + a_1\zeta + a_2\eta + a_3\zeta\eta = P^*(\zeta,\eta)A$$

Cette relation peut être exprimée sur des points particuliers qui sont les nœuds sommets de l'élément. En nommant  $\mathbf{X}$  le vecteur qui contient la première coordonnée des quatre sommets, on a :  $\mathbf{X} = \mathbf{Q}^* \mathbf{A}$ . Il est possible de calculer  $\mathbf{A}$  en fonction de la position  $X$  des sommets et donc  $x$  en fonction de  $\mathbf{X}$

$$x = \mathbf{P}^* \mathbf{Q}^{*-1} \mathbf{X} = \mathbf{N}^* \mathbf{X}$$

La matrice  $\mathbf{N}^*$  est la matrice des fonctions d'interpolation géométrique : elle donne le lien entre les coordonnées d'un point dans l'élément de référence et dans l'élément réel. Les approximations classiques sont des fonctions polynomiales donc la géométrie reste souvent approchée même avec des éléments paraboliques ou cubiques. Une structure à bords courbes est généralement discrétisée avec des éléments du second degré, en nombre suffisant pour obtenir une précision satisfaisante à la fois pour la géométrie, les déplacements et les contraintes. Pour que la relation entre un élément réel et son élément de référence soit correctement définie au sens mathématique, il faut que le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{J} = [\partial X / \partial \zeta]$  soit strictement positif sur tout l'élément ce qui conduit à des règles de bon usage : l'élément doit être relativement peu distordu (pas d'angle interne de l'ordre de 180 degrés ou plus, pas de côté trop petit par rapport aux autres,...) ; les nœuds milieux sont au milieu des arêtes (non obligatoire mais conseillé)... Les fonctions  $\mathbf{N}^*$ , mises en place pour des éléments de forme simples mais quelconques dont les trapèzes, vérifient toutes les propriétés que doivent satisfaire les fonctions d'interpolation mécanique. Si on prend pour fonctions d'interpolation mécanique les fonctions d'interpolation géométrique (mêmes paramètres pour décrire la géométrie et le champ de déplacement), l'élément est dit **isoparamétrique** et le passage par l'interpolation géométrique permet de définir les fonctions d'interpolation mécanique qu'il n'était pas possible de déterminer dans le cas général. L'expression générale de la matrice de raideur d'un élément est :

$$\mathbf{K}_e = \int \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dv$$

Dans le cas bi-dimensionnel, en supposant l'épaisseur constante  $e$ , elle s'écrit

$$\mathbf{K}_e = e \int_S \mathbf{B}^T(x, y) \mathbf{H} \mathbf{B}(x, y) dx dy$$

La matrice  $\mathbf{B}(x, y)$  contient les dérivées des matrices  $\mathbf{N}(x, y)$  par rapport aux variables réelles  $x$  et  $y$ . Or les fonctions de forme et leur dérivées sont connues sur l'élément de référence dans le système de coordonnées  $\zeta$  et  $\eta$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{J}$  est la **matrice jacobienne**, connue explicitement. Le déterminant de cette matrice est appelé **jacobien** de la transformation. S'il est non singulier, c'est à dire si la distorsion de l'élément est acceptable, les dérivées par rapport aux variables réelles sont mathématiquement définies par la relation inverse de la précédente. La matrice  $\mathbf{B}$  est donc connue dans le système de coordonnées  $\zeta$  et  $\eta$ . Le calcul de la **matrice de raideur** se ramène donc à

$$\mathbf{K}_e = e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\zeta, \eta) \mathbf{H} \mathbf{B}(\zeta, \eta) \det(\mathbf{J}) d\zeta d\eta$$

Cette formule est généralisable pour des éléments tridimensionnels. Tout se passe donc comme si, grâce au changement de repère, le calcul de la matrice de raideur s'effectuait sur l'élément de référence et non sur l'élément vrai. Cependant, l'expression de  $\mathbf{J}^{-1}$  qui n'apparaît pas explicitement car elle est incluse dans  $\mathbf{B}(\zeta, \eta)$ , n'est en général pas une fonction explicite ou elle est tellement complexe que l'intégrale ne peut pas être calculée analytiquement (cf. chapitre 7). Il faut recourir à des techniques d'**intégration numérique**.

## 3.7. INTÉGRATION NUMÉRIQUE

### 3.7.1. Présentation générale

Les méthodes d'intégration numérique permettent d'évaluer numériquement l'intégrale de la fonction  $f$  entre deux bornes, sans connaître la primitive  $F$  de la fonction à intégrer, et donc sans utiliser la formule :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Par changement de variable, on peut toujours se ramener à l'intervalle  $[-1 ; +1]$ . Les fonctions  $f$  à intégrer sont, dans la partie numérique des éléments finis traditionnels, des fonctions « sympathiques » au sens de l'ingénieur : définies, continues, dérivables... Même si leur intégrale n'est pas explicitement connue, elle existe et est elle aussi « sympathique ». Les techniques d'intégration numérique sont basées sur le fait qu'on peut trouver un polynôme  $\psi(x)$  passant par certaines valeurs données de la fonction  $f(x)$  et tel que l'on puisse considérer l'intégrale de  $\psi(x)$  comme une approximation de l'intégrale de  $f(x)$  (Figure 3.9).

Le nombre de points et leur position dans l'intervalle déterminent l'approximation et l'erreur due à l'intégration numérique. Supposons que la fonction  $f(x)$  ait été évaluée en  $(n+1)$  points distincts, notés  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et que l'on connaisse les valeurs  $f_0, f_1, \dots, f_n$  prises par la fonction en ces points, non nécessairement équidistants. Il existe un unique polynôme de degré  $n$  passant exactement par tous ces points.

$$\psi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

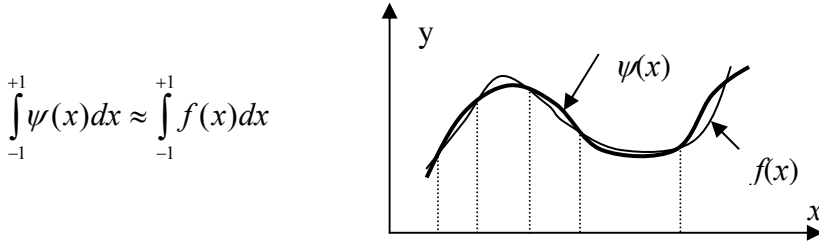


Figure 3.9 : Intégration numérique

En utilisant le fait que  $\psi(x_i) = f(x_i)$ , on peut écrire  $\mathbf{F} = \mathbf{QA}$  avec :

$$\mathbf{F}^T = (f_0, f_1, \dots, f_n) \quad \mathbf{A}^T = (a_0, a_1, \dots, a_n) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}$  est une matrice de Van Der Monde, carrée et inversible ce qui permet donc de calculer de façon unique les inconnues regroupées dans le vecteur  $\mathbf{A}$ . Une façon plus simple consiste à déterminer les coefficients en utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange qui forment une base fonctionnelle. Dans cette base, l'approximation  $\psi(x)$  peut s'écrire :

$$\psi(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

A partir de cette formule générale, il existe différentes méthodes permettant de calculer l'intégrale de la fonction  $f$  entre -1 et +1.

### 3.7.2. Méthode d'intégration de Newton-Cotes (cas 1D)

On répartit régulièrement  $(n-1)$  points entre les bornes, obtenant ainsi  $n$  intervalles de même longueur.

$R_n$  est le résidu,  $w_i$  est le poids associé aux points d'intégration.



$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=0}^n \left\{ \int_{-1}^{+1} L_i(x)dx \right\} f_i + R_n = \sum_{i=0}^n w_i f_i + R_n$$

Les poids  $w_i$  sont les intégrales, entre -1 et 1, des fonctions d'interpolation de Lagrange. Si  $n$  est égal à 1, la règle porte le nom de **Règle du trapèze**. Si  $n$  est égal à 2, on a la **formule d'intégration de Simpson**. Si  $n$  est supérieur à 2, on a les **formules de Newton-Cotes**. Par application de la formule générale, la règle d'intégration du trapèze est :

$$I = f(-1) + f(1)$$

De la même façon, la règle de Simpson est donnée par :

$$I = \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

A titre d'exemple, la règle pour  $n$  égal à 3 est :

$$I = \frac{1}{4}[f(-1) + 3f(-\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)]$$

En pratique, on utilise pour  $n$  soit 2 soit 4 car les ordres impairs donnent la même précision que l'ordre pair immédiatement inférieur, avec plus de calculs. Avec ces méthodes, on intègre un polynôme de degré  $n$  passant par  $(n+1)$  points connus, l'erreur commise est de l'ordre de  $(\Delta x)^n$  où  $\Delta x$  est le pas constant entre deux points d'intégration. Le système obtenu en minimisant l'erreur commise quand on remplace l'intégrale exacte par sa valeur approchée, et qui permet de déterminer les poids cherchés, est linéaire en  $w_i$ . Une façon d'améliorer la précision du schéma est d'augmenter le nombre de subdivisions de l'intervalle d'intégration mais au détriment de son coût, une autre façon consiste à faire appel à des méthodes composites, c'est à dire des méthodes pour lesquelles les points ne sont pas équirépartis dans l'intervalle d'intégration. Avec la **méthode de Gauss**, on optimise à la fois la position des points et leur nombre.

### 3.7.3. Méthode d'intégration de Gauss (cas 1D)

On veut remplacer  $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$  par  $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  où la position  $x_i$  des points et leur poids  $w_i$  doivent être déterminés. Il y a donc  $2n$  inconnues avec cette méthode. La façon la plus simple d'introduire cette méthode est la suivante. Soit une fonction linéaire que l'on souhaite intégrer entre -1 et +1. On en connaît la valeur exacte, notée  $I_e$ .

$$\int_{-1}^{+1} (ax + b)dx = I_e = 2b$$

On suppose qu'un seul point d'intégration suffit pour estimer cette intégrale. La valeur approchée se met alors sous la forme :

$$I_a = w_0 f(x_0) = w_0(ax_0 + b)$$

L'erreur commise (le résidu) est la différence entre ces deux valeurs, et on souhaite qu'elle soit minimale indépendamment de la fonction à intégrer :

$$\varepsilon = I_e - I_a = b(2 - w_0) + x_0(aw_0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 2f(0) = 2b$$

On peut reproduire le même raisonnement pour les polynômes de degré plus élevé, en minimisant l'erreur entre la valeur approchée et la valeur exacte. Les points d'intégration portent le nom de « **points de Gauss** ». Si la fonction à intégrer est un polynôme de degré 2 ou 3, son intégrale sur l'intervalle  $[-1,1]$  est

$$I = f(-\sqrt{3}/3) + f(+\sqrt{3}/3)$$

Lorsque  $n$  augmente, il devient fastidieux de calculer la position des points et leur poids par cette méthode car elle conduit à un système de taille croissante, linéaire en  $w_i$  et non linéaire en  $x_i$ . Or, la position des points d'intégration correspond aux zéros des polynômes de Legendre d'où le nom de règle de Gauss-Legendre qui est parfois donné à cette méthode d'intégration. Il existe des tables numériques donnant le nombre de points, leur position et leur poids en fonction du degré du polynôme à intégrer. La méthode de Gauss permet d'intégrer exactement (sans erreur numérique) un polynôme de degré  $(2n-1)$  avec seulement  $n$  points d'intégration. Elle demande moins de points que les méthodes classiques, donc moins de calculs, et est très générale puisqu'elle permet d'intégrer d'autres fonctions que les polynômes. Elle introduit une erreur d'intégration pour des fonctions non polynomiales, mais pour une précision donnée, la méthode de Gauss est la méthode générale qui demande le moins d'évaluations de la fonction à intégrer. C'est la raison pour laquelle elle est utilisée de façon quasi-systématique en éléments finis.

### 3.7.4. Cas 2D et 3D

Soit un élément rectangulaire. En utilisant les règles classiques pour les intégrales multiples, on peut écrire :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy = \sum_i w_i \int_{-1}^{+1} f(x_i, y) dy = \sum_{i,j} w_i w_j f(x_i, y_j)$$

Les  $w_i$  et  $w_j$  sont ceux de la règle 1D étudiée précédemment. Le même raisonnement peut être mené en 3D pour l'utilisation de la règle de Gauss dans le cas d'éléments finis cubiques dans le repère des coordonnées intrinsèques. Il existe toujours une erreur d'intégration en 2D et 3D, quelle que soit l'expression de la fonction à intégrer. Il est très important de noter qu'il n'y a aucune obligation d'utiliser le même nombre de points d'intégration dans chaque direction de l'espace. Pour des éléments basés sur des formulations triangulaires, les règles précédentes ne s'appliquent plus directement car les bornes d'intégration contiennent les variables elles-mêmes. Il n'est plus possible de décomposer l'intégrale double ou triple comme on vient de le faire. La **règle de Radau** consiste à ramener l'intégrale sur le triangle en une intégrale sur le carré par un changement de variable (Figure 3.10).

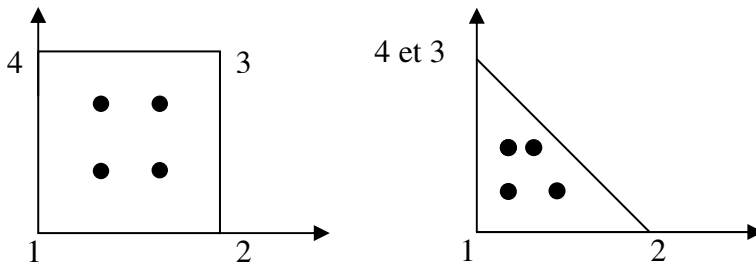


Figure 3.10 : Points d'intégration pour un triangle (Radau)

Cette méthode est peu utilisée car la position particulière des points d'intégration détruit la symétrie du triangle et donne un poids numérique important au point vers lequel sont resserrés les points d'intégration. La **règle de Hammer** préserve la symétrie et fait appel aux intégrales analytiquement connues des fonctions  $\zeta^i \eta^j$  sur le domaine triangulaire (Figure 3.11).

### 3.7.5. Intégration réduite

Un grand nombre d'évaluations de fonctions augmente directement le coût de l'analyse. La méthode de Gauss est donc intéressante car, pour une précision donnée, elle requiert moins de points d'intégration que d'autres méthodes. En pratique, il est très important de bien choisir l'ordre d'intégration : utiliser

beaucoup de points coûte cher, utiliser trop peu de points peut changer sensiblement la solution.

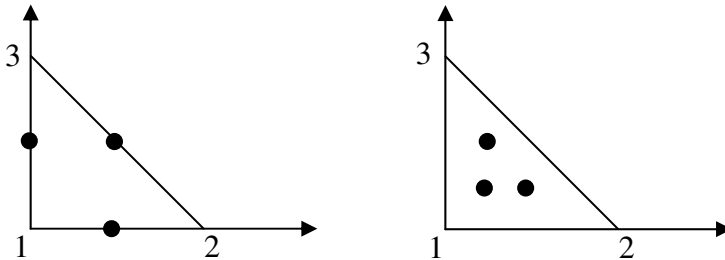


Figure 3.11 : Points d'intégration pour un triangle (Hammer)

Pour une membrane rectangulaire isoparamétrique du premier degré, la matrice des déformations **B** contient les termes linéaires en  $\zeta$  et  $\eta$ . Chaque terme  $k_{ij}$  de la matrice de raideur est alors l'intégrale d'une fonction polynomiale en  $\zeta^2$  et  $\eta^2$  à variables séparables. Par la méthode de Gauss, il est nécessaire de prendre 2 points d'intégration dans chaque direction ( $\zeta$  et  $\eta$ ) pour les évaluer exactement, soit quatre points d'intégration dans l'élément. Pour un rectangle du second degré, les fonctions à intégrer sont des polynômes contenant des termes de degré 4, à variables séparables. Par la méthode de Gauss, il est nécessaire de prendre  $3 \times 3$  points d'intégration pour évaluer exactement chaque terme de la matrice de raideur. Pour un quadrilatère du premier degré de forme quelconque, la fonction à intégrer n'est plus un polynôme mais une fraction rationnelle : l'intégration numérique introduit une erreur. En théorie, les termes des matrices pourraient être évalués « exactement » en prenant beaucoup de points. En pratique, il existe un nombre de points d'intégration au-delà duquel la solution change suffisamment peu pour qu'on puisse parler d'un ordre maximal. Dans beaucoup de cas, on constate qu'un nombre de points plus petit que cet ordre maximal (**intégration réduite**) conduit à une meilleure solution numérique, sachant en outre qu'en diminuant le nombre de points d'intégration, l'évaluation des termes matriciels coûte moins cher. On prend généralement un nombre de points égal au degré d'interpolation dans chaque direction, ce qui donne une bonne approximation des termes de la matrice de raideur.

### 3.8. MODES CINÉMATIQUES PARASITES

L'intégration réduite favorise l'apparition de modes particuliers dits « **modes cinématiques parasites** » qui se traduisent par une singularité de la matrice de raideur. Le rectangle isoparamétrique de degré deux, sous-intégré, est le prototype de l'élément présentant un mode cinématique.

Imaginons un élément de forme carrée, du second degré, dont la matrice de raideur est numériquement intégrée avec deux fois deux points de Gauss. Il existe dans le plan un mode de déformation particulier pour lequel les quatre points de Gauss sont les quatre points fixes. Ce mode est le mode de Lamé (Figure 3.12), c'est un des modes propres de vibration du carré libre dans son plan. Pour ce mode, il existe quatre nœuds de vibration, points dont le déplacement est nul lorsque la structure vibre. Ce sont les quatre points d'intégration. L'énergie de déformation étant discrétisée sur les points de Gauss, elle est nulle bien que le déplacement ne le soit pas. Il existe donc une singularité dans la matrice de raideur, due à la sous-intégration numérique et indépendante de celles dues au manque de conditions aux limites. Physiquement, cela se traduit par un manque de raideur entre faces.

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{q} \neq 0$$

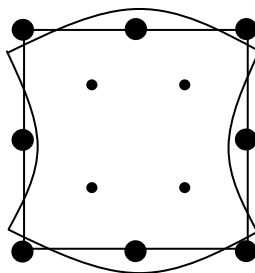


Figure 3.12 : 2x2 points d'intégration, sous-intégration et mode de Lamé

Ce mode parasite ne peut exister quand des éléments sont assemblés car sans apport d'énergie, aucun élément ne peut forcer son voisin à se déformer. Il existe un cas fréquemment employé où ces modes peuvent se développer : c'est lorsqu'on empile des hexaèdres du second degré les uns sur les autres pour former une colonne. Ils sont en général sous-intégrés et dans un plan orthogonal à l'axe de la colonne, on retrouve la situation du début de ce paragraphe.

Pour éliminer ces modes parasites, il existe deux techniques :

- Soit raffiner le maillage et diviser chaque hexaèdre, ce qui outre le temps passé à modifier le maillage, augmente le nombre de degrés de liberté du modèle donc le temps CPU et l'espace disque nécessaire pour la résolution.
- Soit, pour les programmes qui le permettent, augmenter le nombre de points d'intégration ce qui a pour effet de ne rallonger que le temps de calcul des matrices élémentaires. Avec 3x3 points d'intégration, les points de Gauss supplémentaires ne se déplacent que si de l'énergie est fournie à la structure :

les modes parasites ne peuvent pas apparaître (Figure 3.13). Il n'y a pas de remaillage de la structure, ni augmentation du nombre de degrés de liberté.

### 3.9. CONVERGENCE

Le **Patch-test** peut être interprété comme un moyen de vérifier qu'un ensemble d'éléments finis soumis à un champ de contrainte constante reproduit exactement le comportement du milieu. Le champ de déformation est constant, que la taille des éléments tende ou non vers zéro. Le Patch-test garantit aussi qu'une structure qui n'a qu'un mouvement de corps rigide n'est soumise à aucune déformation ni aucune contrainte. Il permet d'évaluer le taux de convergence de l'élément en fonction de sa distorsion. En pratique, on prend généralement un rectangle constitué d'un ensemble d'éléments de façon qu'il y ait au moins un nœud interne, qui sera décalé progressivement. On applique des sollicitations sur le contour de façon à créer des états de déformation constante, en prenant les conditions aux limites suffisantes pour bloquer les mouvements de corps rigides et permettre l'inversion de la matrice de raideur. Il existe plusieurs formulations du problème et plusieurs « Patch-tests ». Il arrive que dans certaines situations (intégration réduite, imprécision sur la géométrie réelle, déformations exprimées en coordonnées curvilignes ou impliquant plusieurs champs de déplacements pour les coques ... ), les tests réalisés pour des déformations constantes ne soient pas exactement satisfaits alors qu'en pratique, les éléments peuvent être extrêmement performants et convergents. On trouvera des indications supplémentaires dans les ouvrages de Bathe, de Batoz ou de Zienkiewicz.

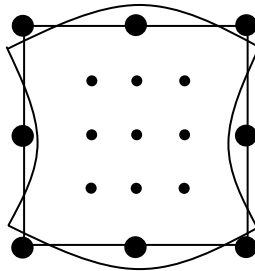


Figure 3.13 : 3x3 points d'intégration



## Chapitre 4

### Déroulement d'un calcul statique linéaire

#### 4.1. INTRODUCTION

Un programme de calcul statique linéaire est conçu pour déterminer le champ de déplacement, les réactions aux appuis, les efforts internes aux nœuds et le champ de contraintes qui existent dans une structure mécanique soumise à divers chargements statiques. Plusieurs hypothèses sont faites implicitement

- comportement élastique linéaire des matériaux,
- petites déformations,
- petites rotations.

Dans un chapitre précédent, nous avons montré l'équivalence dans le cas de l'approche cinématique entre la stationnarité de l'énergie potentielle totale et la résolution du système linéaire

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g}$$

**K** est la matrice de raideur de la structure discrétisée, **q** le vecteur des degrés de liberté indépendants de la structure, **g** le vecteur des charges nodales appliquées sur la structure. Les charges introduites dans un modèle éléments finis peuvent être de deux types : **charges ponctuelles** ou **charges réparties**. Les charges ponctuelles ou **charges nodales** sont les charges que l'utilisateur introduit explicitement sur certains nœuds du maillage : ce sont des forces et des moments ponctuels, qui sont directement associés aux degrés de liberté concernés. Les charges réparties sont les charges linéiques, de surface ou de volume : pression, pression hydrostatique, forces centrifuges, accélération dans une direction quelconque, charges d'origine thermique. Le programme les transforme en charges nodales énergétiquement équivalentes en utilisant les fonctions de forme des éléments sollicités : elles sont localement « fausses » partout, mais globalement « justes » sur chaque élément au sens de l'énergie de déformation.



## 4.2. DÉROULEMENT DU CALCUL

Un calcul statique linéaire comporte six phases distinctes :

- Traduction des données utilisateur en données éléments finis,
- Génération de la matrice de raideur de chaque élément et du vecteur des charges nodales sur l'élément,
- Assemblage de la matrice de raideur structurale et du vecteur de charge,
- Traitement des conditions aux limites et inversion de la matrice de raideur structurale,
- Calcul des déplacements :  $\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}$ ,
- Calcul des contraintes :  $\sigma = \mathbf{T}\mathbf{q}$ .

Certaines opérations, comme le traitement des conditions aux limites, peuvent se faire directement pendant la phase d'assemblage et ne sont pas séparées comme ci-dessus. Cette séparation permet néanmoins de clarifier la présentation des paragraphes suivants.

## 4.3 TRADUCTION DES DONNÉES UTILISATEUR EN DONNÉES ÉLÉMENTS FINIS

Un grand nombre de vérifications sont aujourd'hui faites graphiquement dans le pré-processeur du module de calcul : topologie, conditions aux limites, caractéristiques physiques et matérielles... On teste également l'élancement des éléments, l'ouverture angulaire aux sommets... C'est pendant cette première phase du calcul que l'on réorganise soit la numérotation des nœuds (**largeur de bande**), soit la numérotation des éléments (**largeur de front**), que l'on attribue et que l'on numérote les degrés de liberté aux nœuds, que l'on repère les degrés de liberté soumis à des conditions aux limites car ils subiront pendant le calcul un traitement particulier. Les matrices sont très souvent de grande taille, il est donc important qu'elles soient les plus diagonales possible ; il en résulte un gain d'espace disque pendant la phase de résolution, de temps de calcul (CPU), de place requise pour le stockage de l'information, d'entrée/sortie (I/O)... Les **sparse solvers**, que l'on trouve dans les grands codes commerciaux, ne sont pas pénalisés par des informations éparpillées sur les lignes de la matrice. La réduction de la taille de la bande ou du front n'est pas indispensable. Mais si l'inversion de la matrice de raideur ne fait pas appel à un sparse solver, il est important d'utiliser des algorithmes d'optimisation topologique des matrices dont la description n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage. Il est exclu d'envisager le balayage de toutes les branches possibles pour trouver la meilleure réorganisation des nœuds ou des mailles. Les méthodes d'optimisation ne traitent qu'une partie de l'arborescence et rien ne prouve que l'optimum trouvé soit absolu. La forme de la structure, les chargements, les conditions aux limites influent sur le résultat de la réorganisation. Il peut être

intéressant que le programme essaie plusieurs méthodes pour trouver la mieux adaptée à une application particulière.

#### 4.4. GÉNÉRATION DES MATRICES ÉLÉMENTAIRES

Le programme calcule la matrice de raideur de chaque élément, dans un système d'axes conventionnels attachés à l'élément, et fonction de l'ordre des nœuds qui le définissent. Ces axes sont dits **axes propres**. Dans le cas des membranes ou des coques par exemple, l'axe  $x_p$  est défini du premier nœud vers le second nœud de l'élément,  $y_p$  lui étant orthogonal dans le demi-plan contenant le 3ème nœud.  $z_p$  est orthogonal à  $x_p$  et  $y_p$  et forme avec eux un repère direct (Figure 4.1). C'est également dans le repère propre à chaque élément de poutre que sont donnés ses moments quadratiques.

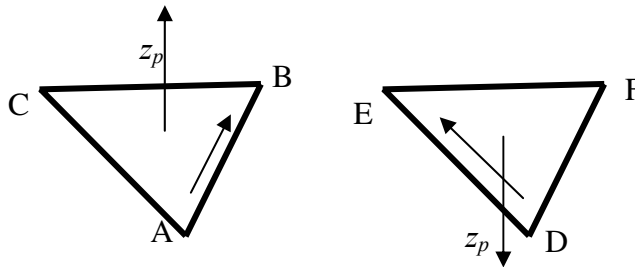


Figure 4.1 : Repères propres des membranes et des coques

#### 4.5. ASSEMBLAGE

Le programme effectue ensuite l'**assemblage**, c'est-à-dire la construction de la matrice de raideur globale de la structure. Cette opération matricielle est basée sur la **méthode des déplacements** ou **méthode des matrices de raideur**. C'est une méthode matricielle indépendante de la notion d'élément fini, qui permet de raccorder plusieurs éléments sur un même nœud par égalité des déplacements en ce nœud. Cette méthode a été utilisée pour construire la matrice de raideur des premiers éléments finis, mais elle ne sert aujourd'hui que pour l'assemblage. Du fait de la continuité des déplacements aux nœuds, on montre que **la raideur en un nœud est la somme des raideurs projetées des éléments qui y sont connectés**. Après assemblage, la taille du problème est égale au nombre de degrés de liberté indépendants de la structure. Soit par exemple le portique suivant, pour lequel on ne s'intéresse qu'aux déplacements dans le plan de la structure (Figure 4.2). Pour chaque élément, dans son repère propre, la matrice de raideur est de dimension 6 car seuls trois degrés de liberté par nœud sont nécessaires pour ce calcul : les deux translations  $u$  et  $v$  et la rotation  $\theta$  dans le plan  $xOy$  sur chaque nœud de l'élément. Par projection dans le repère

structural, le déplacement axial de la poutre 1 au nœud  $N_1$  est égal au déplacement transversal de la poutre 2 au nœud  $N_1$  car il y a connexion physique en ce nœud et donc continuité des déplacements et des rotations. Par assemblage, la raideur au nœud  $N_1$  dans la direction  $y$  est la somme de la raideur axiale de l'élément 1 et de la raideur transversale de l'élément 2. A partir des trois matrices de raideur élémentaire de dimension  $6 \times 6$ , on construit par assemblage une matrice  $12 \times 12$ , ce qui correspond au nombre de degrés de liberté indépendants de ce problème (4 nœuds ayant chacun trois degrés de liberté dans le plan).

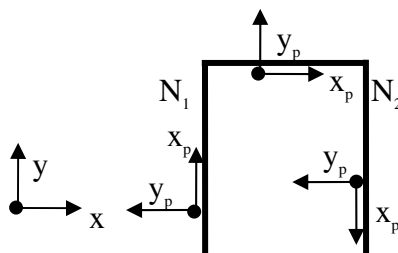


Figure 4.2 : Portique constitué de trois poutres

#### 4.6. INVERSION ET CALCUL DES DÉPLACEMENTS

Pour calculer le déplacement des nœuds de la structure, quelle que soit la méthode utilisée, le programme effectue formellement l'opération :

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}$$

La matrice  $\mathbf{K}$  est de grande taille et son inversion ne peut pas être réalisée en utilisant les formules classiques d'inversion matricielle (calcul du déterminant et des co-matrices). On a donc recours à différentes techniques, dont la **méthode d'élimination de Gauss** pour une matrice symétrique permettant de remplacer l'inversion du système carré initial par celle moins coûteuse de deux systèmes triangulaires en décomposant  $\mathbf{K}$  sous la forme  $\mathbf{LU}$ ,  $\mathbf{L}$  étant une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux ont pour valeur 1 et  $\mathbf{U}$  une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} &\Rightarrow \mathbf{LU}\mathbf{q} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{Ly} = \mathbf{g} \\ &\Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} \end{aligned}$$

Cette méthode n'est utilisable telle quelle que si la matrice est inversible, c'est-à-dire si  $\mathbf{K}^{-1}$  existe (ce qui se traduit mathématiquement par un déterminant non nul) et si, en cours d'élimination, un des pivots ne devient pas trop petit. Les problèmes de détection de pivots nuls ou quasi-nuls en cours d'inversion sont

détaillés dans le chapitre suivant. La matrice de raideur structurale est non inversible. La prise en compte des conditions aux limites a pour effet de bloquer certains mouvements de la structure. Si cette dernière est extérieurement isostatique ou hyperstatique, elle n'a plus de mouvement d'ensemble : il existe une position d'équilibre unique sous charge. Il existe deux types de conditions aux limites : les **conditions absolues** et les **conditions relatives**. Les conditions aux limites sont absolues quand on connaît la valeur que prend un degré de liberté avant même de faire le calcul. C'est le cas d'une fixation ou d'un déplacement imposé. Les conditions aux limites sont relatives quand un ensemble de degrés de liberté est relié par des relations cinématiques plus ou moins complexes, mais que l'on ne connaît pas à l'avance la valeur prise par ces degrés de liberté (exemple d'un ensemble de nœuds formant un corps rigide).

Dans un calcul strictement linéaire, la fixation d'un degré de liberté est nécessairement bilatérale car il n'y a pas d'ajustement de la condition aux limites selon le signe de la réaction : il n'y a qu'un calcul pour la détermination du champ de déplacement et des réactions. Pour traiter les degrés de liberté fixés, on commence par partitionner le vecteur des déplacements et la matrice de raideur associée. On sépare les degrés de liberté fixés  $\mathbf{q}_f$  des autres dits libres (les  $\mathbf{q}_l$ ) en ce sens que leur déplacement n'est pas connu a priori. La relation matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lf} \\ \mathbf{K}_{fl} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lf} \\ \mathbf{K}_{fl} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ 0 \end{bmatrix}$$

On peut calculer  $\mathbf{q}_l$  à partir de la première ligne de ce système matriciel

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{K}_{ll}^{-1} \mathbf{F}_l$$

Seule la sous-matrice  $\mathbf{K}_{ll}$  est à inverser. Ce n'est donc pas la matrice de raideur structurale qui doit être inversible mais la matrice de raideur après la prise en compte des conditions aux limites. Du fait de la technique de résolution, on ne sait pas traiter de manière classique plusieurs jeux de conditions aux limites en un seul passage alors qu'il est possible d'appliquer plusieurs charges indépendantes. Si les conditions aux limites changent, le découpage initial du vecteur des degrés de liberté ( $\mathbf{q}_l$ ,  $\mathbf{q}_f$ ) n'est plus valable, ni celui de la sous-matrice  $\mathbf{K}_{ll}$  : il faut la ré-évaluer et la ré-inverser.  $\mathbf{F}_f$  est un résultat de calcul et n'est pas une donnée

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{K}_{fl} \mathbf{q}_l = \mathbf{K}_{fl} \mathbf{K}_{ll}^{-1} \mathbf{F}_l$$

C'est le vecteur des forces qu'il faut appliquer sur les degrés de liberté  $\mathbf{q}_f$  pour qu'ils ne se déplacent pas :  $\mathbf{F}_f$  est le vecteur des **réactions**. Dans le cas de

déplacements imposés, le traitement est légèrement différent car le système s'écrit,  $\mathbf{q}_f$  représentant les degrés de liberté fixés,  $\mathbf{q}_i$  ceux dont le déplacement est imposé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{li} \\ \mathbf{K}_{il} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_l = \mathbf{K}_{ll}\mathbf{q}_l + \mathbf{K}_{li}\mathbf{q}_i \Rightarrow \mathbf{q}_l = \mathbf{K}_{ll}^{-1}(\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{li}\mathbf{q}_i)$$

Les charges  $\mathbf{F}_i$  sont les efforts qu'il faut appliquer sur les degrés de liberté  $\mathbf{q}_i$  pour qu'ils se déplacent de la quantité voulue

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_{il}\mathbf{q}_l + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{q}_i$$

Il est tout-à-fait possible d'avoir des degrés de liberté fixés et d'autres à déplacement imposé dans un même calcul : il suffit de partitionner de manière adéquate les matrices et vecteurs. La **méthode de pénalité** peut s'avérer plus efficace informatiquement parlant, par limitation du nombre d'opérations à effectuer, mais elle est susceptible d'engendrer des problèmes numériques. Pour imposer que le degré de liberté  $q_i$  prenne la valeur  $\bar{q}_i$ , on ajoute dans chaque membre un terme différent, ce qui modifie a priori le système :

$$\begin{bmatrix} F_l \\ F_j \\ F_i + \alpha\bar{q}_i \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ll} & . & k_{li} & . \\ . & . & . & . \\ k_{il} & . & k_{ii} + \alpha & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l \\ q_j \\ q_i \\ q_n \end{bmatrix}$$

Si  $\alpha$  est suffisamment grand par rapport au terme diagonal  $k_{ii}$  correspondant au degré de liberté dont le déplacement est imposé, la  $i^{\text{ème}}$  ligne du système se ramène numériquement à  $\alpha\bar{q}_i = \alpha q_i$  soit encore  $\bar{q}_i = q_i$  ce qui est bien ce qui était souhaité. Il n'y a pas de réorganisation du système d'équations par permutation des lignes mais seulement une modification de deux termes, l'un dans le vecteur de charge, l'autre sur un élément diagonal de la matrice de raideur structurale. Cette simplicité est l'intérêt majeur de la méthode. Cependant, si  $\alpha$  n'est pas assez grand, le déplacement imposé n'a pas la valeur souhaitée car numériquement,  $F_i$  et les termes  $k_{ij} q_j$  ne sont pas négligeables par rapport  $\alpha\bar{q}_i$  et  $\alpha q_i$ . Si  $\alpha$  est trop grand, il y a risque de déconditionnement numérique de la matrice de raideur, et alors, soit le système n'a pas de solution, soit la solution calculée n'est pas correcte. C'est l'inconvénient majeur de cette méthode. Dans les codes de calcul de structures par éléments finis, il existe des outils permettant de déterminer automatiquement la valeur de la pénalité  $\alpha$  conduisant à une bonne solution. Lorsqu'il y a simultanément des fixations et des déplacements imposés, le partitionnement des degrés de liberté est réalisé

en conséquence et on résout de façon tout à fait classique un système de trois « équations » à trois « inconnues » :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{fl} \\ \mathbf{K}_{if} & \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{il} \\ \mathbf{K}_{lf} & \mathbf{K}_{li} & \mathbf{K}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_l \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{q}_f = 0 \text{ et } \mathbf{q}_i \text{ non nul mais connu.}$$

$$\begin{cases} \mathbf{q}_l = \mathbf{K}_{ll}^{-1} (\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{li} \mathbf{q}_i) \\ \mathbf{F}_i = \mathbf{K}_{if} \mathbf{q}_f + \mathbf{K}_{ii} \mathbf{q}_i + \mathbf{K}_{il} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{F}_f = \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f + \mathbf{K}_{fi} \mathbf{q}_i + \mathbf{K}_{fl} \mathbf{q}_l \end{cases}$$

On calcule d'abord le déplacement des degrés de liberté libres, puis les efforts nécessaires pour imposer les déplacements  $\mathbf{q}_i$ , puis les réactions sur les degrés de liberté fixés. Dans le cas de conditions aux limites relatives, on renvoie le lecteur à d'autres ouvrages dans lesquels leur traitement est détaillé.

#### 4.7. CALCUL DES CONTRAINTES

Le calcul des contraintes était initialement effectué sans passer par celui des déformations. En effet, la contrainte  $\sigma$  est reliée aux déplacements discrets par

$$\sigma = \mathbf{H}\varepsilon = \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{q}$$

$\mathbf{T}$  est la **matrice des contraintes** qui permet de calculer les contraintes directement à partir des déplacements aux nœuds. En fait, le retour aux contraintes dépend du type d'élément fini utilisé pour le modèle et de la programmation réalisée dans le code de calcul. On peut effectuer directement le produit  $\sigma = \mathbf{H}\varepsilon$  car il coûte moins cher au niveau informatique. « La contrainte » est une expression dangereuse à utiliser. Les termes de la matrice de raideur, associés aux degrés de liberté et donc aux nœuds du maillage, sont évalués en utilisant les divers points d'intégration situés dans l'élément. Les déplacements (et éventuelles rotations) sont calculées aux nœuds de l'élément. Les contraintes sont calculées aux points d'intégration de chaque élément : ce sont en fait toutes les composantes du tenseur des contraintes en chaque point d'intégration. Il ne s'agit donc pas de la contrainte. A partir de ces informations, l'utilisateur peut extraire en chaque point de Gauss une composante principale, une composante dans une direction propre, une composante dans une direction structurale, une contrainte équivalente. A partir de ces informations, l'utilisateur peut analyser des valeurs moyennes sur l'élément, ou extrapolées aux divers nœuds des éléments par différentes techniques détaillées dans un des chapitres suivants. Ce point fait l'objet du chapitre 6.



## Chapitre 5

### Validation des résultats

#### 5.1. VÉRIFICATIONS ÉLÉMENTAIRES

Les utilisateurs de logiciels de calcul de structure peuvent effectuer des post-traitements graphiques interactifs très complets et oublient parfois de consulter un certain nombre d'informations fournies par le programme soit dans un listing soit directement à l'écran. Or certaines informations permettent a priori d'affirmer que le calcul est faux suite à des données incorrectes ou des problèmes numériques. La première chose à faire est de rechercher les avertissements ou les erreurs générés par le programme qui, même s'il se déroule jusqu'au bout, doivent éventuellement faire douter de l'exactitude des résultats. Ne pas avoir défini la masse volumique est sans conséquence en statique s'il n'y a pas d'accélération (gravité par exemple). Ne pas avoir défini un coefficient de dilatation thermique est sans conséquence s'il n'y a pas de champ de température à prendre en compte dans le calcul mécanique. S'il n'y a ni avertissement, ni erreur, il faut ensuite vérifier la longueur de la structure (modèles barres ou poutres), sa surface (modèles états plans ou coques), son volume (modèles tri-dimensionnels), sa masse, la position du centre de gravité et, si possible, le tenseur d'inertie. Ce sont des vérifications élémentaires mais elles permettent souvent de détecter des erreurs de données : problème d'unités ; erreur sur un module, une épaisseur, une masse volumique, une section ; discrétisation trop grossière...

#### 5.2. CONDITIONNEMENT NUMÉRIQUE

On cherche à inverser le système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Les outils numériques d'évaluation des matrices et des vecteurs de charge, les opérations de projection dans le repère structural font qu'apparaissent des erreurs de troncature ou d'arrondi, à la fois sur les termes de la matrice  $\mathbf{A}$  et sur ceux du vecteur  $\mathbf{b}$ . Il en résulte une possible erreur numérique sur la solution. Il est souhaitable et souhaité que cette solution dépende de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{b}$  donc du problème physique



posé plutôt que des erreurs commises sur **A** et **b**. Dans le cas des matrices symétriques, semi-définies positives, à coefficients réels, les  $\lambda$  étant les valeurs propres de la matrice, le **conditionnement numérique** est défini par le rapport :

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Il sert à évaluer la mauvaise qualité potentielle des résultats obtenus à partir de la matrice inversée. Lorsque le conditionnement devient grand, la **matrice** est dite **mal conditionnée**. Son inverse existe mais elle dépend plus des imprécisions numériques d'évaluation des coefficients que du problème lui-même. En mécanique, on ne calcule pas le conditionnement de la matrice de raideur avant de l'inverser. Tout d'abord, parce que calculer des valeurs propres coûte cher et suppose des algorithmes appropriés. D'autre part, parce qu'il faut la plus grande et la plus petite des valeurs propres et qu'il est donc nécessaire d'effectuer deux recherches avec deux algorithmes différents, les méthodes usuelles trouvant essentiellement la première ou les quelques premières valeurs propres (domaine basses fréquences) mais pas la dernière. Pour ces raisons économiques, on se contente d'examiner le rapport des termes diagonaux de la matrice à inverser, ce qui ne permet pas toujours de conclure correctement quant au conditionnement numérique réel du système matriciel.

On considère généralement que le mauvais conditionnement apparaît lorsque le rapport entre le terme diagonal maximal et le terme diagonal minimal de la matrice de raideur assemblée excède une certaine valeur, souvent  $10^8$ . L'examen de la diagonale n'est cependant pas suffisant car les termes diagonaux peuvent être tous du même ordre de grandeur et la matrice mal-conditionnée. Prenons un ensemble de trois ressorts en série, de raideur  $K$ ,  $k$  et  $K$ , l'une des extrémités étant encastré, ce qui conduit pour la matrice de raideur assemblée à :

$$\begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & K+k & -k \\ 0 & -k & K+k \end{bmatrix}$$

Si  $k$  est très petit par rapport à  $K$ , la matrice est mal-conditionnée alors que tous les termes diagonaux sont quasi-identiques : les lignes 1 et 2 sont presque linéairement dépendantes. Le mauvais conditionnement peut se produire lorsque des matériaux de caractéristiques mécaniques très différentes co-existent ou lorsqu'il y a des disparités importantes sur les dimensions des éléments d'un même modèle. Il faut alors homogénéiser les raideurs, c'est-à-dire avoir des « petites » mailles de matériau « mou » et des « grandes » mailles de matériau « dur », ou raffiner le maillage dans le cas d'un seul matériau.

## 5.3. PIVOTS NULS ET FIXATIONS

### 5.3.1. Introduction

Un **mode rigide** ou **mouvement de corps solide** se caractérise par le fait que la structure ne subit aucune déformation. Il en résulte par conséquent que ce type de mouvement n'engendre aucune contrainte dans la structure. Dans le cas d'une modélisation 3D, une structure possède intrinsèquement six modes rigides qui sont les trois translations d'ensemble le long des trois axes structuraux (ou toute combinaison linéaire de ces mouvements élémentaires) et les trois rotations d'ensemble autour de ces mêmes axes (ou de trois axes deux à deux perpendiculaires). Dans le cas d'une modélisation 2D, une structure possède trois modes rigides qui sont les deux translations dans le plan et la rotation dans le plan autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Dans le cas d'une modélisation axisymétrique, une structure possède mathématiquement deux modes rigides qui sont la translation le long de l'axe de révolution et la rotation autour de cet axe. Mais la rotation autour de l'axe n'est pas discrétisée pour les éléments axisymétriques : seul le mode de translation subsiste. En analyse modale, il est envisageable et possible de calculer des bases modales en présence de modes rigides ; c'est le cas d'engins en vol. Par contre, en analyse statique, il faut un nombre minimum de conditions aux limites pour éviter que la structure ne parte à l'infini lorsque des charges lui sont appliquées. Si tous les modes rigides ne sont pas éliminés par les différentes conditions aux limites absolues ou relatives, la structure est extérieurement hypo-statique ce qui se traduit numériquement par l'apparition d'un ou de plusieurs zéros sur la diagonale de la matrice de raideur lors de l'inversion de cette matrice par la méthode de Gauss. Les termes diagonaux s'appellent «  **pivots**  » et on parle alors de pivots nuls. Prenons le cas d'une barre de longueur  $L$ , de section  $S$  et constituée d'un matériau de module de Young  $E$ , pour laquelle on résout le système classique :

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

On remplace la seconde ligne par la somme des deux lignes ce qui donne le système équivalent :

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & -\frac{ES}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_1 + g_2 \end{bmatrix}$$

On détecte un pivot nul sur la diagonale de la matrice de raideur. Si la barre est sollicitée par deux charges de même intensité mais de sens contraire, la seconde

équation du système est vérifiée quel que soit  $q_2$  qui est donc indéterminé : le programme bloque le degré de liberté associé au pivot nul et continue la résolution. Avec  $q_2$  égal à 0, la première ligne du système s'écrit  $kq_1 = g_1$  d'où la détermination du déplacement  $q_1$ . La structure est symétrique, soumise à des conditions aux limites symétriques (il n'y en a pas), et à un chargement symétrique : la solution n'est pourtant pas symétrique. Les structures mécaniques étant en général iso-statiques ou hyper-statiques, on s'attend à ne pas trouver de pivots nuls dans le fichier de résultats d'un calcul statique. On considère donc souvent que pivot nul est synonyme de faute. Mais en fait, le problème est complexe car il se peut qu'il y en ait et que la solution soit correcte.

### 5.3.2. Pivots nuls

Il existe une relation donnant a priori le nombre de pivots nuls **PN** qui apparaîtra lors de l'inversion d'une matrice :

$$PN = MR - FIX - LIA + DDLNAR + MCP + MCN + MI$$

**MR** est le nombre de modes rigides potentiels (6 mouvements d'ensemble pour les modèles 3D, 3 pour les modèles 2D et 1 pour les modèles axisymétriques)

**FIX** est le nombre de modes rigides éliminés par fixations

**LIA** est le nombre de modes rigides éliminés par liaisons ou relations linéaires entre degrés de liberté

**DDLNAR** est le nombre de modes rigides générés par des Degrés De Liberté Non Alimentés en Raideur

**MCP** est le nombre de modes rigides générés par des Modes Cinématiques Parasites

**MCN** est le nombre de modes rigides dus à un Mauvais Conditionnement Numérique

**MI** est le nombre de modes rigides générés par des Mécanismes Internes

**FIX** : Il convient de dissocier les fixations imposées dans le cahier des charges des fixations complémentaires introduites par l'utilisateur pour filtrer les modes rigides.

Dans le cas d'une membrane encastree sur un côté (Figure 5.1), les trois modes rigides qui existent dans le plan sont éliminés par les fixations du modèle. Les réactions sur les degrés de liberté fixés équilibrent les charges appliquées. Soit maintenant une membrane soumise à deux forces opposées (Figure 5.2). Il n'y a aucune fixation pour ce problème : il existe donc trois modes rigides, bien qu'il y ait équilibre en translation et en rotation. Si seules les charges sont introduites dans les données, le programme fixe trois degrés de liberté indépendants lors de

la résolution pour pouvoir inverser la matrice de raideur puis calculer les déplacements et les contraintes. Les déplacements obtenus sont la somme du déplacement élastique auquel se superpose une combinaison linéaire de modes rigides : ils ne sont donc pas symétriques bien que le problème le soit. Un mode rigide n'engendrant pas de contrainte, les contraintes calculées sont les contraintes qui existent réellement dans la structure chargée.

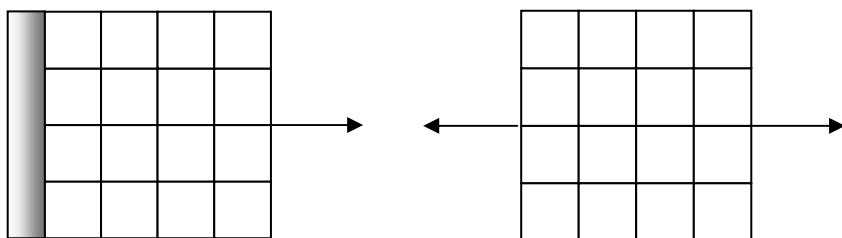


Figure 5.1 : Membrane encastrée sur un bord

Figure 5.2 : Membrane en équilibre, avec modes rigides

L'utilisateur peut décider d'éliminer lui-même les modes rigides pour restaurer la symétrie du problème en fixant au moins trois degrés de liberté indépendants. Par exemple, en raison des symétries, il est possible de fixer les déplacements perpendiculaires à la charge aux points sollicités et le déplacement dans la direction de la charge au centre de la structure, ou comme sur la figure 5.3, les déplacements perpendiculaires à la charge aux points sollicités et les deux déplacements du centre de la structure.

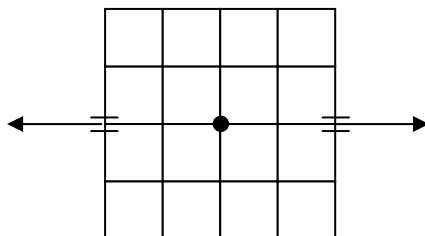


Figure 5.3 : Exemple de fixations complémentaires

Il est impératif de vérifier que la réaction est nulle sur les degrés de liberté arbitrairement fixés. Sinon, c'est que la structure devait se déplacer sous l'effet du chargement et qu'elle a été retenue par les conditions aux limites supplémentaires : le problème traité n'est pas le problème posé.

**LIA** : Il n'est pas toujours possible d'ajouter des fixations pour éliminer les mouvements d'ensemble. Dans le cas suivant, tous les nœuds se déplacent dans les deux directions du plan (Figure 5.4 et figure 5.5). Du fait de la symétrie du problème, bien qu'il n'y ait pas de degré de liberté fixé, on peut éliminer les trois modes rigides du plan en imposant par exemple :

$$u_A = -u_B \quad v_C = -v_D \quad \text{et} \quad v_E = v_F$$

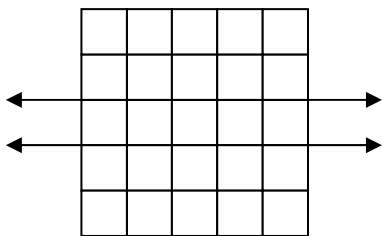


Figure 5.4 : Structure hypo-statique

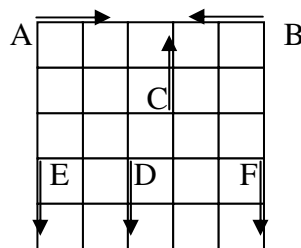


Figure 5.5 : Exemple de liaisons

En effet, si l'on impose que les nœuds A et B ont des déplacements opposés sur l'axe des  $x$ , ils ne peuvent pas être égaux donc le mode de translation d'ensemble sur  $x$  est bloqué par la **liaison cinématique** entre les deux degrés de liberté. Il en est de même pour le mode de translation d'ensemble sur  $y$ , bloqué par la seconde liaison cinématique. Le mode rigide de rotation dans le plan est éliminé par la troisième relation car si les nœuds E et F ont la même translation dans la direction  $y$ , il ne peut y avoir de rotation autour de  $z$  caractérisée par le déplacement opposé de ces nœuds dans la direction  $y$ . En analyse modale, sans aucun degré de liberté fixé dans un modèle comportant des liaisons cinématiques entre degrés de liberté explicitement générée par l'utilisateur ou implicitement écrites par le programme à partir de macro-commandes (corps rigides par exemple), il se peut qu'il y ait un nombre de modes rigides inférieur à trois ou six.

**DDLNR** : Ce problème ne se rencontre qu'avec des éléments de barres, de membranes tridimensionnelles, et dans certains programmes, avec des éléments de coques. Il ne survient que pour des éléments dont le nombre de degrés de liberté est différent dans le repère propre et dans le repère structural, pour des configurations particulières. Par exemple, pour le premier assemblage (Figure 5.6), la barre 1 n'a pas de raideur dans la direction  $y$  structurale, la barre 2 n'a pas de raideur dans la direction  $x$  structurale. Par assemblage, au point de connexion, il y a de la raideur dans les deux directions. Mais pour le second assemblage, il n'y a pas de raideur dans la direction  $y$ . Les coques ont en général six degrés de liberté par nœud mais souvent, seuls cinq sont alimentés

en raideur. Le sixième,  $\phi_z$ , appelé degré de liberté de forage, ou « drilling DOF », correspond à la rotation du nœud dans le plan de la coque et est souvent associé à une raideur nulle (cf. Chapitre 9). Dès que de telles coques sont coplanaires ou presque coplanaires, le programme détecte un manque de raideur en  $\phi_z$  et bloque les pivots. Ce problème n'apparaît pas avec les éléments de coque dont tous les degrés de liberté, y compris le  $\phi_z$ , sont alimentés en raideur.

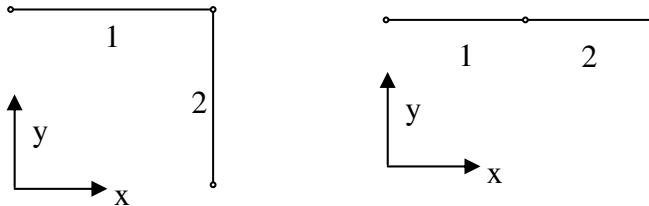


Figure 5.6 : Exemple de fixations complémentaires

**MCP** : Les éléments finis sont généralement numériquement sous intégrés : c'est économique et cela améliore souvent leur comportement. Dans un certain nombre de situations, l'intégration réduite peut conduire à des problèmes numériques : les modes cinématiques parasites qui traduisent un manque de raideur dans l'élément. Les parades ont été explicitées dans le chapitre 5.

**MCN** : La détection et le traitement d'un problème mal conditionné ont été détaillés dans le paragraphe 2 de ce chapitre.

**MI** : Les mécanismes internes reflètent soit une faute de conception dans les treillis de barres (non respect de la formule liant le nombre minimum de barres  $b$  au nombre de nœuds  $n$  d'une cellule :  $b \geq 2n-3$  dans le plan), soit des parties de modèle non rattachées au reste du modèle (arbre dans un alésage sans raideur de palier), ce qui se traduit physiquement par des modes rigides « locaux ». Ou tout simplement parce que la structure a été maillée en plusieurs étapes et que les divers morceaux n'ont pas été correctement collés. C'est pour éviter ce problème qu'il est important de bien vérifier les bords libres de la structure lors du pré-traitement graphique.

Il faut contrôler dans tous les cas que la fixation des pivots ne génère pas de réactions non nulles sur les degrés de liberté fixés. En conclusion, l'absence de pivots nuls ne garantit pas à elle seule la validité du calcul mais l'apparition de pivots nuls n'implique pas nécessairement des calculs faux.

## 5.4. PIVOTS NÉGATIFS

La matrice de raideur étant semi-définie positive, l'apparition de pivots négatifs est en général liée à une erreur de données, qui peut être détectée lors du pré-traitement graphique des données :

- Module de Young négatif,
- Epaisseurs, sections ou inerties négatives,
- Coefficient de Poisson négatif ou supérieur à 1/2...

Sauf cas particuliers, la détection d'un pivot négatif entraîne un arrêt du programme. Un certain nombre de fonctionnalités mises en place dans les modèles éléments finis créent des contraintes cinématiques entre degrés de liberté : ce sont par exemple les corps rigides, les conditions de planéité, les collages de modèles,... Lorsque ces contraintes sont traitées par la technique des **multiplicateurs de Lagrange**, le nombre de **pivots négatifs** détecté lors de l'inversion de la matrice de raideur est égal au nombre de contraintes du problème. Un multiplicateur de Lagrange représente l'intensité de la force interne qui est développée pour que la contrainte soit satisfaite. Si une contrainte est redondante, c'est-à-dire si elle est une combinaison linéaire d'autres contraintes du problème, le pivot engendré n'est plus négatif mais nul. En effet, la contrainte étant déjà satisfaite par une combinaison des autres, la force interne nécessaire pour l'assurer est nulle donc le multiplicateur de Lagrange associé aussi. Dans ce cas, il apparaît des pivots nuls dont la cause n'est pas donnée dans la formule du paragraphe 5.3.2. Il faut alors contrôler que la somme du nombre de pivots nuls « supplémentaires » et du nombre de pivots négatifs est égale au nombre de contraintes linéaires du problème.

## 5.5. ÉQUILIBRE

Il faut toujours vérifier l'équilibre entre les charges appliquées sur la structure et les réactions nodales. Mais charges signifie charges appliquées par l'utilisateur et non pas par le programme. En effet, si suite à une erreur de données, une charge (ou partie du chargement total) est appliquée dans une mauvaise direction, si elle est mal décomposée, si elle n'est pas correctement prise en compte (gravité mais pas de masse volumique pour au moins un des matériaux), une partie de la charge définie par l'utilisateur n'est pas prise en compte par le programme. Malgré l'équilibre apparent dans le fichier résultat, le calcul n'est pas correct car la structure n'est pas soumise au vrai chargement.

Dans les modélisations axisymétriques, la charge radiale totale, intégrée sur la circonférence, est nulle : elle est auto-équilibrée. La réaction radiale, quelle que soit sa valeur et même si elle est différente de la charge radiale, est elle aussi auto-équilibrée sur la structure. C'est le cas où un déséquilibre apparent

charges-réactions ne pose aucun problème. Dans la direction axiale, même pour un modèle axisymétrique, il doit y avoir équilibre.

En considérant comme charges les composantes du vecteur  $\mathbf{F}$  introduites en pré-traitement, et comme réactions les composantes de ce même vecteur calculées pendant la phase de résolution, il est possible qu'il n'y ait ni charge ni réaction sur la structure bien qu'elle soit déformée. C'est par exemple le cas d'une barre de raideur  $K$  encastrée à une extrémité et soumise à un déplacement imposé  $U$  sur l'autre. Il n'y a aucune charge extérieure appliquée en tant que telle. La résolution du système associé donne pour l'encastrement une force  $F_1$  (réaction « classique ») et une force  $F_2$  pour l'autre extrémité.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix} \Rightarrow F_1 = -KU \quad \text{et} \quad F_2 = KU$$

$F_2$  est la charge qu'il a fallu appliquer pour que le déplacement ait la valeur désirée  $U$ . Elle est comptabilisée dans les réactions car elle est calculée par le programme : la somme des charges est nulle, la somme des réactions également.





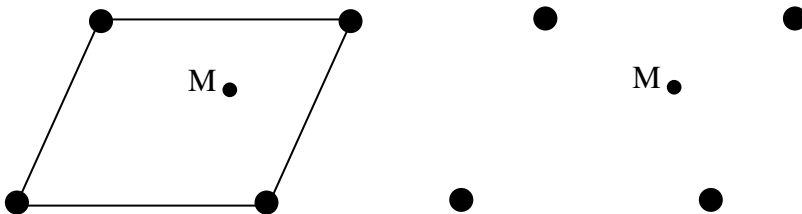
## Chapitre 6

### Contraintes

#### 6.1. DISCRÉTISATION ET ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

La théorie cinématique généralement utilisée dans les programmes de calcul de structure est basée sur une connaissance forte du champ de déplacement qui est supposé continu dans toute la structure. Il en résulte une connaissance faible du champ de contrainte qui ne sont connues qu'en moyenne par élément, elles sont discontinues d'un élément à un autre. Dans les cours de Mécanique des Milieux Continus, la contrainte est une fonction continue et différentiable : il est paradoxal de vouloir résoudre des problèmes de Mécanique des Milieux Continus par Eléments Finis puisque, par cette méthode, la structure est discrétisée et les contraintes ne sont pas continues.

Soit un quadrilatère représentant une portion de structure continue, soumis à une pression. Le comportement continu de cet élément est approché par le comportement discret de ses quatre coins (Figure 6.1). Le passage du problème physique à la simulation par élément finis amène deux interrogations.



*Figure 6.1 : Milieu continu et élément fini*

Comment et où appliquer la pression sur l'élément puisque du fait de la discrétisation, il n'est défini que par un ensemble de degrés de liberté et de fonctions d'interpolation qui n'ont ni surface ni volume ? Comment calculer les

contraintes en un point M intérieur à l'élément, sachant qu'elles doivent vérifier les équations locales de l'équilibre ? La réponse à ces questions est fournie par le principe variationnel basé sur le critère de l'énergie potentielle totale. Le travail des charges réparties appliquées sur la structure continue est, si  $\mathbf{F}$  représente l'intensité des charges volumiques et  $\mathbf{P}$  l'intensité des charges surfaciques

$$T = \int_V \mathbf{F}^T u dv + \int_S \mathbf{P}^T u ds$$

Le champ de déplacement dans l'élément est une combinaison des degrés de liberté de l'élément  $u = \mathbf{N}\mathbf{q}$ . En reportant cette forme discrétisée dans l'expression du travail, on obtient :

$$T = \left( \int_V \mathbf{F}^T \mathbf{N} dv \right) \mathbf{q} + \left( \int_S \mathbf{P}^T \mathbf{N} ds \right) \mathbf{q}$$

Les degrés de liberté étant indépendants, les charges associées le sont aussi : elles sont données par le **théorème de Castigliano** :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i$$

On remplace une charge répartie par des charges ponctuelles sur les degrés de liberté du modèle, énergétiquement conjuguées. Cela signifie que le travail généré par la charge répartie sur la structure continue est égal au travail généré par des charges ponctuelles sur les degrés de liberté choisis. Les charges sont « fausses partout », les équations locales de l'équilibre ne peuvent pas être vérifiées en un point quelconque intérieur à un élément fini. Mais les contraintes moyennes dans l'élément vérifient les équations d'équilibre : ce sont bien des intégrales que l'on trouve dans les expressions issues des résidus pondérés ou des principes variationnels.

Pour la représentation des contraintes équivalentes, des composantes du tenseur des contraintes ou des contraintes principales de ce tenseur, certains programmes offrent quatre possibilités :

- **contrainte moyenne** par élément,
- contrainte moyenne lissée,
- **contrainte extrapolée** par élément,
- contrainte extrapolée lissée.

## 6.2. CONTRAINTES MOYENNES, LISSÉES OU NON

Pour simplifier les représentations graphiques, imaginons une structure linéique, constituée de quatre éléments, sur lesquels la contrainte vraie est représentée par le trait pointillé. Les points noirs symbolisent la valeur de la contrainte aux points de Gauss, valeur supposée exacte (Figure 6.2).

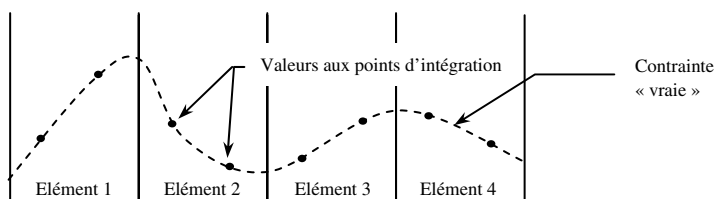


Figure 6.2 : Contrainte « vraie » dans le maillage

Le premier post-traitement possible consiste à faire pour chaque élément la moyenne des contraintes aux points de Gauss et à la reporter sur tout l'élément. C'est cette contrainte moyenne qui vérifie l'équilibre global sur l'élément. Elle est discontinue d'un élément à l'autre et, sans comparaison avec d'autres valeurs, elle ne donne pas d'information vraiment exploitable (Figure 6.3).

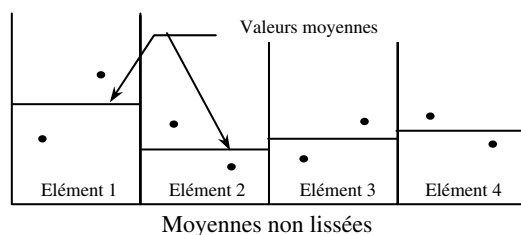


Figure 6.3 : Contrainte moyenne non lissée

Le second post-traitement possible consiste à calculer en un nœud la moyenne des contraintes moyennes dans les éléments auxquels ce nœud appartient. Ces contraintes moyennes lissées aux nœuds sont symbolisées ici par une croix. Un algorithme de remplissage fait passer la meilleure courbe possible par cet ensemble de croix. Ce lissage s'apparente à de la cartographie plus qu'à du calcul de structure : connaissant les coordonnées des nœuds et leur cote (la valeur de la contrainte en ce point), on trace les courbes de niveau sur le maillage de la structure. Les discontinuités du champ de contrainte sont de ce fait gommées et on obtient un beau dessin qui n'est plus à même de rendre compte des discontinuités physiques dues à des changements de matériaux, de brusques variations d'épaisseur, la présence de raidisseurs dans le plan des

panneaux (Figure 6.4)... Le **lissage** doit donc être évité a priori car il gomme, sans pouvoir faire de différences, les discontinuités liées à la théorie et les discontinuités physiques. Pour se convaincre de l'inutilité, voire du danger, de ces contraintes moyennes lissées, il n'y a qu'à comparer la Figure 6.2 et la Figure 6.4.

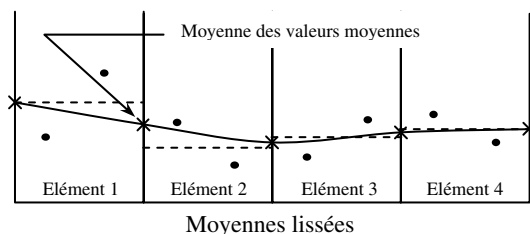


Figure 6.4 : Contrainte moyenne lissée

### 6.3. CONTRAINTES EXTRAPOLÉES, LISSÉES OU NON

Le troisième post-traitement consiste à utiliser les fonctions de forme des éléments pour extrapoler la contrainte en chaque nœud de l'élément à partir des contraintes aux points de Gauss, sans tenir compte de la contrainte dans les éléments adjacents (Figure 6.5). La contrainte évolue continûment au sein de chaque élément mais peut présenter une discontinuité lors du franchissement des arêtes (ou des nœuds comme pour cet exemple).

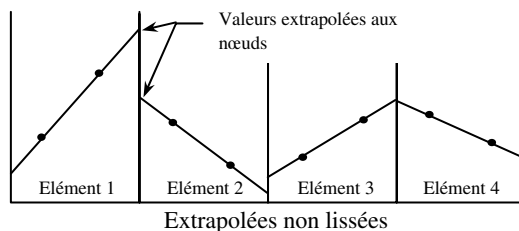


Figure 6.5 : Contrainte extrapolée non lissée

On distingue les zones accidentées et les zones courantes. Une zone est accidentée quand elle comporte des changements de matériau ou d'épaisseur, des charges ponctuelles isolées ou des conditions aux limites isolées, des raccords d'éléments (jonction poutre/coque ; jonction de coques en T...). Une zone courante est une zone non accidentée. Le tracé des **contraintes extrapolées** non lissées apporte de précieux renseignements. On dispose alors d'informations permettant d'interpréter le champ de contrainte. Il n'est pas

normal qu'au sein d'un élément, la contrainte évolue fortement et que cette évolution soit de 50%, 70% ou plus de l'amplitude totale des contraintes dans la structure. La contrainte en zone courante doit évoluer continûment et il est important de pouvoir contrôler le saut de contrainte aux frontières d'un élément. S'il existe une forte variation de la contrainte de part et d'autre d'une frontière, cela signifie que l'approximation par morceaux (linéaire pour cet exemple) est insuffisante : la contrainte vraie est peut-être surestimée, peut-être sous-estimée. Sa valeur n'est pas fiable et ne peut pas être utilisée pour le dimensionnement. Un saut dans une partie du maillage où la contrainte est minimale peut être ignoré, mais un saut dans une partie du maillage où la contrainte est maximale doit conduire à un remaillage au moins local de la structure dans cette zone. On imagine que les contraintes extrapolées non lissées (non dessinées) dans le maillage plus dense de la Figure 6.6 ne présentent plus les sauts précédents, ni une grande variation au sein d'un élément.

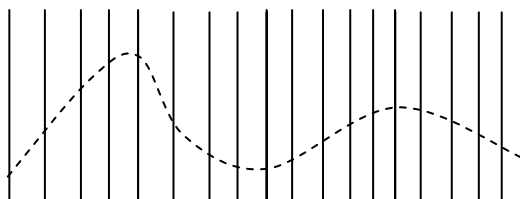


Figure 6.6 : Maillage raffiné

Le lissage ne doit pas être utilisé car il gomme les sauts et ne permet plus l'interprétation des contraintes (Figure 6.7). Il ne devrait être employé pour les rapports techniques, et uniquement lorsque les contraintes extrapolées non lissées ont des sauts suffisamment petits pour qu'on ne les voie pratiquement plus et que leur valeur a été validée...

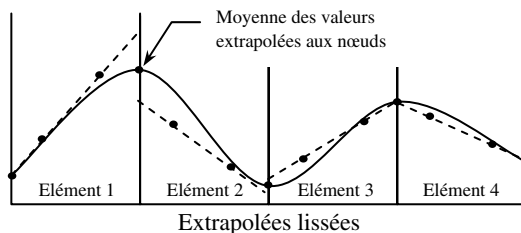


Figure 6.7 : Contrainte extrapolée lissée

Dans les zones accidentées, on distingue d'une part les changements de matériau ou d'épaisseur et les raccords d'éléments, d'autre part des charges ponctuelles isolées ou des conditions aux limites isolées. Pour les premières, le

saut de contrainte est lié à la physique et il est absurde de chercher à le supprimer par lissage. Il faut simplement vérifier que de part et d'autre de la singularité, la contrainte a les propriétés requises (admissible, « presque continue », pas de forte variation au sein d'un élément...). Pour les secondes, l'interprétation est plus difficile, et bien qu'il soit assez habituel de raffiner le maillage, c'est justement ce qu'il ne faut pas faire.

Une charge ponctuelle est déjà en soi une modélisation. Elle suppose que la surface de contact entre la charge et la structure est négligeable vis-à-vis de la surface des éléments finis dont le nœud chargé fait partie. Si on raffine localement le maillage au voisinage de la charge ponctuelle pour réduire le saut de contrainte aux frontières, la contrainte augmente encore et a une variation de plus en plus forte dans les éléments qui contiennent le nœud sollicité. Il est important de revenir à l'aspect physique du problème : vu la taille des éléments, la charge est-elle ponctuelle ou doit-elle être considérée comme une charge répartie ? Si le maillage devient fin, il fait ressortir des phénomènes locaux qui ne seront correctement pris en compte que s'ils ont bien été modélisés. La géométrie modélisée est-elle encore correcte, les angles vifs le sont-ils réellement ? Les conditions aux limites sont-elles en tout ou rien (fixé ou libre) ou doit-on prendre en compte la raideur des liaisons, l'épaisseur du cordon de soudure ? Lorsque le maillage est réalisé à une certaine échelle, tout le modèle doit l'être à cette même échelle.

Si la contrainte équivalente extrapolée dépasse localement la limite élastique, le coefficient de sécurité étant pris en compte soit dans le chargement soit dans la limite élastique, il est important de déterminer si cela provient du modèle numérique et de la résolution, ou si cela traduit la physique du comportement. Il ne faut pas chercher à construire un maillage universel pour une structure et espérer y avoir tous les résultats pour tous les types d'analyse. Bien que d'un point de vue industriel, le temps passé à mailler soit considéré comme improductif, mailler fin la géométrie de la CAO visuelle n'est pas la bonne méthode pour bien dimensionner une structure. Un maillage est construit pour un objectif et une précision attendue, il ne peut pas faire plus que ce pourquoi il a été développé. Les déplacements sont assez peu sensibles au maillage, mais les contraintes le sont et *la validation des contraintes est sans aucun doute la partie la plus difficile du post-traitement.*

## 6.4. OUTILS DE « POST-TRAITEMENT »

Quelques programmes industriels mettent à disposition des utilisateurs des outils spécifiques, dits de **Zoom Structural** ou de **Maillages Adaptatifs**, permettant de façon plus ou moins automatique d'obtenir un « bon » champ de contraintes, par des analyses complémentaires. Ces deux méthodes sont des

méthodes a posteriori, c'est à dire qu'elles ne sont utilisables qu'après une première analyse. Elles sont assez différentes l'une de l'autre, même si le point de départ est le même : à la suite d'une analyse de structure par éléments finis, des algorithmes spécialisés étudient pour tous les éléments du maillage l'erreur estimée sur la contrainte calculée. Il existe plusieurs familles d'**estimateurs d'erreur** : celle basée sur un défaut d'équilibre, celle basée sur un défaut de continuité de la contrainte extrapolée et celle basée sur un défaut des lois de comportement. Par exemple, l'erreur peut être simplement l'énergie de la différence entre le champ de contrainte du modèle éléments finis et le champ obtenu en calculant les moyennes nodales des contraintes extrapolées à partir des points de Gauss de la maille. Si l'estimateur détecte un écart trop important par rapport à un seuil donné par l'utilisateur, en absolu, en relatif, en moyenne..., deux stratégies de calcul peuvent être utilisées.

Soit on extrait de la structure une zone de dimensions adéquates autour de la « singularité » détectée de la contrainte, ce qui donne la technique du zoom structural, soit on rediscrétise la totalité de la structure en maillant plus finement les zones « à problèmes », ce qui conduit aux outils de maillages adaptatifs.

Dans le cas du zoom structural, le maillage est raffiné dans la zone isolée (patch) mais pas sur sa frontière, le triangle étant alors l'élément de transition nécessaire pour modifier la densité interne de maillage. La frontière du patch a dans la structure complète des déplacements et est soumise à des efforts internes. Trois types de conditions aux limites peuvent alors être appliquées sur la frontière du patch : soit des déplacements imposés qui correspondent aux déplacements calculés sur cette frontière lors de la première analyse, soit des efforts qui sont les efforts internes de la première analyse, soit des contraintes de surface. Le report des forces ne donne pas de très bons résultats, pas plus que le report des déplacements qui est relativement répandu et connu; ils donnent des modèles locaux trop contraints. On est en droit de se demander quelle est l'influence des éléments de transition de formulation triangulaire sur le comportement du patch, et quels auraient été les déplacements et contraintes à la frontière du patch si celui-ci avait directement eu son maillage final et non son maillage initial. Il faut donc bien choisir la zone de remaillage de sorte que les conditions de frontière varient suffisamment peu quand la raideur locale change en fonction du maillage du patch. Ces deux techniques de zoom structural sont cependant faciles à mettre en œuvre car les conditions aux limites de type charges ou déplacements imposés pour le calcul sont des résultats du calcul précédent qu'il suffit d'aller relire sur le fichier d'archivage. La méthode qui donne de très bons résultats est celle qui consiste à reporter sur la frontière les contraintes de surface qui maintiennent le modèle local en équilibre quand il est isolé par le zoom structural. Cette méthode s'adapte automatiquement au zoom structural avec modification du maillage sur la



frontière. Quel que soit le type de conditions reportées sur le patch, le second calcul n'est effectué que sur ce patch, d'où un coût relativement faible. Le processus boucle tant que le critère d'arrêt de l'estimateur d'erreur n'est pas atteint. Il faut donc que l'outil sache comment distinguer une variation de contrainte due à un mauvais maillage (ou un modèle ne décrivant pas correctement le problème physique) d'une variation naturelle et physique de cette contrainte.

Dans le cas du maillage adaptatif, la structure est entièrement remaillée, la nouvelle densité de mailles dépendant de l'analyse d'erreur. Le problème des conditions aux limites à appliquer sur une frontière « suffisamment éloignée » ne se pose plus mais le calcul est effectué sur la structure complète, qui comporte plus de degrés de liberté à chaque itération. Le maillage peut, après un certain nombre d'itérations, devenir très fin et les temps de calcul prohibitifs. Le processus boucle tant que le critère d'arrêt de l'estimateur d'erreur n'est pas atteint. Il faut donc là aussi que l'outil sache comment distinguer une variation de contrainte due à un mauvais maillage (ou un modèle ne décrivant pas correctement le problème physique) d'une variation naturelle et physique de cette contrainte.

La technique la plus intéressante et la plus rapide à mettre en œuvre aujourd'hui est celle du **collage de maillages**, objet du paragraphe 13.2. N'étant pas basée sur l'analyse des résultats d'un premier calcul, elle n'est pas présentée dans ce chapitre consacré au champ de contraintes.

## Chapitre 7

### Éléments de barre

#### 7.1. COMPORTEMENT D'UNE BARRE

Une **barre** est un élément de structure rectiligne dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur et qui ne travaille qu'en traction-compression le long de son axe, ce qui la différencie de la poutre. Cet axe est conventionnellement l'axe  $x$  attaché à la barre. La section, généralement constante, peut néanmoins évoluer lentement en forme et en taille le long de l'élément. Les barres sont par hypothèse rotulées sans frottement à leurs deux extrémités : elles sont utilisées pour la modélisation des structures articulées. C'est un modèle mathématique de comportement. Une barre ne doit pas être confondue avec une poutre articulée à ses deux extrémités. Sous l'effet de la gravité agissant orthogonalement à son axe, une barre reste rectiligne et ne « sent » pas le chargement puisqu'elle ne travaille qu'en traction-compression. Par contre, sous l'effet de la gravité ou de toute autre charge agissant orthogonalement à son axe, une poutre rectiligne articulée à ses deux extrémités se déforme et prend une courbure. Les comportements mécaniques sont différents, ce qui explique l'écart sur les résultats parfois obtenu avec divers outils numériques de simulation. La barre est un **élément à définition linéique**, dont la topologie peut être définie par des mailleurs automatiques linéiques. Seule la **fibre neutre** de l'élément (ligne passant par le centre de gravité de toutes les sections droites) est géométriquement décrite. Les barres sont employées dans des modélisations 2D ou 3D. Elles modélisent les jauges de déformation, permettant de lire la déformation ou la contrainte là où est collée la jauge. N'ayant de raideur que selon leur axe, elles peuvent également être utilisées comme des ressorts à condition que ceux-ci aient une longueur non nulle : il suffit d'ajuster les paramètres  $E$ ,  $S$  et  $L$  de sorte que

$$k = ES / L$$

Les déformations dans la section d'une barre soumise à un effort axial, induites par l'effet de Poisson, ne sont pas prises en compte. Comme pour une poutre, la section est par hypothèse indéformable. La contrainte et la déformation sont mono-axiales dans le repère propre de l'élément, reliées par le module d'Young

$$\sigma = E\varepsilon$$

## 7.2. ÉLÉMENT FINI DE BARRE

Une barre est définie par ses deux extrémités, chaque nœud possédant trois degrés de liberté de translation dans l'espace, notés  $u$ ,  $v$  et  $w$  (Figure 7.1), ou deux degrés de liberté notés  $u$  et  $v$  dans le plan.

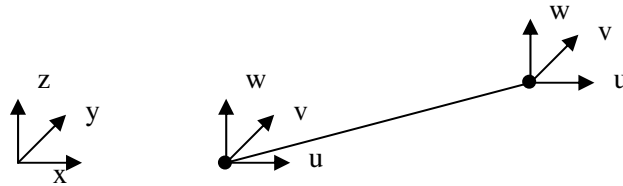


Figure 7.1 : Elément fini de barre du premier degré

Dans le repère propre de l'élément, il n'existe de rigidité que selon l'axe de l'élément. Par conséquent, selon l'orientation d'un élément et ses connexions, des pivots nuls peuvent être détectés lors de la résolution, correspondant à des degrés de liberté non alimentés en raideur. Si une barre n'est soumise qu'à des charges concentrées à ses extrémités, le déplacement axial est une fonction linéaire de l'abscisse. La solution analytique étant du premier degré, elle peut donc être obtenue avec des éléments finis de barre du premier degré. Si une barre est soumise à une charge axiale uniformément répartie selon son axe, le déplacement axial est une fonction parabolique de l'abscisse. La solution analytique étant du second degré, elle peut être obtenue avec des éléments finis de barre du second degré.

Soit la structure suivante, articulée aux points A, B et C, encastrée en A et B (Figure 7.2). La solution analytique est obtenue avec le modèle réalisé qui comporte trois nœuds et deux barres dans le plan  $xOy$ . Les nœuds des barres n'ont pas de degré de liberté de rotation, donc ne « tournent » pas. La différence d'angle entre les positions avant et après la mise en charge est uniquement due aux différences de translation des extrémités de l'élément. Si l'angle  $\theta$  est nul, le programme applique la charge sur un degré de liberté non alimenté en raideur qui est alors fixé par le programme et la charge est ignorée. La structure n'a alors aucun déplacement.

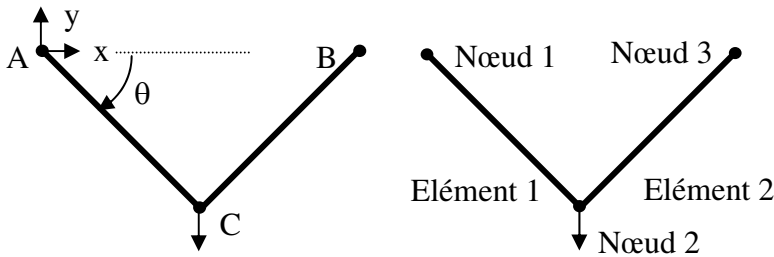


Figure 7.2 : Structure et modèle

Contrairement aux autres éléments finis, il n'est pas possible de discrétiser une barre physique en plusieurs éléments finis de barre (Figure 7.3). Une barre physique se modélise par un seul élément fini de barre. Raffiner le maillage revient à introduire une succession de rotules (ou de charnières pour les problèmes plans) entre les éléments : le programme détecte et bloque des pivots nuls, dénaturant ainsi le problème et la solution. Un treillis comportant des rotules internes peut ne pas vérifier les règles de staticité liant le nombre de nœuds  $n$  au nombre de barres  $b$  ( $b \geq 2n-3$  dans le plan,  $b \geq 3n-6$  dans l'espace). Il existe alors des mécanismes internes, la structure ne peut pas être calculée car elle a une infinité de positions d'équilibre avant sa mise en charge.

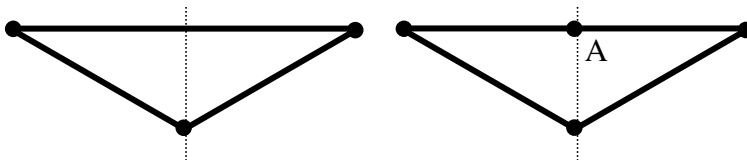


Figure 7.3 : Discrétisation d'une barre et articulation induite

Lors de l'exploitation de l'éventuelle symétrie d'un treillis, on peut avoir le même problème, il faut faire attention à ne pas rendre hypostatique la structure par des liaisons internes supplémentaires (articulation en A qui n'existe pas). Une barre contenue dans le plan de symétrie a sa section divisée par deux si la symétrie de la structure est exploitée.

Le treillis de la figure 7.4, encastré en A et B, est intérieurement hypostatique. La cellule centrale a une infinité de conformations possibles indépendamment de toute charge. Sa géométrie sous charge ne peut pas être correctement calculée : le programme détecte un pivot nul qu'il bloque.

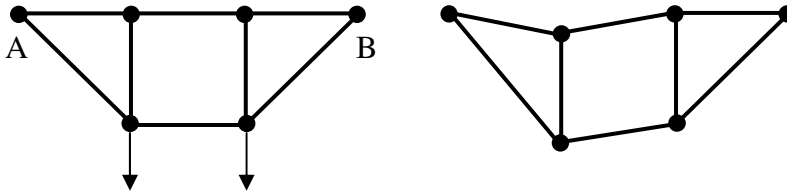


Figure 7.4 : Treillis intérieurement hypostatique

Outre la topologie, il faut obligatoirement fournir à un programme d'analyse linéaire le module de Young et coefficient de Poisson, ainsi que l'aire de la section droite.

Certaines données matérielles comme la masse volumique du matériau ou son coefficient de dilatation thermique ne sont nécessaires que pour certains types de calcul. En post-traitement, en plus des déplacements et des réactions exprimés dans le repère structural, on a accès à l'effort normal à chaque extrémité des éléments et à la contrainte axiale dans les éléments, par définition exprimés dans le repère propre de l'élément considéré. Si  $N$  est l'effort normal dans la barre et  $S$  sa section, la contrainte axiale est

$$\sigma = N / S$$

La réaction nodale  $R$  sur les degrés de liberté fixés permet de calculer directement la contrainte aux encastremements. La section n'est pas discrétisée, l'information nodale qui est récupérée aux extrémités de l'élément n'a donc pas besoin d'être réinterprétée.

### 7.3. BARRE DU PREMIER DEGRÉ, NON ISOPARAMÉTRIQUE

On va construire la matrice de raideur d'un élément de barre du premier degré (Figure 7.5), non isoparamétrique, de caractéristiques constantes (section  $S$ , module d'Young  $E$ ).  $x_1$  et  $x_2$  sont les coordonnées des deux extrémités de l'élément. Le champ de déplacement est donc par hypothèse linéaire le long de l'élément. La loi de Hooke est pour une barre est réduite au scalaire  $E$ , module d'élasticité. L'intégration sur le volume est le produit de la section par l'intégrale sur la longueur.



Figure 7.5 : Barre du premier degré, non isoparamétrique

$$u(x) = ax + b \quad x_2 - x_1 = L \quad u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{L}u_1 + \frac{1}{L}u_2 = \left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Bq$$

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} S dx = ES \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 7.4. BARRE DU PREMIER DEGRÉ, ISOPARAMÉTRIQUE

On construit maintenant le même élément, en utilisant la **formulation isoparamétrique** (Figure 7.6). On commence par déterminer les deux fonctions d'interpolation géométrique de l'élément parent. La transformation associe à  $\zeta = -1$  le point de coordonnée  $x_1$  et  $\zeta = 1$  au point de coordonnée  $x_2$ . On utilise les mêmes fonctions pour la représentation du champ de déplacement dans l'élément.

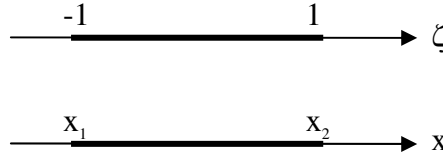


Figure 7.6 : Barre du premier degré, isoparamétrique

$$x(\zeta) = \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)x_1 + \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)x_2 = N_1(\zeta)x_1 + N_2(\zeta)x_2$$

$$u(\zeta) = \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)u_2 = N_1(\zeta)u_1 + N_2(\zeta)u_2$$

La déformation réelle de la barre est  $du/dx$  qui n'est a priori pas connue car  $u$  est une fonction de  $\zeta$  et non une fonction de  $x$ .

$$\frac{du}{d\zeta} = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} \quad \frac{dx}{d\zeta} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{L}{2} = J \quad \Rightarrow \quad \frac{d\zeta}{dx} = J^{-1} = \frac{2}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} = \frac{2}{L} \left(-\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Bq$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T(x) \mathbf{H} \mathbf{B}(x) dv = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\zeta) \mathbf{H} \mathbf{B}(\zeta) |J| S d\zeta \\
 &= \frac{L}{2} ES \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\zeta) \mathbf{B}(\zeta) d\zeta = \frac{L}{2} ES \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} d\zeta = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## 7.5. BARRE DU SECOND DEGRÉ, ISOPARAMÉTRIQUE

On calcule la matrice de raideur d'un élément du second degré isoparamétrique (Figure 7.7). On calcule les fonctions d'interpolation géométriques de l'élément, utilisées pour le champ de déplacement dans l'élément. La transformation associe  $\zeta = -1$  au point de coordonnée  $x_1$ ,  $\zeta = 0$  au point de coordonnée  $x_2$ , et  $\zeta = 1$  au point de coordonnée  $x_3$ . On suppose que le nœud 2 est le milieu du segment 1-3.

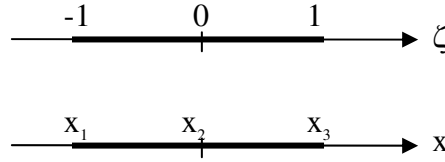


Figure 7.7 : Barre du second degré, isoparamétrique

$$x(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} x_1 - (\zeta^2 - 1) x_2 + \frac{\zeta(\zeta+1)}{2} x_3$$

$$u(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} u_1 - (\zeta^2 - 1) u_2 + \frac{\zeta(\zeta+1)}{2} u_3$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{2\zeta-1}{2} u_1 - 2\zeta u_2 + \frac{2\zeta+1}{2} u_3 \quad \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{2\zeta-1}{2} x_1 - 2\zeta x_2 + \frac{2\zeta+1}{2} x_3$$

En posant  $x_2 = \frac{x_3 + x_1}{2}$  et  $L = x_3 - x_1$ , on obtient  $\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{L}{2} = J \Rightarrow J^{-1} = \frac{2}{L}$

$$\varepsilon(x) = \frac{2}{L} \left( \frac{2\zeta-1}{2}; -2\zeta; \frac{2\zeta+1}{2} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Bq \Rightarrow B = \left( \frac{2\zeta-1}{L}; -\frac{4\zeta}{L}; \frac{2\zeta+1}{L} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \frac{ES}{L^2} \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 2\zeta-1 \\ -4\zeta \\ 2\zeta+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\zeta-1 & -4\zeta & 2\zeta+1 \end{bmatrix} d\zeta \\
&= \frac{ES}{2L} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (2\zeta-1)^2 & -4(2\zeta-1)\zeta & (2\zeta-1)(2\zeta+1) \\ -4\zeta(2\zeta-1) & 16\zeta^2 & -4\zeta(2\zeta+1) \\ (2\zeta-1)(2\zeta+1) & -4\zeta(2\zeta+1) & (2\zeta+1)^2 \end{bmatrix} d\zeta
\end{aligned}$$

Il y a trois possibilités pour calculer cette matrice de raideur :

- intégration analytique
- intégration numérique exacte
- intégration numérique réduite

### **Intégration analytique**

Elle ne pose aucun problème dans la mesure où il s'agit d'intégrer des polynômes de degré 2 entre -1 et 1. Tous calculs faits, on trouve :

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{-16}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-16}{3} & \frac{32}{3} & \frac{-16}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-16}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice est symétrique, les deux extrémités jouent le même rôle. Le déterminant de la matrice est nul : il existe une singularité correspondant au mode rigide de translation axiale.

### **Intégration exacte**

Chaque terme de la matrice étant un polynôme de degré 2, deux points d'intégration suffisent par la méthode de Gauss pour évaluer l'intégrale, sans introduire d'erreur numérique. La règle d'intégration est avec deux points :

$$I = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Le calcul des intégrales conduit à la même matrice que celle qui a été évaluée analytiquement. Il faut calculer la valeur prise par chacune des neuf fonctions



aux deux points d'intégration et faire la somme. Pour fixer les idées, le terme  $k_{11}$  est donné par :

$$k_{11} = \frac{ES}{2L} \int_{-1}^1 (2\zeta - 1)^2 d\zeta = \frac{ES}{2L} \left[ \left( 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - 1 \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - 1 \right)^2 \right] = \frac{ES}{2L} \times \frac{14}{3}$$

On procède de la même façon pour tous les autres termes de la matrice.

### **Intégration réduite**

Bien que chaque terme de la matrice soit un polynôme de degré 2, on n'utilise qu'un seul point d'intégration et on remplace donc l'intégrale par deux fois la valeur de la fonction en 0. Pour fixer les idées, le terme  $k_{11}$  est donné par :

$$k_{11} = \frac{ES}{2L} \int_{-1}^1 (2\zeta - 1)^2 d\zeta = \frac{ES}{2L} \left[ 2 \times (2 \times 0 - 1)^2 \right] = \frac{ES}{2L} \times 2$$

On obtient alors, tous calculs faits, la matrice de raideur suivante :

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outre le mode rigide, la matrice possède une singularité due à la sous-intégration numérique : on est en présence d'un mode cinématique parasite.

## **7.6. TREILLIS DE BARRES**

Le treillis plan de barres de la figure 7.8 est encastré aux points 1 et 4. Toutes les barres sont constituées du même matériau de module  $E$ . La longueur des barres 1, 2 et 3 est  $L$ , leur section est  $S$ . La longueur des barres 4 et 5 est  $L\sqrt{2}$ , leur section est  $S\sqrt{2}$ . La structure comporte quatre nœuds qui ont chacun deux degrés de liberté indépendants, la matrice de raideur structurale est de dimension 8. Le but de ce paragraphe est de montrer sur un cas concret comment est réalisé l'assemblage des matrices élémentaires. Dans le repère propre de chaque élément, la matrice de raideur a pour expression :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Dans le plan  $xOy$ , le repère de référence attaché à chaque élément doit être défini par deux axes, la matrice de raideur élémentaire est alors de dimension 4. Dans son repère propre, la barre n'a de raideur que selon son axe. Sa matrice de raideur dans le repère propre étendu a pour expression :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

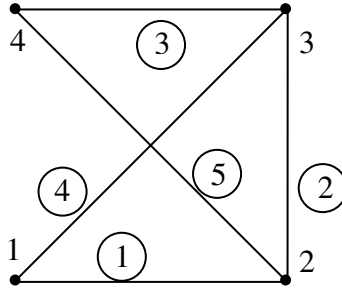


Figure 7.8 : Treillis de barres

Si  $\alpha$  est l'angle entre le repère structural et le repère propre de l'élément, le vecteur de déplacement dans le repère propre est relié au vecteur déplacement dans le repère structural par la relation :

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Il existe une relation identique pour les forces. D'où l'expression de la matrice de raideur élémentaire dans le repère structural

$$\mathbf{F}' = \mathbf{K}' \mathbf{U}' \Rightarrow \mathbf{R} \mathbf{F} = \mathbf{K}' \mathbf{R} \mathbf{U}' \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{R}$$

La matrice  $\mathbf{R}$  est orthogonale donc son inverse est égale à sa transposée. Avec la convention classique  $c = \cos(\alpha)$  et  $s = \sin(\alpha)$ , la matrice de raideur élémentaire exprimée dans le repère structural s'écrit :

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & -s^2 \end{bmatrix}$$

Pour les barres 1 et 3,  $\alpha = 0$  :  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_3 = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pour la barre 2 avec  $\alpha = 90^\circ$ , pour la barre 4 avec  $\alpha = 45^\circ$  et pour la barre 5 avec  $\alpha = 135^\circ$ , les matrices de raideur dans le repère structural sont respectivement :

$$\mathbf{K}_2 = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_4 = \frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_5 = \frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'opération d'assemblage consiste à positionner dans la matrice de dimension 8 chacun des termes des matrices élémentaires de dimension 4, et additionner les raideurs des différents éléments ayant un degré de liberté en commun.

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix} = \frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur structurale obtenue par assemblage est singulière et ce système ne peut être résolu. Il faut prendre en compte les conditions aux limites, absolues ou relatives, pour rendre inversible le système. On peut vérifier que les trois modes rigides de la structure sont la translation sur l'axe des  $x$  ( $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$  et  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ ), celle sur l'axe des  $y$  ( $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  et  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ ), la rotation dans le plan autour du centre de la structure ou toute combinaison linéaire de ces trois modes.

## Chapitre 8

### Éléments de membrane

#### 8.1. COMPORTEMENT MEMBRANAIRE

Le **comportement membranaire** s'applique aux structures planes minces, qui ne sont sollicitées que par des charges de volume et de surface agissant dans leur plan. Conventionnellement, on raisonne dans un système d'axes liés au plan de la structure qui est toujours noté  $xOy$ . L'épaisseur  $e$  de la structure, très petite par rapport à ses deux autres dimensions, est toujours dirigée selon l'axe propre  $z_p$  de l'élément. Elle est symétriquement répartie de part et d'autre du plan  $xOy$  qui s'appelle le **feuillet moyen** et qui est obligatoirement continu (Figure 8.1). La distribution des charges est supposée symétrique par rapport à ce feuillet moyen. On considère généralement, si la membrane est suffisamment mince, que les charges agissant dans le plan sont non seulement symétriques par rapport au feuillet moyen, mais sont également uniformes selon l'épaisseur.

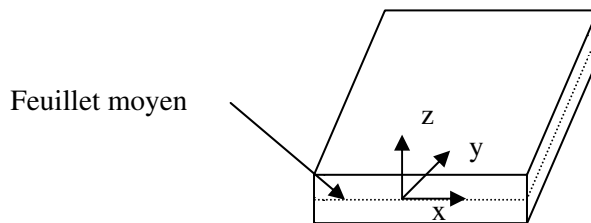


Figure 8.1 : Feuillet moyen et axes propres d'une membrane

Ce type de comportement mécanique est par exemple applicable dans le cas d'un disque mince sollicité dans son plan ou d'une éprouvette de traction pour peu qu'elle soit suffisamment mince, qu'on ne s'intéresse pas à ce qui se passe dans son épaisseur et qu'on ne regarde pas trop près des conditions aux limites

où tout est tridimensionnel. Le matériau constitutif n'est pas obligatoirement isotrope mais il sera supposé l'être dans la suite de ce chapitre. Les hypothèses faites sur le chargement (résultante des charges agissant dans le feuillet moyen) impliquent que les contraintes  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont nulles, ainsi que les déformations angulaires  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$ . La déformation  $\varepsilon_{zz}$ , qui correspond à la variation relative d'épaisseur de la membrane sous la charge appliquée, est non nulle et est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{\nu - 1}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

Les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ , a priori non nulles, ne dépendent pas de la cote  $z$  selon l'épaisseur. Une caractéristique du comportement membranaire est la symétrie du champ de contrainte par rapport au feuillet moyen : sous l'action d'une charge dans le plan, les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\tau_{xy}$  sont uniformément réparties dans l'épaisseur (Figure 8.2).

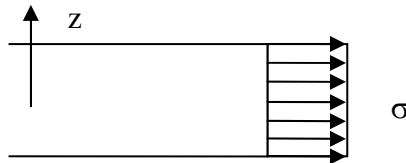


Figure 8.2 : Contraintes dans l'épaisseur de la membrane

Les membranes peuvent être soit bidimensionnelles soit tridimensionnelles, mais dans le repère propre attaché à chaque élément, le comportement mécanique est de l'état plan de contrainte. Une bulle de savon peut être modélisée par un ensemble de facettes planes, chaque facette n'étant soumise qu'à des efforts plans (les tensions superficielles). La modélisation de ce problème par des membranes tridimensionnelles est possible. Mais par définition, les membranes n'ont pas de raideur transversale. Lors du calcul de la bulle de savon, les programmes introduisent des axes locaux automatiques, détectent des pivots nuls ou presque nuls et bloquent des degrés de liberté dans ce système local en dénaturant le problème posé. Pour cette raison essentielle, on préfère utiliser des coques dans l'espace et on réserve les membranes pour des modèles géométriquement bidimensionnels, ou pour le calcul des contraintes de peau en tapissant les volumes de membranes, point détaillé dans le chapitre consacré aux éléments de volume. On se limitera dans ce chapitre aux éléments de membranes bidimensionnelles. On définit les **flux d'efforts** en traction-compression et en cisaillement dans le plan, indépendamment de la notion d'élément fini : ce sont des forces par unité de longueur qui s'expriment en Newton par mètre (N/m) et qui servent en dimensionnement.

$$N_x = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dz \quad N_y = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{yy} dz \quad N_{xy} = \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{xy} dz$$

Les contraintes étant uniformes dans l'épaisseur et indépendantes de la cote  $z$ , ces intégrales peuvent être évaluées simplement :

$$N_x = e\sigma_{xx} \quad N_y = e\sigma_{yy} \quad N_{xy} = e\tau_{xy}$$

## 8.2. ÉLÉMENTS FINIS DE MEMBRANE

La membrane est un élément de l'élasticité bidimensionnelle à définition surfacique, seul son feuillet moyen est représenté (n'importe quel feuillet aurait pu être choisi). Il est indispensable de donner au programme l'épaisseur de l'élément, symétriquement répartie de part et d'autre de ce feuillet. Différents types de mailleurs automatiques bidimensionnels permettent la génération de ces éléments, qui sont de forme triangulaire ou quadrangulaire. Ces éléments sont conventionnellement définis dans le plan  $xOy$ . Au premier degré, ces éléments ont des bords rectilignes. Chaque nœud possède deux degrés de liberté de translation dans le plan, notés  $u$  et  $v$ , tous les deux alimentés en raideur. Le triangle est défini par 3 nœuds (T3), soit 6 degrés de liberté. Le quadrangle est défini par 4 nœuds (Q4), soit 8 degrés de liberté. Les éléments de membranes sont disponibles au second degré. Le degré du champ de déplacement est enrichi par l'adjonction d'un nœud supplémentaire au milieu de chaque bord. Ce **nœud milieu** qui possède lui aussi les deux degrés de liberté de translation dans le plan  $u$  et  $v$ . Il devient alors possible de prendre en compte la courbure géométrique des arêtes de l'élément. Le triangle est défini par 6 nœuds (T6), soit 12 degrés de liberté, le quadrangle par 8 nœuds (Q8), soit 16 degrés de liberté (Figure 8.3). Ces éléments sont plus souples que ceux du premier degré et le raffinement du maillage peut parfois sembler grossier bien que la solution soit numériquement satisfaisante. Le terme DDLNAR de la formule donnant le nombre de pivots nuls dans un calcul statique est systématiquement nul avec des membranes bidimensionnelles. Le Q4 est souvent trop rigide et même avec un maillage très fin, on peut ne pas obtenir une solution satisfaisante. En effet, le Q4 classique présente un problème numérique appelé **blocage en cisaillement (shear locking)** et pour certaines sollicitations, l'élément se comporte mal. Moyennant des techniques d'intégration numériques spécifiques (intégration sélective), cet élément Q4 donne néanmoins de bons résultats, comparables à ceux obtenus avec des éléments Q8, tout en ayant moins de degrés de liberté que ce dernier. Cependant, toutes les courbures étant perdues car les arêtes de l'élément sont rectilignes, il peut s'avérer préférable d'utiliser des éléments de type Q8 si la structure a des bords courbes.

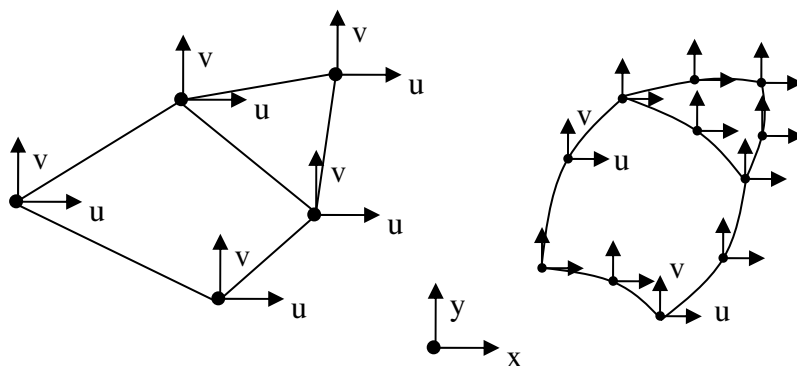


Figure 8.3 : Eléments de membrane du premier degré et du second degré

Dans le cas de membranes tridimensionnelles, dans le repère propre de l'élément, un nœud n'a que deux degrés de liberté mais dans le repère structural, il y en a trois par nœud dont un qui peut être non alimenté en raideur selon l'orientation de la membrane par rapport au repère structural et l'assemblage avec les éléments voisins. Analytiquement, il est toujours possible de construire un élément de membrane triangulaire dans le repère structural mais le quadrangle doit être rectangulaire. L'isoparamétrie a été introduite comme un moyen permettant de contourner cette contrainte sur la forme par projection sur un élément de référence carré à partir duquel on peut calculer les caractéristiques de l'élément réel (cf. paragraphe 3.6).

Outre la topologie, il faut obligatoirement fournir à un programme d'analyse linéaire, pour un matériau isotrope, le module de Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de l'élément. Certaines données matérielles comme la masse volumique du matériau ou son coefficient de dilatation thermique ne sont nécessaires que pour certains types de calcul. En post-traitement, outre les déplacements et les réactions exprimés dans le repère structural, on a accès aux flux d'efforts, au tenseur des déformations et au tenseur des contraintes dans le feuillet moyen. Les composantes de ces tenseurs sont exprimées dans le repère structural, en valeur moyenne par élément ou extrapolées aux nœuds de l'élément. On peut afficher les composantes principales et les directions associées, ou une contrainte équivalente. Les réactions nodales sur les degrés de liberté fixés sont dépendantes du maillage et du degré des éléments : ce sont les contraintes ou les résultantes d'efforts passant par chaque liaison qu'il faut analyser. Les réactions sont cependant intéressantes en validation de calcul : si elles n'agissent pas dans le bon sens, c'est que la structure a tendance à s'écarter de la liaison et qu'il aurait fallu mettre en place un modèle avec des conditions de contact pour déterminer le comportement de la structure sous charge.

### 8.3. CONSTRUCTION D'ÉLÉMENTS DE MEMBRANE

#### 8.3.1. Triangles isoparamétriques du premier degré

On détermine la transformation géométrique qui associe les trois sommets du triangle de référence aux trois sommets de l'élément réel, puis on prend pour les fonctions d'interpolation mécanique les fonctions géométriques. Les champs de déplacement dans l'élément de membrane triangulaire isoparamétrique du premier degré sont de la forme :

$$\begin{cases} u = a + b\zeta + c\eta = (1 - \zeta - \eta)u_1 + \zeta u_2 + \eta u_3 \\ v = d + e\zeta + f\eta = (1 - \zeta - \eta)v_1 + \zeta v_2 + \eta v_3 \end{cases}$$

C'est parmi tous les choix possibles le choix le plus simple pour un élément conforme : 3 connecteurs, 3 variables internes. Cet élément n'est correctement défini que si ses trois sommets sont vraiment distincts et non alignés. Sinon, le Jacobien de la transformation est nul ou tend vers zéro, point dont on verra l'incidence dans ce paragraphe.

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = -x_1 + x_2 \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -x_1 + x_3 \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = -y_1 + y_2 \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = -y_1 + y_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -x_1 + x_3 \\ -y_1 + y_2 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |J| = (-x_1 + x_2)(-y_1 + y_3) - (-y_1 + y_2)(-x_1 + x_3) = C^{te}$$

La déformation en un point du triangle est définie par 3 composantes

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial \zeta \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial v / \partial \zeta \\ \partial v / \partial \eta \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

On voit apparaître l'inverse de la matrice jacobienne dans l'expression des déformations. Si la matrice jacobienne est non inversible ou mal conditionnée, la matrice **B** ne peut pas être calculée, ni la matrice de raideur qui en dépend. Dans le cas du triangle linéaire, on peut écrire :

$$\begin{cases} x = (1 - \zeta - \eta)x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3 \\ y = (1 - \zeta - \eta)y_1 + \zeta y_2 + \eta y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta(x_1 - x_2) + \eta(x_1 - x_3) = x_1 - x \\ \zeta(y_1 - y_2) + \eta(y_1 - y_3) = y_1 - y \end{cases}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{x_3 - x_1} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{y_2 - y_1} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

La matrice intermédiaire est constante, ses termes ne dépendent que des coordonnées des sommets du triangle et pas du point de coordonnées  $\zeta$  et  $\eta$  considéré dans l'élément. Les fonctions d'interpolation étant des fonctions linéaires des variables  $\zeta$  et  $\eta$ , leurs dérivées premières par rapport à ces variables sont des constantes. La matrice **B** est donc indépendante des deux variables  $\zeta$  et  $\eta$  : elle est constante ainsi que les déformations et les contraintes dans l'élément.

Quelle que soit la position des points de calcul des contraintes dans l'élément, quel que soit le nombre de points d'intégration dans l'élément, quelle que soit la manière de dépouiller les contraintes (valeurs moyennes ou extrapolées), on trouve toujours la même valeur. Que le post-traitement donne les contraintes moyennes ou extrapolées ne change rien car il n'existe qu'une valeur par élément et il n'est donc pas possible d'évaluer la qualité du champ de contrainte et donc la qualité du maillage. Si l'élément a une épaisseur constante, la matrice de raideur se ramène simplement à :

$$\mathbf{K} = e \mathbf{S} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} |\mathbf{J}|$$

Il n'y a donc a priori pas besoin de recourir à l'intégration numérique pour évaluer la matrice de raideur d'un élément triangulaire du premier degré.

### 8.3.2. Quadrangles isoparamétriques du premier degré

Seul le rectangle dont les bords sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  peut être défini analytiquement. On s'intéresse ici directement aux éléments de membrane 2D isoparamétriques. Les champs de déplacement dans l'élément sont de la forme :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)u_1 + \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)u_2 + \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)u_3 + \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)u_4 \\ v = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)v_1 + \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)v_2 + \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)v_3 + \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)v_4 \end{cases}$$

Des déplacements variant linéairement dans l'élément ne sont pas une condition suffisante pour que le champ de déformation y soit constant. La formule donnant la matrice des déformations pour le triangle est tout à fait utilisable ici, en étendant le vecteur des degrés de liberté à 8 au lieu de 6.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial \zeta \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial v / \partial \zeta \\ \partial v / \partial \eta \end{bmatrix} \\ \varepsilon &= \mathbf{LM} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{M}$  qui intervient dans le produit donnant la matrice  $\mathbf{B}$  n'est pas constante. Le jacobien n'est plus une constante comme dans le cas du triangle linéaire. C'est une fonction qui contient des termes en  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\zeta\eta$ .

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)(1 - \eta) + (x_3 - x_4)(1 + \eta) & (y_2 - y_1)(1 - \eta) + (y_3 - y_4)(1 + \eta) \\ (x_4 - x_1)(1 - \varsigma) + (x_3 - x_2)(1 + \varsigma) & (y_4 - y_1)(1 - \varsigma) + (y_3 - y_2)(1 + \varsigma) \end{bmatrix}$$

Les termes de la matrice **M** sont des fractions rationnelles, les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes en  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\zeta\eta$ . Les dérivées des fonctions d'interpolation ne sont pas des constantes mais elles aussi des fonctions linéaires des variables  $\zeta$  et  $\eta$ . Bien que l'élément soit dit linéaire, les déformations n'y sont pas constantes, pas plus que les contraintes. La méthode de Gauss permet d'intégrer exactement des polynômes mais pas des fractions rationnelles : il n'y a pas d'ordre maximum d'intégration sur cet élément, l'intégration ne peut être qu'approchée. On utilise généralement 2x2 points d'intégration mais on peut augmenter le nombre de points d'intégration selon la distorsion de l'élément. Pour éviter le blocage en cisaillement, on peut utiliser une technique d'intégration sélective, ce qui consiste à utiliser 2x2 points pour les déformations axiales et 1 point au centre de l'élément pour la déformation angulaire.

## 8.4. MEMBRANES DU SECOND DEGRÉ

Le degré des champs de déplacement est enrichi par l'adjonction d'un nœud milieu sur chaque bord qui possède lui aussi les deux degrés de liberté de translation dans le plan, notés  $u$  et  $v$ . Il devient alors possible avec le T6 de prendre en compte la courbure géométrique de l'élément. Cet élément est plus souple que celui du premier degré et pour un raffinement suffisant du maillage, il donne des résultats satisfaisants tant en déplacement qu'en contrainte. Le problème induit est celui de la taille du modèle, surtout dans l'optique d'une phase d'optimisation. Le T6 comporte trois points d'intégration, ce qui permet une analyse du champ de contraintes extrapolées aux nœuds et donc une validation du résultat.

Le Q8, quadrangle du second degré, est généralement sous-intégré (2x2 points d'intégration au lieu de 3x3). L'élément comporte un mode cinématique parasite, disparaissant lors d'assemblage d'éléments dans les applications statiques. En dynamique, et surtout en réponse dynamique transitoire, des modes « fantômes » peuvent apparaître et engendrer des erreurs difficilement détectables. Dans certains codes de calcul, pour éviter ces problèmes, ces éléments de type Q8 ont trois points d'intégration dans chaque direction.

## 8.5. PREMIER EXEMPLE

Un réglet en acier de longueur 0.2 m, de largeur 1 cm et d'épaisseur 1 mm est encasté à une extrémité, et soumis à un effort tranchant dans son plan de 10 N, sur l'extrémité opposée à celle qui est encastée (Figure 8.4). On ne s'intéresse

ici qu'à la flèche. Le problème peut être traité par une modélisation de type membrane, la structure étant en état plan de contrainte si ce qui se passe dans l'épaisseur est négligé. Un calcul analytique avec la théorie des poutres donne une flèche de 1,600 mm. Avec des Q4, pour le maillage proposé ci-dessous, l'amplitude du déplacement est de 0,608 mm : l'élément bloque en cisaillement et il faut raffiner le maillage pour se rapprocher de la solution analytique. Avec 4x20 éléments Q4, l'amplitude du déplacement n'est que de 1,150 mm. Avec des Q4 sélectivement intégrés, l'amplitude du déplacement est de 1,600 mm pour le maillage proposé ci-dessous. Avec des Q8, elle est de 1,591 mm. On laisse au lecteur le soin d'effectuer les tests avec les T3 et les T6 de manière à étudier la convergence en déplacement en fonction du degré et du raffinement de maillage.

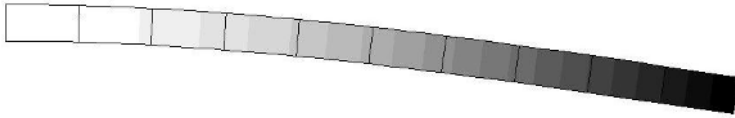


Figure 8.4 : Eléments de membrane en flexion dans le plan

## 8.6. DEUXIÈME EXEMPLE

Un anneau mince est soumis à une pression interne. On souhaite calculer les déplacements et les contraintes (Figure 8.5). Bien que le problème soit axisymétrique (cf. chapitre 12), on choisit un modèle de membrane (contraintes planes).

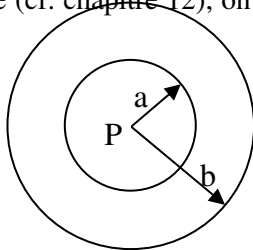


Figure 8.5 : Anneau mince sous pression

$$a = 10 \text{ mm}$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

$$p = 1000 \text{ N/mm}^2$$

$$Y = 70000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$e = 1 \text{ mm}$$

Il existe pour ce problème une solution analytique. Le déplacement radial  $\delta_r$ , la contrainte radiale  $\sigma_r$  et la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$  ont pour expression :

$$\delta_r = \frac{a^2 pr}{E(b^2 - a^2)} \left( (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \qquad \sigma_\theta = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

Le problème tel qu'il est posé n'a pas de solution car il est extérieurement hypostatique. Du fait de la symétrie du problème, seul un quart de la structure peut être modélisé, l'application des conditions aux limites de symétrie permettant d'éliminer les trois modes rigides du problème et d'inverser la matrice de raideur pour calculer les déplacements, puis les contraintes. Le nombre d'éléments dans la direction radiale est fixé à deux, il est de  $n$  dans la direction circonférentielle. Le modèle A est constitué de Q4, la structure est facétisée. Le modèle B est constitué de Q8 à bords rectilignes, la structure est facétisée. Le modèle C est constitué de Q8 à bords courbes, la structure n'est pas facétisée. Les modèles B et C ont le même nombre de degrés de liberté (Figure 8.6). Par raison de symétrie, les nœuds situés sur l'axe des  $x$  n'ont pas de déplacement possible selon  $y$ , les nœuds situés sur l'axe des  $y$  n'ont pas de déplacement possible selon  $x$ . Le tableau ci-dessous regroupe les résultats pour les différents calculs réalisés : il donne le déplacement radial en mm dont la valeur analytique est  $\delta_r = 0,2810$  mm en tout point intérieur ( $r = a$ ). On note  $\delta_s$  le déplacement radial d'un nœud sommet et  $\delta_m$  celui d'un nœud milieu lorsqu'il existe. Le modèle A est trop raide et nécessite une discrétisation très fine pour donner un bon résultat en déplacement. Le modèle B converge plus rapidement que le modèle A. Le modèle C converge plus vite que les deux autres modèles car la géométrie réelle est mieux représentée (Figure 8.7). Le déplacement des nœuds milieux, géométriquement situés sur l'arc de cercle comme les nœuds sommets, n'est pas toujours égal au déplacement des nœuds sommets. On utilise pour fonction de forme des fonctions paraboliques qui passent par les trois nœuds et non l'équation du cercle qui passe par ces nœuds. L'écart entre ces deux courbes s'atténue avec le raffinement du maillage et devient négligeable au-delà d'un certain nombre d'éléments.

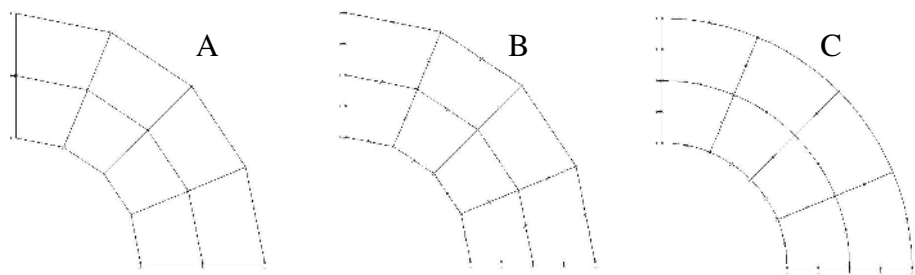


Figure 8.6 : Modèles A, B et C

		n = 3	n = 4	n = 6	n = 10	n = 16
A	$\delta_s$	0,2674	0,2698	0,2715	0,2724	0,2727
B	$\delta_s$	0,2696	0,2745	0,2780	0,2798	0,2806
	$\delta_m$	0,2764	0,2784	0,2797	0,2804	0,2804
C	$\delta_s$	0,2809	0,2809	0,2807	0,2807	0,2807
	$\delta_m$	0,2804	0,2808	0,2808	0,2808	0,2808

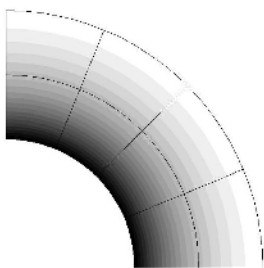


Figure 8.7 : Module des déplacements (modèle C)

La Figure 8.8 représente les contraintes principales moyennes et leurs directions dans chaque élément du modèle. Sous l'effet de la pression interne, vu la symétrie du problème, les contraintes présentent elles aussi une symétrie axiale. Les deux contraintes principales non nulles sont radiale et circonférentielle. La contrainte radiale est une compression, la contrainte circonférentielle est une traction et leurs amplitudes diminuent quand le rayon augmente. Ces valeurs moyennes sont discontinues d'un élément à l'autre (Figure 8.9).

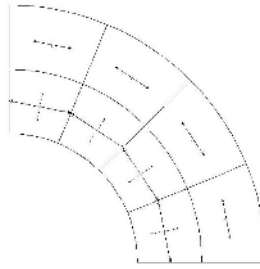


Figure 8.8 : Croix de contraintes principales

Du fait des conventions concernant la définition des contraintes principales, la contrainte circonférentielle, positive, est la première contrainte principale, et la contrainte radiale, négative, est la seconde contrainte principale. Selon les codes de calcul, le post-traitement peut donner la contrainte circonférentielle, la contrainte transversale (nulle dans pour un état membranaire) et la contrainte radiale pour les contraintes principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ . Selon un rayon, les valeurs moyennes par élément sont de 117,6 et 76 N/mm<sup>2</sup> pour  $\sigma_I$ , -51 et -9,4 N/mm<sup>2</sup> pour  $\sigma_{II}$ . Les valeurs théoriques calculées pour un rayon de 12,5 mm et 17,5 mm, milieu de chaque élément, sont de 118,7 et 76,9 N/mm<sup>2</sup> pour la contrainte circonférentielle, -52,0 et -10,2 N/mm<sup>2</sup> pour la contrainte radiale. La contrainte équivalente de Von-Mises a pour expression dans ce cas particulier, dans le repère principal des contraintes

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} = \frac{a^2 p}{b^2 - r^2} \sqrt{1 + \frac{3b^4}{r^4}}$$

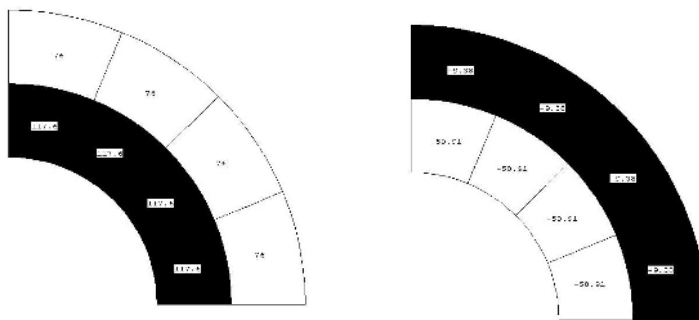


Figure 8.9 : Première et deuxième contrainte principale

Pour ces mêmes rayons moyens, la contrainte équivalente de Von Mises moyenne par élément a pour valeur 149,7 et 81,1 N/mm<sup>2</sup>. Les valeurs lissées évoluent de 149,7 et 81,1 N/mm<sup>2</sup> (Figure 8.10).

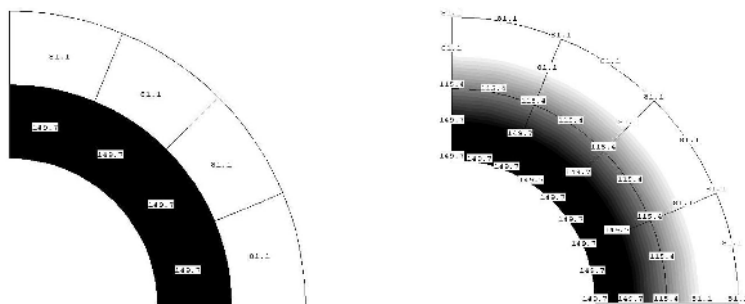


Figure 8.10 : Contrainte de Von Mises moyenne non lissée et lissée

Les valeurs extrapolées aux nœuds, que ce soit pour les contraintes principales ou la contrainte équivalente de Von Mises (Figure 8.11), sont en accord avec la solution analytique. L'écart obtenu provient du fait que les fonctions de forme sont des développements polynomiaux qui ne tendent par morceaux vers la solution en  $1/r$  que quand la taille des éléments diminue donc quand on raffine le maillage. Le saut de contrainte extrapolée aux nœuds, faible dans tout le modèle, montre que cette contrainte est fiable et peut être utilisée pour le dimensionnement. L'exploitation des résultats de ce calcul simple dont la solution est analytiquement connue permet de comparer et d'illustrer les post-traitements de contraintes.

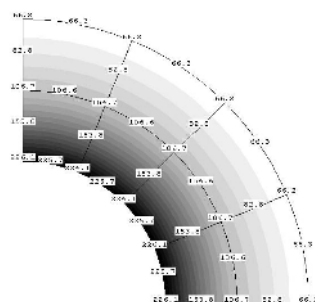


Figure 8.11 : Contrainte de Von Mises extrapolée





## Chapitre 9

# Éléments de plaques et de coques

### 9.1. INTRODUCTION

Une **plaque** est un solide plan dont une dimension appelée épaisseur est petite vis-à-vis des deux autres. Il admet un plan de symétrie passant par le milieu de l'épaisseur, appelé **feuillet moyen**, chargé transversalement. Par convention, dans le repère de l'élément, ce plan de symétrie est le plan  $xOy$ . L'épaisseur  $e$  est toujours dirigée selon l'axe propre  $z$  de l'élément (Figure 9.1).

Dans la théorie des plaques, on introduit des approximations pour pouvoir se ramener à un problème bidimensionnel. En particulier, l'épaisseur est suffisamment petite pour que l'on puisse supposer une variation linéaire des déformations planes le long de la normale au feuillet moyen. Il existe trois familles d'éléments de plaque, la dernière n'étant pas abordée ici :

- éléments à définition surfacique non déformable à l'effort tranchant,
- éléments à définition surfacique déformable à l'effort tranchant,
- éléments à définition volumique.

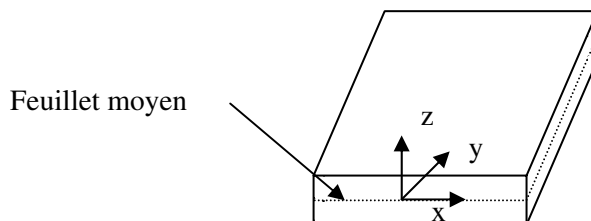


Figure 9.1 : Feuillet moyen et axes propres d'une membrane

## 9.2. HYPOTHÈSES DE LA THÉORIE DES PLAQUES

Dans la théorie linéaire des plaques isotropes, trois ou quatre hypothèses sont généralement admises :

**Hypothèse 1** : les contraintes normales au plan de la plaque sont négligeables par rapport aux contraintes existant dans le plan de la plaque :  $\sigma_{zz} = 0$

**Hypothèse 2** : les pentes du feuillet moyen restent petites par rapport à l'unité, et ceci dans n'importe quelle direction. De plus, le feuillet moyen ne subit aucune déformation du fait de la flexion.

**Hypothèse 3** : les points situés dans un plan orthogonal au feuillet moyen sont dans un plan après déformation.

**Hypothèse 4** : un plan orthogonal au feuillet moyen avant déformation l'est encore après déformation.

Les hypothèses 1-2-3-4 conduisent aux plaques dites minces, dites de Kirchhoff, dites sans déformation à l'effort tranchant.

Les hypothèses 1-2-3 conduisent aux plaques d'épaisseur modérée, dites de Mindlin ou Reissner ou Hencky, dites avec déformation à l'effort tranchant.

La théorie basée sur les hypothèses 1 à 4 donne de bons résultats tant que l'épaisseur reste petite par rapport aux autres dimensions du panneau ou de la structure, et lorsque le matériau possède un module de cisaillement transversal  $G$  élevé. Pour un matériau isotrope,  $G$  est du même ordre de grandeur que le module de Young  $E$  et l'**élancement géométrique** permet de choisir le type d'élément adapté pour la structure à modéliser. Dans certains cas, il est nécessaire d'apporter à cette théorie une amélioration en supprimant l'hypothèse 4 : la rotation de la section est alors différente de la pente du feuillet moyen.

### Hypothèse 1

C'est l'hypothèse commune à toutes les théories éléments finis de plaques. Un modèle R.D.M. simple permet d'en montrer la validité et les limites d'application. Soit une poutre sur deux appuis, soumise à une charge de pression linéique constante d'intensité  $p$ . La poutre a une section rectangulaire de largeur  $b$ , de hauteur  $h$ . Le moment dans la poutre a pour expression

$$M = \frac{px(L-x)}{2}$$

Il est maximal pour  $x = L/2$  et a pour valeur en ce point  $M_{max} = pL^2/8$

La contrainte axiale due à ce moment fléchissant a donc pour valeur maximale

$$\sigma_{xx} = \frac{Mv}{I} = \frac{3pL^2}{4bh^2}$$

Le rapport entre la contrainte  $\sigma_{zz}$  appliquée et la contrainte  $\sigma_{xx}$  est

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{3L^2}{4h^2}$$

La contrainte  $\sigma_{xx}$  est donc très grande par rapport à  $\sigma_{zz}$  si la poutre est élancée, c'est-à-dire si sa longueur est grande vis-à-vis des dimensions transversales. Le même raisonnement est valable pour une plaque. La contrainte normale  $\sigma_{zz}$  est considérée comme nulle : elle ne l'est pas mais elle est négligeable devant les contraintes qu'elle génère. C'est l'hypothèse générale de la théorie des plaques

$$\sigma_{zz} = 0$$

La plaque n'étant définie que par son feuillet moyen, c'est ce dernier qui est chargé et fixé, ce qui n'est pas physique. L'énergie de déformation associée à la contrainte  $\sigma_{zz}$  est :

$$T = \int \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} dz = 0$$

On fait l'hypothèse que les feuillets sont en contrainte plane et on ne regarde pas les déformations selon l'épaisseur, déformations que l'on peut calculer en post-traitement par la relation

$$\varepsilon_{ee} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

La conséquence est que le chargement et les conditions aux limites peuvent être appliqués sur le feuillet moyen plutôt que sur une des peaux sans perturber la solution.

## Hypothèse 2

Cette hypothèse est celle de la linéarité géométrique (Figure 9.2). Elle implique de petites rotations donc le déplacement axial, en  $1-\cos(\theta)$ , reste d'un ordre de grandeur inférieur au déplacement transversal en  $\sin(\theta)$ . La **flexion** est dite **inextensionnelle**, il y a découplage entre les déplacements membranaires et transversaux. Cette hypothèse est valable tant que la flèche transversale est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque. Au-delà, le couplage doit intervenir et on entre dans le domaine des non-linéarités géométriques. En

pratique, pour éviter tout problème d'interprétation, il faut vérifier que les rotations (sans dimension) sont petites, les composantes de la déformation de Green sont composées des dérivées des déplacements et non des déplacements.

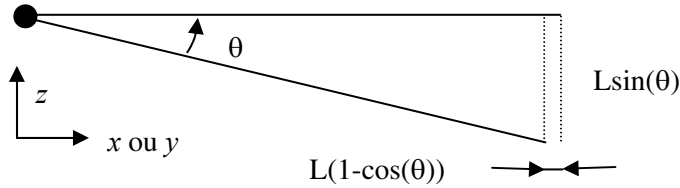


Figure 9.2 : Découplage membrane-plaque

### Hypothèse 3

Cette hypothèse suppose que le gauchissement de la section n'est pas pris en compte. S'il devait l'être, la modélisation nécessiterait des éléments tri-dimensionnels, ou des éléments à définition surfacique d'ordre supérieur (champ de déformations planes le long de la normale au feuillet moyen non linéaire en  $z$ ). Une section droite reste plan après déformation, il existe des formules reliant les déplacements  $u$  et  $v$  dans le plan au déplacement transversal  $w$  et à la rotation du feuillet moyen. Le cisaillement est lui aussi une fonction du déplacement transversal  $w$  et de la rotation du feuillet moyen

### Hypothèse 4

On néglige la déformation due à l'effort tranchant, le cisaillement est supposé nul. Il existe donc une relation directe entre la dérivée du déplacement transversal (pente du feuillet moyen) et la rotation de section. La connaissance du champ de déplacement  $w(x,y)$  en tout point permet la résolution complète du problème car les rotations ne sont que les dérivées du champ de déplacement, ce qui est utile pour les solutions analytiques. Dans le cas de la théorie des plaques d'épaisseur modérée, la connaissance du champ de déplacement  $w(x,y)$  et de deux champs de rotation  $\beta_x$  et  $\beta_y$  est nécessaire pour résoudre le problème car les **rotations de section** sont indépendantes du champ de déplacement  $w(x,y)$ .

Un modèle utilisant des plaques minces convergera vers une flèche inférieure à celle obtenue avec des plaques d'épaisseur modérée car, au déplacement transversal dû au moment qui accompagne toujours un effort tranchant se superpose alors le déplacement transversal dû à l'effort tranchant lui-même, qui est négligé pour les plaques minces. Il existe et si besoin est, on peut le calculer par la dérivée du moment fléchissant.

### 9.3. RELATIONS CINÉMATIQUES

Toute section droite reste plane. On peut donc écrire pour les déplacements dans le cas d'un comportement purement flexionnel :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) = z\beta_x \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) = z\beta_y \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases}$$

L'indice 0 indique qu'il s'agit de grandeurs déterminées dans le feuillet moyen, donc à mi-épaisseur.  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont les deux rotations de la section (Figure 9.3). Pour une plaque en flexion inextensionnelle, les déplacements du feuillet moyen dans son plan sont nuls. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, les déformations ont pour expression:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ 2\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases}$$

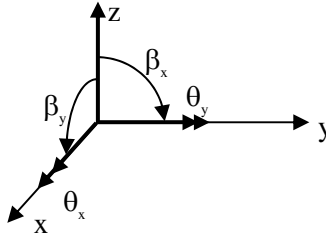


Figure 9.31 : Rotations de section

Selon la théorie de Kirchhoff, une section droite reste plane et perpendiculaire au feuillet moyen. On peut donc écrire pour les déformations :

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = 0 \Rightarrow 0 = \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \Rightarrow \beta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow 0 = \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \Rightarrow \beta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

On voit donc naturellement apparaître les relations entre les pentes du feuillet moyen et les rotations de section dans le cas où le cisaillement transversal est négligé. Les déformations en un point ne dépendent que des courbures et de l'écart entre le feuillet moyen et le point considéré ; les déplacements en un point ne dépendent que du déplacement et de ses dérivées premières dans le feuillet moyen, ainsi que de la distance entre ce point et le feuillet moyen. L'état de déformation de la plaque peut donc être entièrement décrit par  $w$ , déplacement transversal du feuillet moyen, et ses dérivées. Pour respecter les conditions de continuité inter-éléments, on est donc conduit à imposer non seulement la continuité de ce déplacement transversal mais également de sa dérivée autour du bord pour que la plaque reste continue et ne fasse pas de pli.

#### 9.4. RELATIONS MOMENTS-COURBURES

Les relations **Moments-Courbures** jouent pour les plaques le même rôle que les relations **Contraintes-Déformations** en élasticité. Elles relient la courbure d'une plaque au moment qui lui est appliqué ou le contraire.  $M_x$  est le **moment de flexion** par unité de longueur sur les côtés parallèles à  $Oy$ , résultant de la distribution antisymétrique des contraintes  $\sigma_{xx}$  dans l'épaisseur. De même,  $M_y$  est le moment de flexion par unité de longueur sur les côtés parallèles à  $Ox$ , résultant de la distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  dans l'épaisseur.  $M_{xy}$  est le **moment de torsion** autour de la normale à la section, résultant de la distribution des contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  dans l'épaisseur. Ces moments s'expriment en Newton et sont homogènes à des forces.

$$M_x = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} z dz \quad M_y = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{yy} z dz \quad M_{xy} = \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{xy} z dz$$

Pour un élément de plaque, les contraintes planes dues à la flexion évoluent linéairement dans l'épaisseur et ont pour valeur 0 dans le feuillet moyen (Figure 9.4). Leur distribution dans l'épaisseur est antisymétrique par rapport au feuillet moyen : les contraintes maximales  $\sigma_m$  apparaissent dans les peaux et y ont pour valeur,  $e$  étant l'épaisseur de la plaque et  $M$  le moment auquel est soumis le feuillet moyen :

$$\sigma_{xx} = z \frac{2}{e} \sigma_m \quad M_x = \int \sigma_{xx} z dz = \frac{2\sigma_m}{e} \int z^2 dz = \frac{\sigma_m e^2}{6} \Rightarrow \sigma_m = \frac{6M}{e^2}$$

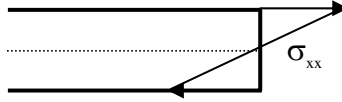


Figure 9.4 : Répartition des contraintes dans l'épaisseur d'une plaque

Soit un plan situé à la distance  $z$  du feuillet moyen qui ne subit aucune déformation due à la flexion. La déformation  $\varepsilon$  de ce plan est reliée à la **courbure**  $\chi$  par la relation  $\varepsilon = z\chi$  comme dans la théorie des poutres. La loi de Hooke s'écrit dans le plan

$$\sigma_{xx} = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu\chi_y) \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_y + \nu\chi_x)$$

Les relations moments-courbures s'en déduisent en reportant l'expression dans celles des moments. On peut regrouper au sein d'une expression matricielle les trois relations mises en place entre moments et courbures.  $D$  est la **rigidité flexionnelle** de la plaque, analogue au produit  $EI$  de la théorie des poutres en flexion.

$$M_x = \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{xx} z dz = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu\chi_y) \int_{-e/2}^{+e/2} z^2 dz = D (\chi_x + \nu\chi_y)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{pmatrix} \quad D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

On peut exprimer les relations inverses, reliant les courbures aux moments. Elles donnent la forme que prend le feuillet moyen quand on lui applique les moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$ . Si l'on impose un moment  $M_x$  sur deux bords parallèles d'une plaque rectangulaire,  $M_y$  étant nul, la plaque a en tout point deux courbures principales opposées, reliées par le coefficient de Poisson. La surface qui représente le feuillet moyen déformé est la **surface anticlastique**. Les lignes d'iso-déplacement ne sont pas des droites parallèles mais des courbes à moins que le matériau constitutif n'ait un coefficient de Poisson nul auquel cas il n'existe qu'une seule courbure. Si l'on impose une forme cylindrique à une plaque, une des deux courbures principales est nulle en tout point, par exemple  $\chi_y$ . Il reste alors :



$$M_x = D \chi_x = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x$$

Si on fléchit une poutre de largeur unitaire de même épaisseur, on obtient :

$$M_x = \frac{Ee^3}{12} \chi_x$$

*La plaque constituée d'un matériau ayant un coefficient de Poisson de 0,3 est environ 10 % plus raide qu'une poutre équivalente de même section et de même inertie si la courbure  $\chi_y$  est empêchée.*

## 9.5. FONCTIONS D'INTERPOLATION

La détermination des fonctions d'interpolation est délicate, surtout si on veut avoir la continuité de la pente le long des bords (**éléments conformes**). Il est plus facile de trouver des fonctions qui ne garantissent que la continuité du déplacement transversal et ne respectent la continuité de la pente qu'aux nœuds et pas tout le long des arêtes (**éléments non conformes**). Il n'y a alors plus de convergence monotone de la solution avec le raffinement du maillage. Il faut soit justifier théoriquement que l'élément converge, soit s'en assurer par le patch-test.

### 9.5.1. Plaques minces conformes

On se limite ici aux éléments développés selon la théorie cinématique de Kirchhoff, pour des triangles conformes. En chaque nœud, on prend comme paramètres nodaux  $w$  et les deux pentes qui sont les deux dérivées premières. Pour un élément triangulaire conforme, on a donc a priori 9 degrés de liberté caractérisant l'élément.

Si le champ de déplacement dans l'élément était de degré 2, on n'aurait que six paramètres internes, les pentes seraient de degré 1. Or on a besoin de neuf connecteurs externes pour que la matrice de connexion soit carrée :

$$w_1(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = a_2 + a_4y + 2a_5x \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = a_3 + a_4x + 2a_6y$$

D'autre part, pour déterminer le champ de déplacement sur un bord, on disposerait de 4 degrés de liberté sur ce bord (par exemple parallèle à  $Ox$ ) : les deux déplacements et les pentes  $w_x$  aux deux nœuds (Figure 9.5). Mais avec une approximation parabolique du déplacement sur ce bord, il faut 3

informations sur ce même bord. La question est de déterminer comment gérer le supplément d'information.

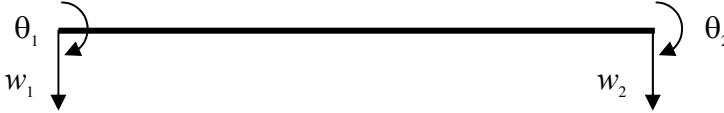


Figure 9.5 : Degrés de liberté sur une arête, dans un plan de flexion

On pourrait rajouter trois termes pour que le nombre de variables internes soit le même que le nombre de connecteurs :

$$w_2(x, y) = w_1(x, y) + a_7 x^2 y + a_8 x y^2 + a_9 x^2 y^2$$

Il n'est pas nécessaire de vérifier que la rotation est continue autour d'un axe orthogonal au bord (direction  $n$ ), il suffit de vérifier que le déplacement l'est, ce qui est le cas pour le second degré. Le problème est différent en ce qui concerne la rotation normale (direction  $s$ ), qui est la rotation autour du bord lui-même (Figure 9.6). Pour le 1<sup>er</sup> bord ( $y = 0$ ), cette rotation normale est la dérivée par rapport à  $y$  : on regarde comment évolue le déplacement transversal quand on se déplace sur une perpendiculaire au bord, donc en pivotant autour du bord. Cette rotation est du second degré.

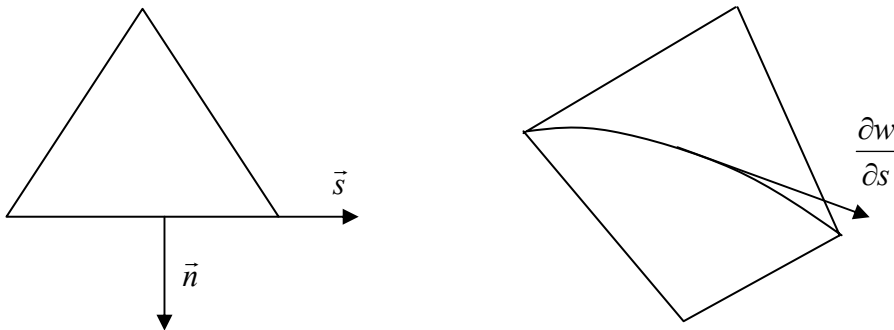


Figure 9.6 : Continuité d'une rotation sur un bord

Pour assurer leur continuité, il faudrait 3 valeurs sur le bord or on ne dispose que de deux nœuds, donc de deux informations. La rotation normale n'a donc aucune raison d'être identique de part et d'autre du bord car elle n'est pas définie de façon unique sur un bord. La continuité de la rotation normale le long des bords des éléments n'est pas garantie (Figure 9.7).

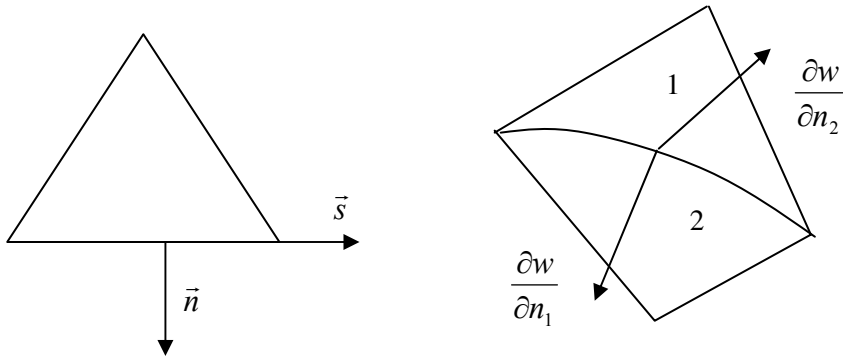


Figure 9.7 : Discontinuité de l'autre rotation sur le bord

Pour assurer la continuité, il faut ajouter comme inconnue une rotation normale au milieu du côté (Figure 9.8). On obtient un total de 12 degrés de liberté (et plus 9) mais pour 9 paramètres internes. Un élément de plaque mince du second degré ne peut pas être conforme. Avec une approximation du troisième degré pour le déplacement transversal, on aurait :

$$w_3(x, y) = w_1(x, y) + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3$$

Le long d'un bord,  $w$  est cubique et on dispose bien de 4 valeurs pour les 4 degrés de liberté. Mais la pente normale est de degré 2 et on ne dispose que de deux informations. Pour une bonne transmission, il faudrait une information supplémentaire le long du bord, soit un total de 12 degrés de liberté mais pour seulement 10 variables internes...

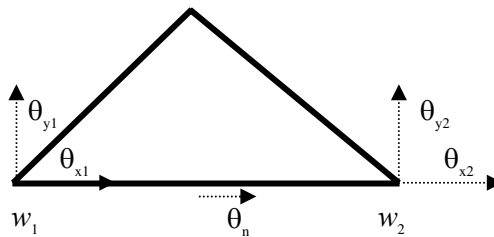


Figure 9.8 : Discontinuité de l'autre rotation sur le bord

On montre qu'il faut un champ interne du 5<sup>ème</sup> degré et connecter les dérivées secondes de  $w$  pour avoir une bonne connexion. Mais imposer aux nœuds la continuité de la courbure ne donne pas de bons résultats si les éléments n'ont pas la même épaisseur ou dans le cas de branchements multiples. Un tel **élément** est dit **surcompatible**. On ne peut donc pas développer un élément triangulaire de plaque compatible qui satisfasse (sans aucun artifice) les

conditions de déplacement et de pente. Il est facile de montrer par un raisonnement analogue qu'il n'est pas possible de trouver un élément de plaque mince quadrangulaire compatible.

Les seuls éléments de plaque mince conformes sont dus à **Fraeijs de Veubeke** et **Sander**, et à **Clough** et **Tocher**. L'élément triangulaire de Fraeijs de Veubeke est constitué de l'assemblage de trois sous-triangles pour lesquels le déplacement transversal  $w$  est un polynôme du 3<sup>ème</sup> degré. On garde une pente parabolique le long des bords en introduisant la notion de degré de liberté d'interface, ce qui pose entre autres des problèmes de gestion de l'information, on condense les degrés de liberté « intérieurs » à l'assemblage. Le quadrilatère construit par assemblage de 4 sous-triangles est connu sous le nom de **Quadrilatère Conforme (CQ)**. C'est un élément de Kirchhoff qui présente un excellent compromis simplicité-précision. L'élément triangulaire de Clough (**HCT**) est construit de la même manière par assemblage de triangles, mais la rotation autour du bord est éliminée en imposant que la rotation normale est linéaire autour du bord. Cette contrainte fait que cet élément est plus raide que celui développé par Fraeijs de Veubeke et Sander.

### 9.5.2. Plaques minces non conformes

L'idée qui a permis d'avancer dans la mise au point des éléments de plaque est la suivante : si la continuité des pentes n'est pas satisfaite le long des bords, mais si elle est satisfaite aux nœuds, alors à la limite, quand le nombre d'éléments du modèle augmente, on a presque la continuité des pentes le long des bords. Les éléments ainsi créés sont dits « non compatibles ». Il existe donc de fait de très nombreux éléments de plaque, qui dépendent des choix réalisés par les développeurs. Il faut s'assurer qu'ils convergent mais en général la convergence monotone n'est pas garantie, ils peuvent être trop raides ou trop souples, ce ne sont pas des éléments de type déplacement pur.

En reprenant le développement du troisième degré pour le triangle, on a 10 variables internes et 9 connecteurs. Une possibilité consiste à supposer égaux les coefficients  $a_8$  et  $a_9$ , limitant ainsi à 9 le nombre de variables internes. L'utilisation des coordonnées intrinsèques (isoparamétrie) a permis de lever les difficultés rencontrées lors du développement initial de ces éléments. On peut également utiliser un développement incomplet en se limitant à neuf termes associés aux 9 degrés de liberté... Une autre astuce consiste à ajouter un mode bulle que l'on condense par la suite. **Morley** a proposé un triangle à 6 nœuds et 6 degrés de liberté, la translation transversale pour chacun des trois sommets et la pente normale au milieu de chaque bord. C'est l'élément le plus simple, il conduit à des courbures constantes dans l'élément.

La continuité  $C^1$  du déplacement transversal a été introduite par l'hypothèse de Kirchhoff car en supposant le cisaillement transversal nul, il existe une relation directe entre la rotation de la section et la pente. Dans l'élément **DKT** ou **DKQ** de **Batoz** (Discrete Kirchhoff Triangle et Discrete Kirchhoff Quadrangle), des contraintes linéaires sont introduites entre les degrés de liberté, de manière à satisfaire les hypothèses de Kirchhoff de manière discrète et non plus partout dans l'élément. Il existe de nombreuses variantes de ces éléments qui ne sont pas décrites ici.

### 9.5.3. Plaques d'épaisseur modérée

La mise en place de ces éléments de plaque mince pose des problèmes importants. A cela s'ajoute le fait qu'ils ne donnent une solution précise que lorsque l'épaisseur de la plaque est faible, la déformation due à l'effort tranchant n'étant pas prise en compte.

En prenant en compte la déformation due au cisaillement, la compatibilité ne requiert donc plus que la continuité  $C^0$  pour le déplacement transversal, mais il faut définir deux champs de rotation  $C^0$  car les rotations ne sont plus les pentes. La prise en compte du cisaillement transversal modifie complètement la forme des fonctions d'interpolation. En revenant à l'approche cinématique, on écrit le déplacement dû à un chargement transversal en fonction des trois champs  $w_0, \beta_x$  et  $\beta_y$  où  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont les rotations de section et  $w_0(x,y)$  le déplacement transversal du feuillet moyen (cf. paragraphe 9.3) :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases}$$

$\beta_y$  correspond à une rotation autour de  $x$  (donc  $\theta_x$ ) mais le sens conventionnel est de  $y$  vers  $z$  d'où le signe moins. On en déduit  $\beta_y = -\theta_x$ .  $\beta_x$  correspond à une rotation autour de  $y$  (donc  $\theta_y$ ) et le sens conventionnel est de  $z$  vers  $x$  d'où le signe plus. On en déduit  $\beta_x = \theta_y$  (cf. figure 9.3).

Il est aisé de définir des fonctions linéaires sur le bord. On peut utiliser les fonctions de forme isoparamétrique classique pour  $w$  ou pour les deux rotations, puis construire la matrice de raideur. Ces éléments « théoriques » posent néanmoins un problème d'utilisation : leurs performances se dégradent très vite lorsque l'élancement de la plaque augmente. De tels éléments ne sont pas capables d'approcher correctement le comportement de plaques physiquement minces, l'effet du cisaillement devient prépondérant dans la solution numérique alors même qu'il devrait s'estomper. C'est le blocage en cisaillement (shear

locking), problème déjà rencontré pour les éléments de membranes en particulier. Le problème peut être résolu en intégrant sélectivement les termes de cisaillement, c'est à dire en ne les intégrant pas de la même manière que les termes de flexion dans la matrice de raideur.

Les éléments précédents, basés sur trois champs indépendants (déplacement transversal et rotations) prennent en compte la déformation à l'effort tranchant. Ils donnent de bons résultats, que la plaque soit mince ou d'épaisseur modérée, ce qui fait qu'en pratique, ils sont utilisables quel que soit l'élancement. Les éléments les plus connus sont les **DST** et **DSQ** (Discrete Shear Triangle et Discrete Shear Quadrangle) de Batoz ou les éléments de Bathe, de Hughes...

## 9.6. COQUES

Il existe deux familles d'éléments : une famille basée sur une approche tri-dimensionnelle qu'on applique à des corps minces (formulation basée sur les travaux d'**Hamad**), une famille basée sur l'assemblage d'une plaque et d'une membrane éventuellement gauche (théorie de **Marguerre**). Il existe plusieurs théories de coque, elles diffèrent avec les approximations en  $e/R$ ,  $e$  étant l'épaisseur de l'élément et  $R$  son rayon de courbure. Si ce rapport n'est pas petit, les résultats peuvent converger vers des valeurs différentes. Une **coque** est la superposition d'une membrane (ne travaillant que dans son plan) et d'une plaque (ne travaillant que perpendiculairement à son plan). C'est un élément très général puisqu'il accepte tous les types de chargement. En règle générale, pour la modélisation des structures constituées de matériaux isotropes en analyse linéaire, les comportements membranaires et flexionnels sont découplés et sont étudiés séparément si la coque est l'assemblage d'une plaque et d'une membrane. Si la coque est basée sur une approche tridimensionnelle, les comportements membranaires et flexionnels sont automatiquement couplés, même dans le cadre de l'analyse linéaire.

Il existe de très nombreux éléments de coque, iso-paramétriques ou non, plans ou courbes, triangulaires ou quadrangulaires, conformes ou non, cinématiques ou hybrides, déformables ou non à l'effort tranchant... Le but de cet ouvrage n'est pas de détailler les fonctions de forme des différentes coques mais de tenter de décrire, de façon générale, les éléments les plus utilisés. Les coques sont triangulaires ou quadrangulaires, à bords rectilignes ou courbes, elles peuvent être générées par des mailleurs automatiques bi-dimensionnels ou tri-dimensionnels surfaciques. Dans le repère structural, une coque a le plus souvent 6 degrés de liberté aux nœuds, 3 déplacements et 3 rotations, soit des triangles à 18 degrés de liberté et des quadrangles à 24 degrés de liberté (Figure 9.9) pour les éléments du premier degré.

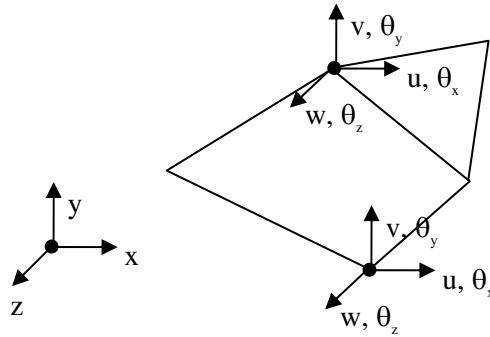


Figure 9.9 : Degrés de liberté dans les repères structuraux

En général, le degré de liberté de rotation dans le plan  $\theta_z$  (**drilling DOF**) n'est pas alimenté en raideur ; dans son repère propre, l'élément ne possède que 5 degrés de liberté : 2 pour la membrane, notés traditionnellement  $u$  et  $v$  et 3 pour la plaque, notés traditionnellement  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Pour les éléments courbes (genre **Hétérosis**), la difficulté existe également : la rotation autour de la normale physique pose un problème car cette normale est différente en chaque nœud du maillage.

Lorsque ces éléments sont coplanaires dans un maillage ou parallèles à un plan à coordonnées, il en résulte l'apparition de pivots nuls lors de la résolution, et l'élimination de ces degrés de liberté  $\theta_z$  (dans le repère propre à chaque élément). Lorsque des éléments sont quasi-coplanaires, pour éviter les problèmes de mauvais conditionnement numérique dû à une raideur projetée non nulle mais éventuellement très petite, les programmes imposent aux nœuds des systèmes d'**axes locaux automatiques** et y fixent des degrés de liberté (Figure 9.10) ou ajoutent des raideurs arbitraires autour de la normale à la coque. Ces artifices peuvent s'avérer parasites et dénaturer la solution.

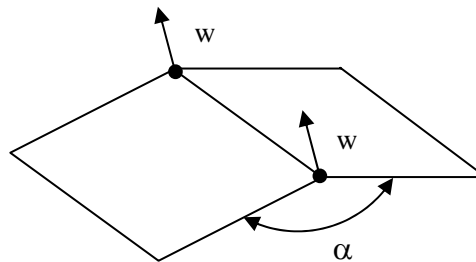


Figure 9.10 : Coques presque coplanaires,  $\alpha$  tend vers  $180^\circ$

Les éléments de plaque non déformables à l'effort tranchant posant des problèmes quand l'épaisseur de la structure n'est pas mince, les éléments de coque sont construits avec des plaques déformables à l'effort tranchant.

Il existe dans certains programmes des éléments de coque d'épaisseur modérée, pourvus d'un sixième degré de liberté au nœud  $\theta_z$  alimenté en raideur, éliminant ainsi les problèmes d'axes locaux automatiques et de pivots nuls. Ce degré de liberté n'est pas égal à la vraie rotation dans le plan de la membrane mais est homogène à une rotation, améliore la jonction d'éléments de coque non coplanaires et facilite la connexion à des éléments finis de nature différente comme les poutres en particulier. Pour la modélisation de structures très minces, il existe des éléments de coque qui n'ont que trois degrés de liberté de translation aux nœuds, ce qui évite le problème de mauvais conditionnement numérique lié à la grande différence entre la raideur en membrane et la raideur en flexion.

## 9.7. CONNEXION DES COQUES

La connexion des degrés de liberté aux nœuds et interfaces s'il en existe, garantit la continuité des déplacements et rotations le long des bords : ce résultat provient du choix des degrés de liberté aux nœuds comme coordonnées généralisées dans le cas de la théorie cinématique. Dans le cas de coques, qu'elles soient minces ou d'épaisseur modérée, cette continuité de la solution n'est plus garantie si les éléments ne sont pas coplanaires. Prenons par exemple deux éléments de coque perpendiculaires, la traction dans le plan du premier élément étant reprise en flexion par le second (Figure 9.11).

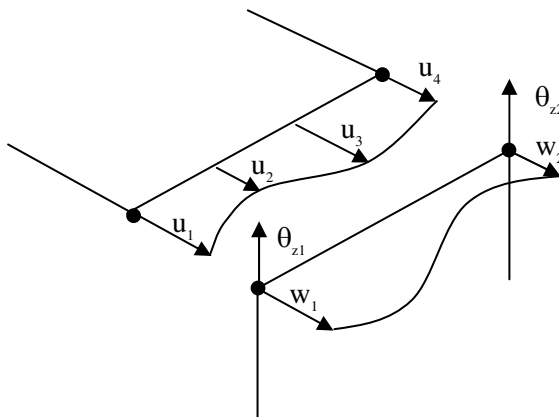


Figure 9.11 : Raccord de coque



Le déplacement de la ligne de raccord est pour la plaque une fonction cubique, entièrement déterminée par les 2 déplacements et les 2 rotations ( $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2$ ). Même si la membrane a un champ de déplacement cubique, il ne pourra être défini que par les quatre valeurs du déplacement aux quatre nœuds de l'arête  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ . L'égalité des déplacements aux nœuds  $u_1 = w_1$  et  $u_4 = w_2$  ne suffit pas pour que les cubiques soient confondues en tout point car elles sont définies différemment. Il y a donc discontinuité du déplacement sur l'arête commune bien qu'il y ait continuité des déplacements aux nœuds. Pour avoir localement une bonne solution, il faut raffiner le maillage, le champ de déplacement du troisième degré sur l'arête est de plus en plus proche d'un champ « linéaire » lorsque la taille des éléments diminue, d'où la continuité apparente au-delà d'un certain raffinement. En ce qui concerne la rotation  $\theta_2$ , il n'y a aucune connexion possible pour une coque à cinq degrés de liberté par nœud, ce degré de liberté n'existant pas dans la membrane. Dans le cas de coques à 6 degrés de liberté alimentés en raideur par nœud, la continuité du champ de déplacement, bien que toujours imparfaite, est sensiblement améliorée.

## 9.8. COQUES GAUCHES

La courbure dont il est question ici est la courbure hors plan. Les éléments quadrangulaires sont alors définis par 4 nœuds non coplanaires ou 8, les triangulaires par 6. La théorie développée par **Marguerre** permet de prendre en compte un couplage entre les degrés de liberté membranaires et transversaux dans le cas d'éléments non plans, et ceci même dans le domaine linéaire (Figure 9.12), dans le cas d'une coque constituée de l'assemblage plaque-membrane. Pour les coques basées sur une approche tri-dimensionnelle, ce couplage est automatique. La déformation  $\varepsilon_{xx}$  dans le plan ( $u, w$ ) de l'élément a pour expression,  $w_0$  étant appelée la **cote normale initiale** :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$$

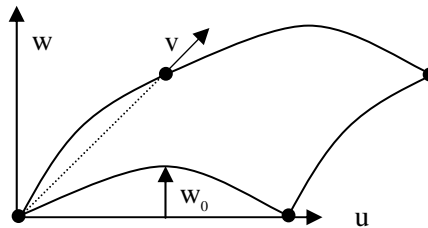


Figure 9.12 : Coque gauche et cote normale initiale

Ce couplage accroît sensiblement les performances des éléments et permet l'obtention de solutions satisfaisantes pour des maillages relativement grossiers. En raffinant le maillage, on diminue les cotes  $v_0$  et  $w_0$  et l'influence des termes complémentaires pour le calcul de la déformation membranaire. Les éléments basés sur la théorie de Marguerre convergent vers les éléments de coque classiques quand ils deviennent plans. Quand un cylindre est mince, la raideur en flexion est d'un ordre de grandeur équivalent à la raideur en traction-compression. Le fait d'introduire le couplage  $(u,v)$  et  $(u,w)$  améliore le comportement de l'élément. Mais si la coque est très mince, la raideur en flexion peut devenir négligeable par rapport à la raideur en traction-compression, ce qui génère un mauvais conditionnement de l'élément : le fait d'introduire le couplage dégrade donc dans ce cas les performances de l'élément au lieu de les améliorer.

## 9.9. DONNÉES ET POST-TRAITEMENT

Outre la topologie, il faut obligatoirement fournir à un programme d'analyse linéaire, pour une structure en matériau isotrope, le module de Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de l'élément. Certaines données matérielles comme la masse volumique du matériau ou son coefficient de dilatation thermique ne sont nécessaires que pour certains types de calcul.

Dans certaines situations, le feuillet moyen de la structure physique n'est pas continu, soit du fait d'une variation locale d'épaisseur, soit parce qu'il existe un décalage physique. Cela peut poser des problèmes de maillage (Figure 9.13). Si on veut prendre en compte la marche, on est conduit à générer des éléments de petites dimensions, ce qui peut être long à faire car il faut bien préparer la géométrie, et risqué en termes de conditionnement. Si on ne prend pas en compte le décalage, après adaptation de la géométrie, le maillage est plus simple mais la raideur n'est pas la bonne. Comme pour les éléments de poutre, il existe la possibilité de réaliser un **offset** du feuillet moyen. Il est géométriquement mal positionné, le paramètre d'offset permettant de calculer l'inertie qu'aurait l'élément s'il était à la bonne position.

En post-traitement, outre les déplacements et les réactions exprimés dans le repère structural, on a accès aux flux d'efforts et aux moments, au tenseur des déformations et au tenseur des contraintes. Mais l'état de contrainte n'étant en général pas uniforme dans l'épaisseur de la coque puisqu'à l'état membranaire se superpose un état flexionnel, le post-traitement dans le feuillet moyen n'est pas suffisant alors qu'il l'était pour les éléments de l'élasticité bi-dimensionnelle (Figure 9.14). Il existe donc la notion de **peau supérieure** et de **peau inférieure**, situées à une demi-épaisseur de chaque côté du feuillet moyen. Les peaux supérieure et inférieure sont repérées dans le système d'axes propres

à l'élément, l'axe propre  $z$  est conventionnellement défini de la peau inférieure vers la peau supérieure selon la règle du tire-bouchon quand on décrit géométriquement l'élément (Figure 9.15).  $N_1$  est le premier nœud de la liste décrivant la topologie de l'élément,  $N_2$  le deuxième.

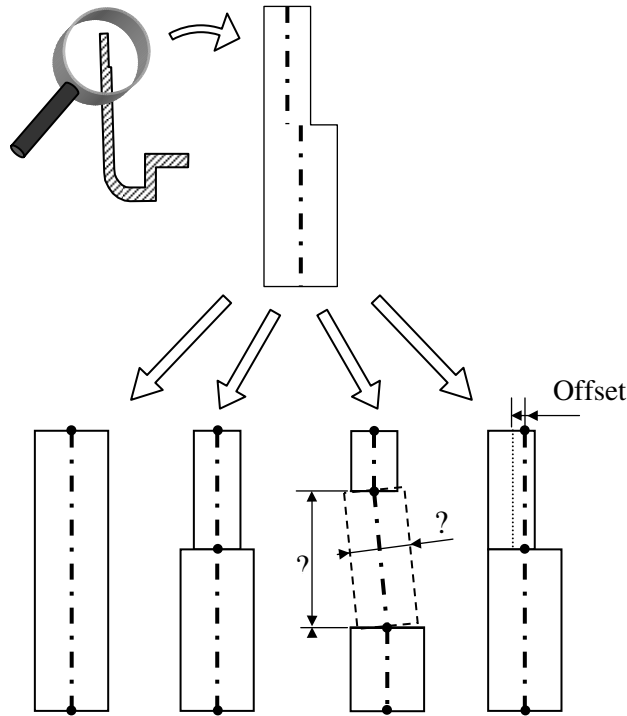


Figure 9.13 : Idéalisations possibles en cas de variation brutale de l'épaisseur

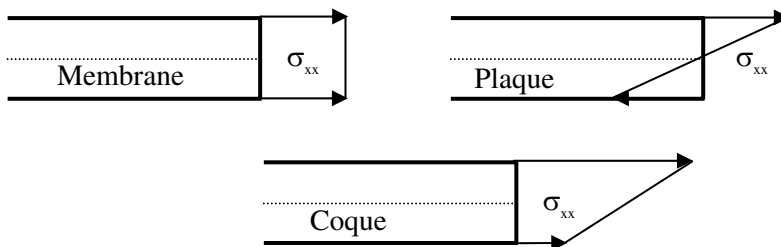


Figure 9.14 : Répartition des contraintes dans l'épaisseur d'une coque

Dans chacune des peaux et dans le feuillet moyen, les composantes des tenseurs sont par défaut exprimées dans le repère propre de l'élément, en valeur moyenne par élément ou extrapolées aux nœuds de l'élément. On peut afficher les composantes principales et les directions associées, ou une contrainte équivalente. Les réactions nodales sur les degrés de liberté fixés sont dépendantes du maillage et du degré des éléments : ce sont directement les contraintes ou les résultantes d'efforts passant par chaque liaison qu'il faut analyser. Les réactions sont cependant intéressantes en validation de calcul : si elles n'agissent pas dans le bon sens, c'est que la structure a tendance à s'écarter de la liaison et qu'il aurait fallu mettre en place un modèle avec des conditions de contact pour déterminer le comportement de la structure sous charge.

Si, dans un maillage, le sens de parcours des éléments n'est pas cohérent, les contraintes dans les peaux présenteront des aberrations ou des « discontinuités » difficiles à interpréter en post-traitement, d'où la nécessité d'un bon post-traitement. Si la pression sur un élément de coque s'introduit dans son repère propre, le champ de déplacement peut lui aussi présenter des aberrations car la charge appliquée peut localement aller dans une direction opposée à celle appliquée sur les éléments adjacents.

Il faut faire attention au repère propre pour l'interprétation des composantes des tenseurs dans les éléments. Si les éléments ont la même direction propre  $z_p$  mais que le repère propre est parallèle au premier coté de l'élément, les composantes des tenseurs ne sont pas continues nécessairement d'un élément à l'autre, tout dépend du maillage. En général, il est possible d'associer aux éléments un repère (qui n'est plus le repère propre), mais qui est continu d'un élément à l'autre pour simplifier l'interprétation des résultats en post-traitement.

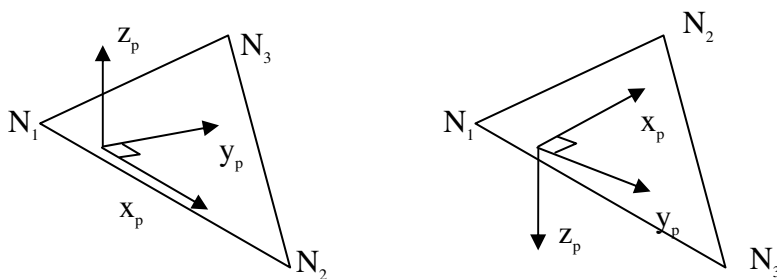


Figure 9.15 : Axes propres d'une coque



# Chapitre 10

## Éléments de poutre

### 10.1. POUTRE EN RDM

La **poutre** est un élément de structure dont les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur. La section, souvent constante, peut évoluer lentement et continûment en forme et en dimension. La **fibre neutre**, souvent rectiligne, est la ligne qui passe par le centre de gravité de toutes les sections droites de la poutre. La poutre est l'élément de base en Résistance Des Matériaux et est très utilisée en construction mécanique, soit seule dans un treillis plan ou spatial, soit comme raidisseur dans les structures à panneaux minces. La poutre est susceptible de reprendre les efforts et les moments dans toutes les directions, ce qui la différencie de la barre qui ne travaille qu'en traction-compression selon son axe. Elle n'est géométriquement décrite que par sa fibre neutre qui est le premier axe de son repère propre. On définit les deux directions principales de la section droite qui forment avec l'axe de la poutre son repère propre (Figure 10.1), ainsi que les propriétés équivalentes exprimées dans ces axes (aire, inerties principales, sections réduites).

Les sollicitations simples appliquées sur une poutre sont la traction, la torsion, la flexion pure ou simple. Une section droite reste plane sous charge et se comporte comme un corps indéformable. En mécanique linéaire, pour une sollicitation combinée, la charge étant une combinaison linéaire de sollicitations simples, la réponse de la poutre est une combinaison linéaire des réponses à ces sollicitations simples : il n'y a pas de couplage. Une poutre droite appuyée sur ses deux extrémités et soumise à une pression se déforme ; la poutre déformée a en première approximation la même longueur que la poutre droite, bien que la distance entre appuis n'ait pas changé. Les résultats d'un calcul RDM sont pour les déplacements et rotations aux nœuds, ainsi que les **éléments de réduction** aux nœuds : ce sont, pour chaque poutre d'un treillis, les efforts agissant dans la

poutre, conventionnellement exprimés dans les axes propres attachés à la poutre. Il s'agit de l'effort normal  $N$ , des deux efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$ , du moment de torsion  $M_x$ , et des deux moments de flexion  $M_y$  et  $M_z$ . Ils ont pour expression :

$$\text{effort normal} \quad N = \int_S \sigma_{xx} ds$$

$$\text{efforts tranchants} \quad T_y = \int_S \tau_{xy} ds \quad T_z = \int_S \tau_{xz} ds$$

$$\text{moment de torsion autour de la fibre neutre} \quad M_x = \int_S (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) ds$$

moments de flexion par rapport aux axes principaux d'inertie

$$M_y = \int_S z \sigma_{xx} ds \quad M_z = - \int_S y \sigma_{xx} ds$$

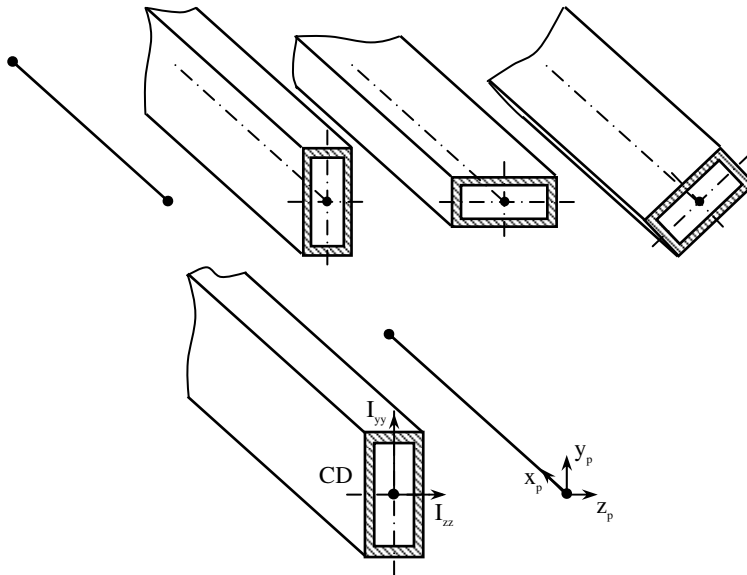


Figure 10.1 : Axe et directions principales de la section d'une poutre

On calcule également les diagrammes, qui sont les évolutions de ces éléments de réduction sur chaque poutre du treillis, puis les contraintes axiales. La contribution des efforts tranchants est souvent négligée : la contrainte équivalente s'identifie à la valeur absolue de la contrainte axiale, elle-même calculée par les relations

$$|\sigma_a| = \left| \frac{N}{S} \pm \frac{M_y \cdot w}{I_y} \pm \frac{M_z \cdot v}{I_z} \right|$$

$v$  et  $w$  sont les coordonnées des fibres les plus éloignées de la fibre neutre dans les axes principaux liés à la section droite.

## 10.2. ÉLÉMENT FINI DE POUTRE

C'est un **élément à définition linéique**, qui n'est décrit que par sa fibre neutre et dont la topologie peut être construite par des mailleurs automatiques linéiques. Il est généralement rectiligne, et défini par les deux extrémités de sa fibre neutre, A et B. Par convention, la droite AB est l'axe  $x$  propre de l'élément. Pour définir les axes principaux d'inertie, c'est à dire l'orientation de la section autour de l'axe  $x$ , il faut soit donner un vecteur non colinéaire à AB, soit un troisième nœud non aligné avec A et B. Le deuxième axe est calculé par le programme et est perpendiculaire à l'axe  $x$ , dans le plan défini par les trois nœuds. Le troisième axe est orthogonal au plan défini par les deux premiers et forme avec eux un repère orthonormé direct (Figure 10.2). Dans certains programmes, c'est le troisième axe qu'il faut introduire, le programme calculant alors le second de telle façon que le repère propre soit orthonormé direct. Ce n'est qu'une question de convention. La plupart des logiciels de calcul disposent d'une bibliothèque de sections. L'utilisateur choisit la forme du profil, en donne les caractéristiques géométriques et le programme calcule toutes les propriétés équivalentes de la section. Ce sont l'aire, les directions principales par rapport au repère conventionnel attaché à la section, les inerties principales, les sections réduites. Lorsque le profil n'est pas en bibliothèque, c'est à l'utilisateur de donner au programme les directions principales de la section et toutes ses propriétés équivalentes.

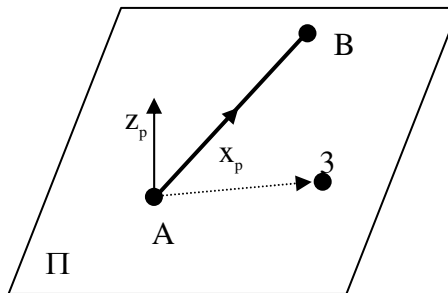


Figure 10.2 : Axe et directions principales de la section d'une poutre



Outre la topologie et l'orientation de la section droite, il faut obligatoirement fournir à un programme d'analyse linéaire le module de Young et le coefficient de Poisson ou module de cisaillement. Il existe des poutres avec ou sans déformation due à l'effort tranchant, sans gauchissement. Les poutres très courtes dont les sections droites gauchissent ne sont pas implantées dans tous les logiciels (Figure 10.3). Elles nécessitent des degrés de liberté supplémentaires et elles ne sont pas du premier ordre c'est à dire que les déplacements dans la section ne sont pas linéaires en  $y$  et en  $z$ . Elles sont souvent modélisées par des éléments de volume car elles s'en rapprochent beaucoup par leur topologie, bien qu'il soit vite plus fastidieux de travailler avec des volumes qu'avec des éléments linéiques. Ces poutres ne seront pas étudiées dans cet ouvrage. Les éléments de poutre ont six degrés de liberté aux nœuds, tous alimentés en raideur : trois translations et trois rotations permettant de reprendre les trois efforts et les trois moments (Figure 10.4).

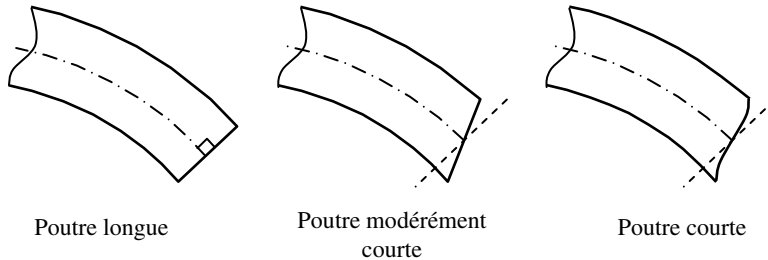


Figure 10.3 : Types de poutres

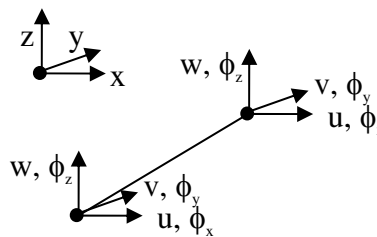


Figure 10.4 : Degrés de liberté d'une poutre

En se restreignant à la mécanique linéaire, et en supposant qu'une section droite quelconque reste plane après déformation, le déplacement d'un point  $M$  quelconque de la section, de coordonnées  $y$  et  $z$  dans le repère de la poutre, est déterminé à partir du déplacement du centre de gravité de la section et du vecteur rotation de la section

$$\mathbf{u}(M) = \mathbf{u}(G) + \vec{\Omega} \wedge GM$$

En reportant cette relation dans l'expression des déformations pour des calculs linéaires, on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(G) + y\chi_z + z\chi_y \\ \gamma_{xy} = -\theta_z + \frac{\partial v_G}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \theta_y + \frac{\partial w_G}{\partial x} + y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{cases}$$

Les autres déformations sont supposées nulles.  $\varepsilon_{xx}(G)$  est la déformation axiale de la poutre due à l'effort normal,  $\chi_y$  et  $\chi_z$  sont les courbures dues aux moments de flexion,  $\theta_x$  est la composante de torsion autour de l'axe neutre de la poutre.  $\theta_y$  et  $\theta_z$  sont les rotations de la section autour des axes propres  $y$  et  $z$ . Ces relations sont valables que les poutres soient déformables ou non à l'effort tranchant. Les programmes offrent souvent la possibilité de définir des poutres de caractéristiques variables tant en section qu'en inertie. Or, sur un élément, le matériau est constant, les déformations et les courbures aussi. Les énergies de traction et de flexion dans un plan sont discrétisées sous la forme

$$\int_0^L ES\varepsilon^2 dx = E\varepsilon^2 \int_0^L S dx \quad \int_0^L EI\chi^2 dx = E\chi^2 \int_0^L I dx$$

Globalement sur l'élément, tout se passe comme si on avait introduit la section moyenne sur l'élément ou l'inertie moyenne sur l'élément, ce qui est fait dans certains codes de calcul. Si c'est le cas, plutôt que de définir des éléments de caractéristiques variables, il est préférable de discrétiser la membrure en éléments de caractéristiques constantes (Figure 10.5).

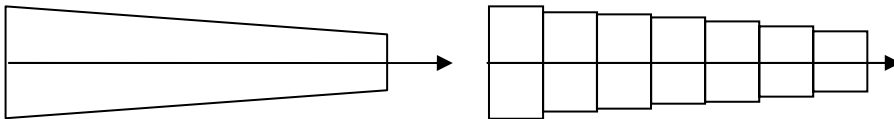


Figure 10.5 : Poutre de propriétés variables

Si la solution théorique est implantée dans le code, il n'est pas nécessaire de raffiner le maillage même lorsque les propriétés sont variables. Pour savoir si les propriétés variables sont effectivement prises en compte, ou si les données ne servent qu'à calculer les propriétés moyennes sur l'élément, il suffit de faire le test suivant. On calcule les déplacements et contraintes dans une poutre de

section constante  $2S$ , encastree à une extrémité et soumise à un effort tranchant sur l'autre. Puis on fait un calcul avec pour cette poutre, une section  $3S$  à l'encastrement et  $S$  à l'autre extrémité. Il n'y a qu'à comparer les résultats.

### 10.3. ÉLÉMENT FINI DE POUTRE DE BERNOUILLI

Pour cet élément de poutre, les déformations de la section dues à l'effort tranchant ne sont pas prises en compte : sous charge, une section droite reste plane et orthogonale à la fibre neutre (Figure 10.6). L'**hypothèse de Bernoulli**, valable pour des poutres dont l'élancement est supérieur ou égal à 20, est analogue à celle de Kirchhoff pour la théorie des plaques, et elle se traduit mathématiquement par les relations  $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ . Les rotations des sections sont alors les dérivées premières des déplacements, qui sont donc les seules vraies inconnues du problème. La continuité des déplacements et des rotations aux nœuds impose des fonctions de forme qui sont au moins de classe  $C^1$ .

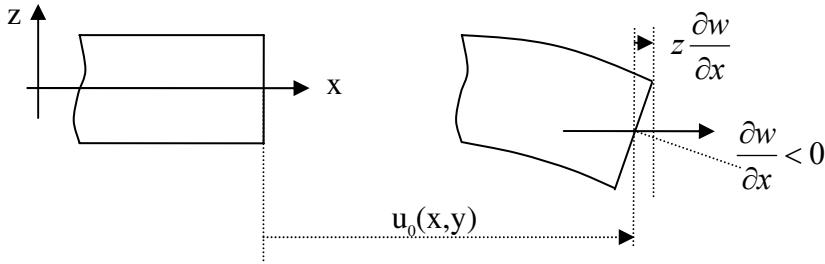


Figure 10.6 : Hypothèse cinématique de Bernoulli

Dans un plan d'inertie principale, une poutre possède quatre degrés de liberté pour la flexion : le déplacement transversal et la rotation de la section à chaque extrémité de l'élément. Pour des éléments iso-paramétriques, les polynômes d'Hermite permettent de déterminer les fonctions de forme associées à ces quatre connecteurs.

$$w(s) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 \theta_1 + N_4 \theta_2 = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad L = x_2 - x_1$$

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \quad N_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)$$

$$N_3(\xi) = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi) \quad N_4(\xi) = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi)$$

Pour une poutre de section constante encastree à une extrémité et soumise à un effort tranchant ponctuel sur l'autre, la solution analytique est une fonction du

troisième degré. Or avec quatre degrés de liberté dans le plan de flexion, le champ de déplacement est du troisième degré donc les résultats obtenus (flèche, éléments de réduction) sont exacts avec un seul élément fini ; raffiner le modèle en augmentant la discrétisation n'améliore pas la précision des résultats. La solution analytique sous chargement réparti est une fonction du quatrième degré, donc l'élément ne donne pas la solution exacte le long de la fibre neutre. Cependant, une charge répartie sur un élément est toujours transformée en charge nodale énergétiquement équivalente, charge telle que le travail des charges réelles soit égale au travail des charges discrètes. Sous l'action de ces forces et moments ponctuels équivalents, il en résulte que les déplacements et rotations des extrémités sont exacts : décomposer une membrure en plusieurs éléments de poutre n'améliore pas la précision.

En torsion, la rotation est du premier degré : la poutre fournit la solution analytique car le champ de rotation  $\theta_x$ , discrétisé par les deux degrés de liberté  $\theta_{x1}$  et  $\theta_{x2}$  aux extrémités de l'élément, est exact. Ce résultat n'est vraiment rigoureux que si la torsion est découplée (**théorie de Navier**), c'est à dire si toute section droite reste plane après déformation : ce n'est vrai que pour les poutres de section circulaire. Sauf mention explicite, cette théorie est généralement étendue à tous les profils dans les logiciels de calcul. En traction-compression, le déplacement axial est du premier degré : la poutre fournit la solution analytique. Le champ de déplacement est discrétisé par les deux degrés de liberté  $u_1$  et  $u_2$  aux extrémités de l'élément.

Avec les hypothèses classiques, ces quatre sollicitations mécaniques sont complètement découplées en mécanique linéaire. En particulier, un chargement transversal n'engendre sur une poutre que des déplacements transversaux. La solution numérique obtenue avec ce type d'éléments s'écarte de la solution réelle lorsque l'élancement de la poutre diminue : la déformation à l'effort tranchant est négligée alors qu'elle devient physiquement non négligeable. La poutre est trop raide, les déplacements calculés sont sous-estimés.

## 10.4. ÉLÉMENT FINI DE POUTRE DE TIMOSHENKO

Cette théorie traduit bien le comportement d'une poutre lorsque le rapport longueur sur diamètre équivalent est compris entre dix et vingt. Il est possible d'aller en deçà de dix ou au-delà de vingt, mais au détriment de la précision sur la solution. La déformation des sections droites à l'effort tranchant est prise en compte. On admet que toute section droite reste plane mais non perpendiculaire à la fibre neutre après déformation. La rotation de section n'est pas égale à la pente, qui elle n'est autre que la dérivée première du déplacement transversal. Dans cette formulation, la connaissance du champ de déplacement ne permet pas à elle seule la résolution du problème : il faut également déterminer les

rotations de section. La continuité des déplacements et des rotations aux nœuds impose des fonctions de forme qui ne sont que de classe  $C^0$ . On utilise souvent des approximations linéaires pour les deux champs :

$$\begin{cases} w(\xi) = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)w_1 + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)w_2 \\ \theta(\xi) = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)\theta_1 + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)\theta_2 \end{cases}$$

Les degrés de liberté sont analogues à ceux définis pour les poutres élancées : les translations et les rotations des sections extrêmes. Tous les termes sont pris en compte dans l'expression de l'énergie de déformation, l'effort tranchant appliqué aux nœuds intervient explicitement par le cisaillement  $\gamma$  qui en résulte.

$$U = \frac{1}{2} \int_L ES \varepsilon_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_L EI \chi^2 dx + \frac{1}{2} \int_L GS^* \gamma^2 dx$$

On peut calculer analytiquement la matrice de raideur d'un tel élément qui converge vers celle d'un élément de poutre élancée lorsque la poutre le devient physiquement. Mais en pratique, les éléments finis sont numériquement intégrés. Avec une intégration exacte des termes de cisaillement, la matrice calculée correspond exactement à celle de la R.D.M. mais lorsque l'élancement de la poutre augmente, son comportement est conditionné par le cisaillement alors que celui-ci devient physiquement négligeable : c'est le **blocage en cisaillement**.

Pour une même poutre physique, les résultats obtenus avec un élément de Bernouilli et un élément de Timoshenko sont différents. La poutre de Bernouilli est plus souple que celle de Timoshenko et fournit un déplacement plus important sous la même charge. En terme de raideur, on peut illustrer la différence de comportement en disant que la contrainte qui maintient la section droite reste perpendiculaire à la fibre neutre n'existe pas donc l'élément est moins raide. En terme de déplacement, on peut illustrer la différence de comportement en disant que l'on ajoute au déplacement dû au moment créé par l'effort tranchant le déplacement dû à l'effort tranchant lui-même.

## 10.5. ÉLÉMENT FINI DE POUTRE « UNIVERSELLE »

L'intégration réduite des termes de cisaillement permet de lever le problème du blocage en cisaillement mais donne, pour une poutre console modélisée par un seul élément fini, une flèche de

$$w(L) = \frac{pL}{GS^*} + \frac{pL^3}{4EI} \quad \text{au lieu de} \quad w(L) = \frac{pL}{GS^*} + \frac{pL^3}{3EI}$$

La **correction de flexibilité résiduelle** est une amélioration permettant de garantir une solution exacte même avec un seul élément en prenant pour le cisaillement non pas  $1/GS^*$  mais

$$\left[ \frac{1}{GS^*} + \frac{L^2}{12EI} \right]$$

Cette correction, systématique, est continue. Il n'y a pas de test sur l'élancement de l'élément pour passer d'une théorie à l'autre, ce qui entraînerait un saut de la solution. Dans les limites des hypothèses préalables, cette **poutre** est « **universelle** » car il n'est pas nécessaire de choisir, pour chaque poutre du modèle, à quelle famille elle appartient : elle fournit la solution R.D.M. quel que soit son élancement (Figure 10.7). Cette poutre est implantée dans la plupart des grands codes de calcul. Pour le contrôler, il suffit de faire le test suivant. On calcule les déplacements et contraintes dans une poutre dont l'élancement est supérieur à 20, de section constante, encastree à une extrémité et soumise à un effort tranchant sur l'autre. Puis on fait un calcul avec différents élancements (diminution de la longueur ou augmentation des dimensions de la section) et on compare les résultats aux solutions analytiques.

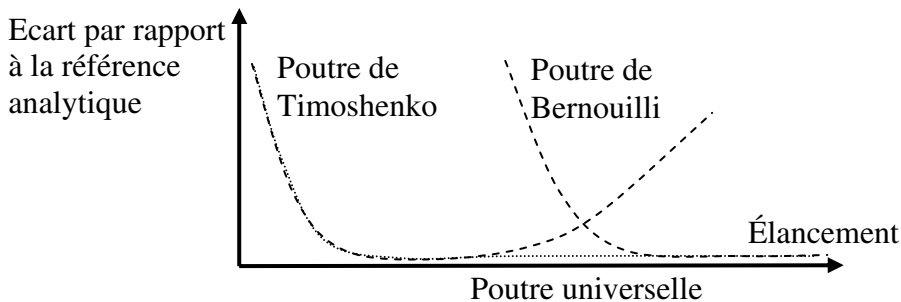


Figure 10.7 : Comportement des différentes poutres

## 10.6. MODÉLISATION

La poutre définie par ses deux extrémités étant un élément exact en statique, il peut être inutile de raffiner les maillages puisqu'un seul élément par tronçon (au sens RDM) est suffisant pour avoir la solution analytique, quelle que soit la nature de la charge.

Si la fibre de neutre d'une poutre est connectée à un élément du second degré, par exemple pour modéliser un raidisseur, elle doit elle-aussi être du second degré pour garantir la continuité du champ de déplacement. La modélisation d'une poutre courbe dépend du logiciel. Dans certains programmes, il existe des éléments de poutre ayant un nœud milieu (« second degré ») avec lesquels un maillage relativement grossier peut approcher la géométrie réelle. Si ces éléments n'existent pas, il faut mailler plus finement avec des éléments rectilignes.

Deux éléments de poutre connectés en un nœud sont de fait encastrés l'un sur l'autre car les degrés de liberté au nœud de raccord sont communs aux deux éléments : il y a continuité des déplacements mais aussi conservation de l'angle entre les deux éléments. Si ce n'est physiquement pas le cas (charnière ou rotule par exemple), il faut soit deux nœuds initialement indépendants dont certains degrés de liberté sont liés dans un système d'axes adéquat, soit la possibilité de relaxer un ou plusieurs degrés de liberté sur le nœud commun (**pin-flag**)(Figure 10.8). Si l'articulation a une rigidité non nulle, il faut soit mettre des éléments de raideur entre les degrés de liberté des nœuds concernés, soit donner la raideur sur le degré de liberté relaxé.



Figure 10.8 : Liaison complète ou partielle de poutres

Lorsqu'une poutre sert de raidisseur à une coque, se pose le problème de la position relative de la coque et de la poutre. Si les éléments ne sont pas liés, la raideur après assemblage n'est pas la raideur de la structure. Quand la fibre neutre de la poutre n'est pas dans le feuillet moyen de la coque, il est possible de définir un corps rigide pour chaque couple nœud de poutre-nœud de coque, le corps rigide traduisant l'hypothèse d'indéformabilité de la section droite d'une poutre. C'est très fastidieux en termes de mise en données (Figure 10.9). La technique la plus efficace consiste à positionner la fibre neutre du raidisseur dans le feuillet moyen : il a connexion naturelle des éléments puisqu'ils ont les mêmes nœuds pour les définir (Figure 10.10). On introduit ensuite un **offset** des poutres, ce qui permet au programme de calculer l'augmentation de raideur due à l'**excentrement** des poutres physiques (théorème de Huygens), comme si elles étaient bien positionnées. Cet offset est défini dans le repère propre des éléments, c'est la distance entre la fibre neutre du modèle et la position réelle de la fibre neutre dans la structure. Dans les assemblages spatiaux de poutres, il

n'est pas souhaitable de recourir systématiquement à l'offset. Il est parfois mieux de définir les fibres neutres des poutres à leur véritable position, et d'introduire les quelques corps rigides nécessaires pour les relier (figure 10.11).

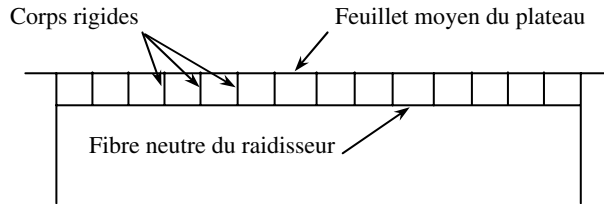


Figure 10.9 : Liaison par corps rigides

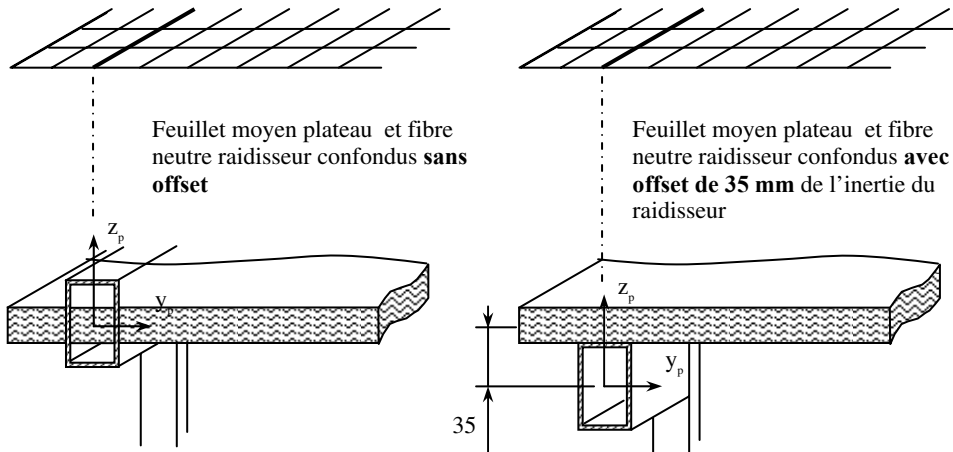


Figure 10.10 : Offset des poutres

## 10.7. POST-TRAITEMENT

Les composantes des déplacements et des réactions sont données en axes structuraux. Les éléments de réduction ( $M$ ,  $N$ ,  $T$ ) aux nœuds sont exprimés conventionnellement pour chaque élément dans son repère propre. Si seules les propriétés équivalentes de la section des poutres, ainsi que les couples de coordonnées de points caractéristiques de la section droite  $y$  et  $z$  (dans les axes principaux liés à la section droite) ont été fournies au programme, la contrainte axiale en ces points, par définition exprimée dans le repère propre de l'élément, est calculée par la relation



$$|\sigma_a| = \left| \frac{N}{S} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \right|$$

La distribution de la contrainte de cisaillement dépend de la forme de la section et il n'existe pas de formule simple comme précédemment pour la calculer à partir des éléments de réduction aux nœuds. La contrainte équivalente de Von-Mises est alors approchée par la valeur absolue de la contrainte axiale.

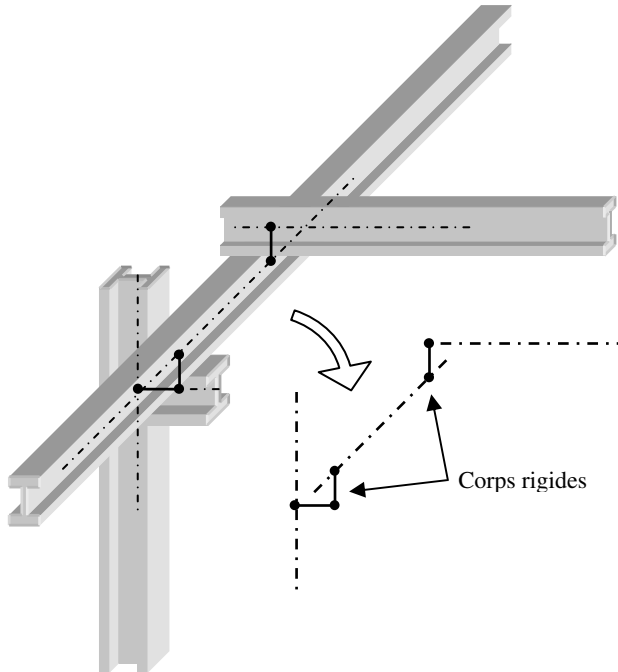


Figure 10.11 : Treillis spatial et raccord des fibres neutres par corps rigides

Si la géométrie du profil et ses dimensions ont été définies à partir de la bibliothèque des profils du logiciel, ce dernier peut calculer en un certain nombre de points caractéristiques dépendant de la géométrie la contrainte axiale, la contrainte tangentielle et la contrainte équivalente. La solution de référence pour une poutre est généralement obtenue avec des poutres de Bernouilli. C'est la raison pour laquelle un écart peut être constaté entre la solution proposée et la solution obtenue, alors que la poutre est en statique un élément exact. En effet, dans le cas d'une poutre universelle, même si la contribution du cisaillement est faible car la poutre est physiquement élancée, cette contribution est prise en compte dans l'élément et pas dans la référence.

# Chapitre 11

## Éléments de volume

### 11.1. GÉNÉRALITÉS

Lorsque toutes les dimensions sont globalement du même ordre de grandeur, ou que l'on souhaite des résultats locaux précis, il n'est plus possible d'utiliser des éléments de topologie 1D (barres ou poutres) ou de topologie 2D (membranes ou coques). Un élément fini de volume est un élément à définition volumique, dont la géométrie tridimensionnelle est explicitement décrite. On l'utilise pour la modélisation des pièces massives, des parties massives d'une structure ou des zones dans lesquelles les résultats souhaités ne permettent pas l'utilisation d'autres éléments. Il n'y a pas de structuration a priori des champs de contraintes ou de déformations, c'est de l'élasticité tridimensionnelle. Les tenseurs ont six composantes, les vecteurs trois. Vu l'évolution des programmes de maillage automatique, la puissance des machines actuelles et la capacité des disques, l'utilisation de ce type d'éléments est de plus en plus fréquente.

### 11.2. ÉLÉMENTS FINIS DE VOLUME

Il en existe de plusieurs formes : hexaèdres, prismes et tétraèdres (Figure 11.1).

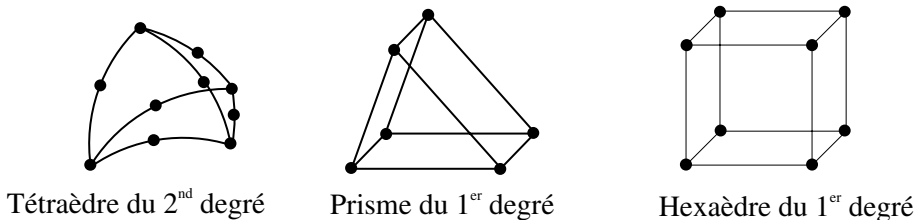


Figure 11.1 : Eléments finis de volume

Ces éléments peuvent être du premier degré, donc à bords rectilignes, ou de degré deux, à bords rectilignes ou non. Chaque nœud sommet, et chaque nœud milieu s'il existe, possède trois degrés de liberté de translation dans les trois directions de l'espace, notés  $u$ ,  $v$  et  $w$ , tous alimentés en raideur. Il n'y a pas de degrés de liberté de rotation définis aux nœuds d'un élément volumique. Le terme DDLNAR est systématiquement nul, ce qui élimine une source possible de pivots nuls (cf. paragraphe 5.3.2). Quand la génération de ces éléments peut se faire par extrusion globale ou locale à partir d'une géométrie surfacique, les éléments sont des prismes, issus de triangles ou des hexaèdres issus des quadrangles. Dans le cas de pièces pour lesquelles l'extrusion n'est pas possible, il existe deux techniques de maillage automatique : le maillage réglé 3D ou le maillage libre 3D. Réaliser un maillage réglé est contraignant car il est nécessaire de découper la structure en blocs de forme simple et d'imposer un nombre de nœuds adéquats sur chaque arête. En contrepartie, le nombre d'éléments et leur qualité sont maîtrisés. Selon que le mailleur réglé 3D accepte ou non certaines dégénérescences, les éléments générés sont des hexaèdres, des prismes voire des tétraèdres. Les mailleurs libres 3D génèrent des tétraèdres et permettent de remplir n'importe quel volume, sans aucune des contraintes imposées par la technique de maillage réglé. Il en résulte un gain de temps précieux pendant la phase de maillage qui est de loin la plus coûteuse dans une étude industrielle. Cependant, s'il est facile de contrôler la qualité des éléments surfaciques générés par des mailleurs automatiques 2D ou 3D surfaciques, il est plus difficile de contrôler la qualité des mailles générées à l'intérieur des volumes bien qu'un certain nombre de tests basés sur des critères géométriques soient généralement disponibles en pré-traitement. Il n'existe pas d'algorithme permettant de regrouper plusieurs tétraèdres en un hexaèdre, équivalent à la recombinaison de triangles en quadrangles pour les maillages surfaciques. La théorie montre qu'il n'est pas possible de raccorder correctement des éléments hexaédriques et des éléments tétraédriques, même au premier degré et même si les nœuds sommets des éléments sont en coïncidence car le champ de déplacement n'est pas continu à l'interface.

Les **tétraèdres**, basés sur une formulation triangulaire, sont trop raides au premier degré et la contrainte (composante, composante principale, équivalente) est uniforme dans l'élément. Cela interdit donc l'interprétation des contraintes extrapolées non lissées. Au second degré, les tétraèdres donnent des résultats acceptables mais le maillage doit être dense. Le système matriciel est de grande taille, les ressources informatiques nécessaires et les temps de calcul sont importants. Il n'est pas rare de voir des structures maillées avec des éléments tétraédriques par un simple clic dans un menu déroulant, à partir d'un fichier CAO. Beaucoup considèrent que préparer une géométrie et l'adapter pour la mailler est une opération sans valeur ajoutée, non rentable en bureau d'études. De tels maillages conduisent souvent à des champs de contraintes qui

comportent des sur-contraintes purement numériques, conduisant à un surdimensionnement des structures (encore moins rentable...), ou à une sous-estimation de la contrainte maximale par un post-traitement de contraintes moyennes lissées. La taille des modèles peut être telle que malgré la puissance des ordinateurs, l'optimisation n'est pas envisageable faute des ressources informatiques. Ce n'est pas le tétraèdre qu'il faut craindre dans une modélisation, mais l'utilisation qui peut en être faite.

L'**hexaèdre** du second degré est topologiquement défini par 20 nœuds (8 nœuds sommets et 12 nœuds milieux). Il a 60 degrés de liberté. Il permet la prise en compte des courbures. Etant coûteux, il faut être attentif à la densité de maillage pour que les ressources informatiques et les temps de calcul restent raisonnables, surtout si le modèle est appelé à être utilisé dans une étude paramétrique ou un processus d'optimisation. Lorsque  $2 \times 2 \times 2$  points de Gauss sont utilisés pour évaluer numériquement la matrice de raideur de l'élément, des **modes cinématiques parasites** peuvent apparaître (Figure 11.2). Il faut alors soit découper les éléments pour qu'ils ne soient plus isolés, soit augmenter le nombre de points d'intégration et revenir à  $3 \times 3 \times 3$  points de Gauss. C'est le cas à connaître qui conduit à un terme MCP non nul dans la formule donnant le nombre de pivots nuls (cf. paragraphe 5.3.2).



Figure 11.2 : Exemple de mode cinématique parasite

Dans sa version classique, l'hexaèdre du premier degré est topologiquement défini par ses huit nœuds sommets. Il a 24 degrés de liberté,  $2 \times 2 \times 2$  points de Gauss sont utilisés pour évaluer numériquement sa matrice de raideur. Il a une bonne raideur en traction-compression, mais il est trop raide en flexion et présente le problème de **blocage en cisaillement** (cf. paragraphe 8.2). Bien que de degré 1, le champ de contrainte dans l'élément n'est pas uniforme (cf. paragraphe 8.3), et le post-traitement des contraintes extrapolées non lissées permet l'analyse de la solution. Dans une version plus élaborée, l'hexaèdre du premier degré, topologiquement défini par ses huit nœuds sommets, a 33 degrés de liberté : les trois translations de ses huit sommets et 9 modes incompatibles. Cela lui confère la qualité d'un élément de degré 2 à bords droits, que ce soit en termes de déplacement ou de contraintes, alors qu'il n'a que 33 degrés de liberté au lieu de 60.

Outre la topologie, il faut obligatoirement fournir à un programme d'analyse linéaire le module de Young et coefficient de Poisson. Certaines données matérielles comme la masse volumique du matériau ou son coefficient de dilatation thermique ne sont nécessaires que pour certains types de calcul. Le volume de l'élément étant explicitement décrit, il n'y a aucune caractéristique physique à lui affecter (section, inertie, épaisseur,...). En post-traitement, outre les déplacements et les réactions exprimés dans le repère structural, on a accès au tenseur des contraintes en chaque point d'intégration. On peut en extraire une composante, une composante principale, une contrainte équivalente, puis afficher ces grandeurs en valeurs moyennes ou extrapolées, lissées ou non lissées.

### 11.3. ÉLANCEMENT

Soit une structure de dimensions  $300 \times 200 \times 1$  mm, soumise à une charge de traction uniforme dans son plan. La solution calculée est correcte qu'il y ait  $3 \times 2$  éléments de membrane,  $300 \times 200$  éléments ou même  $3000 \times 2000$  éléments. Or pour ce dernier cas, chaque élément de membrane a pour dimension  $0.1 \times 0.1 \times 1$  : il n'est plus mince ! Chaque élément ayant les hypothèses d'une membrane, l'assemblage de tous les éléments du maillage ne peut avoir qu'un comportement de membrane : pour les membranes, c'est l'**élancement** de la structure qui importe et pas l'élancement d'un élément du maillage, l'élancement étant le rapport entre la plus grande et la plus petite arête de l'élément. Pour les membranes, il s'agit du rapport entre le plus grand et le plus petit coté de l'élément dans son plan.

Le raisonnement est complètement différent pour les éléments de volume : chaque hexaèdre doit avoir l'allure d'un hexaèdre. Il ne doit pas être trop allongé (frite) ni trop aplati (galette) : il y a risque de mauvais conditionnement numérique de l'élément si ses dimensions sont trop disparates. Pour les volumes, c'est l'élancement de l'élément qui importe, sachant que l'élancement de la structure a déjà conduit à ce type d'élément.

### 11.4. CONTRAINTES DE PEAU

Les contraintes maximales sont situées sur les surfaces enveloppes des structures. Or les contraintes sont évaluées aux points d'intégration qui sont à l'intérieur des éléments de volume. Le calcul des **contraintes de peau** sur les volumes pose donc un certain nombre de problèmes. La contrainte moyenne sur l'élément, qu'elle soit équivalente, principale ou autre, ne représente fidèlement la contrainte de peau que si le volume a une épaisseur tendant vers zéro, ce qui risque de conduire au mauvais conditionnement numérique des éléments volumiques. Les points d'intégration sont situés à au moins deux niveaux dans

l'élément et le tenseur calculé a six composantes en chaque point d'intégration. Or dans la peau, trois composantes de la contrainte sont a priori nulles et rien ne permet d'affirmer que ces trois composantes ont une valeur extrapolée nulle sur la peau. Les contraintes extrapolées à partir des valeurs aux points d'intégration d'un élément volumique ne reflètent donc pas les contraintes de peau. Pour y accéder, il faut plaquer des membranes sur les faces externes de la structure : les membranes sont sur la peau de la structure, leurs points d'intégration y sont donc naturellement, et le tenseur des contraintes dans une membrane n'a au plus que trois composantes non nulles. Ces membranes tridimensionnelles sont particulières, elles épousent la forme du volume sur lequel elles sont plaquées : elles ne sont donc pas nécessairement planes. Les membranes forment en pratique une couche mince déposée sur la structure pour y lire les contraintes. Elles doivent être suffisamment minces pour que leur raideur ne modifie pas la raideur réelle de la structure. Les membranes travaillant en déplacement imposé par le volume sur lequel elles sont plaquées, les trois composantes de la déformation dans la membrane sont indépendantes de son épaisseur. Il est nécessaire que le matériau constitutif d'un élément de membrane soit le même que celui de l'élément de volume sur lequel il est plaqué pour que le produit  $\mathbf{H}\mathbf{e}$  donne la contrainte de peau cherchée. Cette méthode n'est pas utilisable dans les zones où existe une charge orthogonale à l'enveloppe (pression par exemple) ou sur lesquelles il existe un contact. Bien que la raideur des membranes soit de plusieurs ordres de grandeur inférieure à celle des volumes puisque leur épaisseur est faible, il n'y a pas de risque de déconditionnement numérique de la matrice de raideur structurale. Les nœuds des membranes sont des nœuds appartenant aux volumes. Lors de l'assemblage, les raideurs sont additionnées et on retrouve celle du volume.

## 11.5. CONTACT ET HEXAÈDRES

Le **contact** sur les faces d'éléments hexaédriques a longtemps posé des problèmes numériques liés aux fonctions d'interpolation de ce type d'élément. Quand une pression uniforme d'intensité  $P$  est appliquée sur la face (carrée pour simplifier) d'aire  $S$  d'un élément de volume du premier degré, la charge nodale énergétiquement équivalente est de  $PS/4$  sur chaque nœud sommet, dans le sens de la charge (Figure 11.3). Cette charge nodale se calcule par intégration sur la face soumise à la pression, à partir des fonctions d'interpolation. Or la version classique de l'élément de volume à huit nœuds est trop raide et il est nécessaire que le maillage soit fin pour une solution de qualité acceptable. Une première alternative consiste à utiliser des éléments du second degré. Pour la même charge appliquée sur la même surface, la charge nodale énergétiquement équivalente est alors complètement différente : on a  $PS/3$  sur chaque nœud milieu, dans le sens de la pression, et  $-PS/12$  sur chaque nœud sommet, dans le sens opposé celui de la pression (Figure 11.4). Les charges nodales sont

discrètes et reflètent la modulation de l'information générée par les fonctions d'interpolation. La charge aux nœuds de coin agit dans le sens opposé à celui de la pression : les forces de contact passent par les côtés et non par les nœuds sommets de l'élément. Les calculs sont donc faux avec ce type d'élément pour les problèmes de contact.

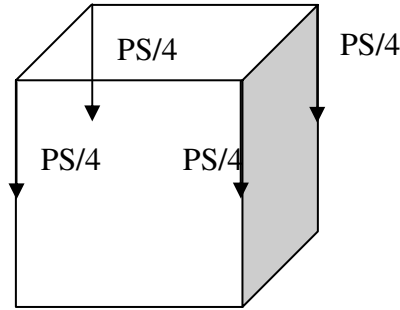


Figure 11.3 : Charge nodale énergétiquement équivalente (1er degré)

Une façon de contourner ce problème est d'utiliser un élément du second degré « hybride ». Lors de la définition des entités susceptibles de rentrer en contact, pour les codes de calcul qui offrent cette possibilité, le programme transforme la formulation de la face de contact et ajoute un 9ème nœud au centre de cette face : la face devient de type « Lagrange », alors qu'elle était de type « Serendip » initialement. L'utilisateur n'a rien à faire, la gestion du nœud supplémentaire est automatique. Lorsqu'une pression uniforme est appliquée sur une face de ce type, toutes les charges aux nœuds vont dans le même sens que la pression et le problème de renversement aux coins de la force de contact ne se pose plus. Les charges nodales sont  $PS/36$  pour les coins,  $PS/9$  pour les bords et  $4PS/9$  pour le nœud au centre de la face de contact (Figure 11.5).

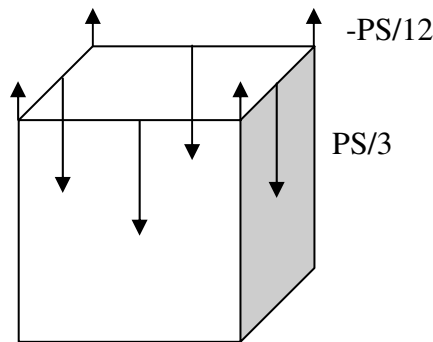


Figure 11.4 : Charge nodale énergétiquement équivalente (2ème degré)

Une autre façon de contourner le problème est d'utiliser la formulation de la brique à huit nœuds avec modes incompatibles. Les quatre charges nodales équivalentes à une pression uniforme appliquée sur une face vont dans le sens de la pression et ne posent pas de problème de renversement, la souplesse de cet élément est presque celle d'un vrai second degré.

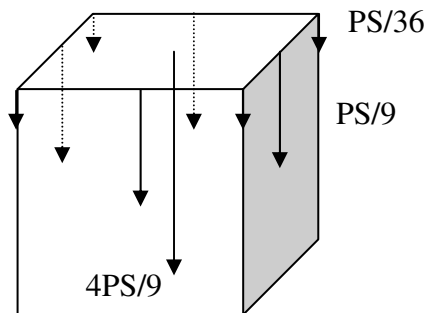


Figure 11.5 : Charge nodale énergétiquement équivalente (2ème degré modifié)

## 11.6. EXEMPLE

Une poutre console en acier ( $E = 200000$  MPa,  $\nu = 0,3$ ), de longueur 0,1 mètre, de section carrée de côté 1 cm, est encastrée d'un coté et soumise à une flexion de l'autre. Un effort tranchant de 25 N est appliqué sur chacun des quatre nœuds de la face sollicitée (Figure 11.6). Cet exemple a pour but de comparer les résultats RDM à ceux d'un modèle volumique en termes de déplacement et de contrainte, et d'illustrer l'influence des conditions aux limites. Avec une approche RDM (poutres), le déplacement de l'extrémité chargée a une amplitude de 0,2 mm, la contrainte axiale varie linéairement avec l'abscisse, est maximale à l'encastrement et y a pour valeur 60 MPa.

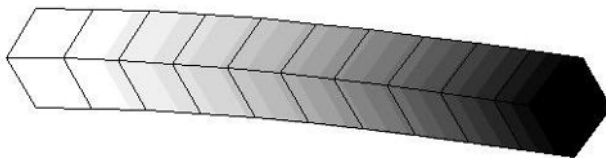


Figure 11.6 : Poutre console, module des déplacements

Le maillage comporte dix éléments hexaédriques du premier degré. Avec des éléments classiques de degré 1, le déplacement est de 0,130 mm. Avec des éléments à modes incompatibles, le déplacement est de 0,199 mm. Avec des éléments du second degré, le déplacement est de 0,198 mm. La contrainte



moyenne dans les éléments est uniforme dans le maillage et a pour valeur 1,729 MPa : du fait de la flexion, une partie de la matière est en traction, l'autre en compression, l'intégrale tend vers zéro (Figure 11.7). La contrainte équivalente extrapolée aux nœuds des volumes ne varie pas linéairement avec l'abscisse : la contrainte à l'encastrement est plus faible que la contrainte dans la couche de nœuds situés derrière. Cela est dû à la position des points d'intégration et au fait que la section extrême est encastree : ses déformations sont nulles, l'effet de Poisson est bloqué par les conditions aux limites (Figure 11.8). Quand on tapisse les volumes de membranes et que l'on y analyse les contraintes équivalentes extrapolées, ces dernières croissent continument de la face libre à la face encastree (Figure 11.9). Leur valeur maximale n'est cependant pas égale à la valeur donnée par la RDM (60 MPa) qui est la contrainte axiale à  $x = 0$ . Il faudrait regarder la contrainte dans la direction axiale en peau : or du fait de l'encastrement, le champ de contrainte au voisinage de la face encastree n'est pas monoaxial. Donc que ce soit dans les membranes de peau ou dans les volumes, on ne retrouve pas la valeur RDM. Les résultats sont comparables mais les différents modèles, construits sur différentes hypothèses, donnent des résultats qui ne peuvent pas être identiques.

1.729	1.729	1.729	1.729	1.729	1.729	1.729	1.729	1.729	1.729
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Figure 11.7 : Poutre console, contrainte moyenne par élément

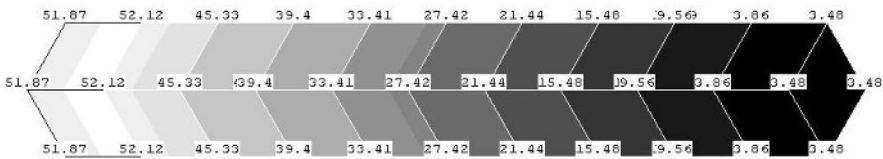


Figure 11.8 : Contrainte équivalente extrapolée en surface des volumes

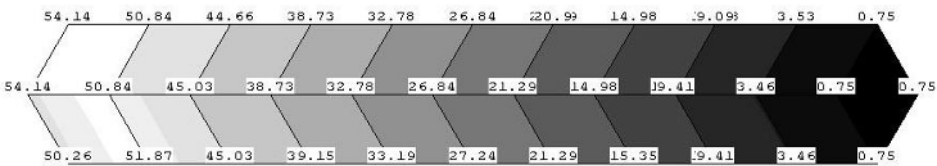


Figure 11.9 : Contrainte équivalente extrapolée dans les membranes de peau

## Chapitre 12

### Éléments axisymétriques

#### 12.1. MODÉLISATION AXISYMÉTRIQUE

Lorsqu'une structure a une géométrie, des chargements, des conditions aux limites qui présentent une symétrie de révolution et que la loi constitutive est indépendante du choix du plan contenant l'axe de révolution de la structure, le **problème** est **axisymétrique** (cf. chapitre 1). Puisque la structure se comporte de la même manière dans tous les demi-plans contenant l'axe de révolution, elle peut être modélisée simplement dans n'importe lequel de ces demi-plans. Par abus de langage, il porte le nom de **plan méridien** (on devrait dire le demi-plan méridien) et le modèle est dit axisymétrique. Par convention, l'axe de révolution est l'axe  $z$ . Par définition,  $r$  étant la **direction radiale** et  $z$  la **direction axiale**, dans le repère  $(r, z)$  attaché au plan méridien, la structure est toujours définie avec  $r \geq 0$ . Le volume de matière associé à un élément est celui d'un tore dont la trace est la section plane dans le plan méridien. La modélisation est donc topologiquement bidimensionnelle, bien que la structure étudiée soit complètement tridimensionnelle. On parle souvent de calcul 2D½. Ce type de modélisation présente deux avantages appréciables : tout d'abord une grande simplification de la définition du modèle liée à une diminution très sensible des données de calcul, ensuite un gain de temps CPU, d'entrées-sorties et d'espace disque puisque l'on résout un problème tri-dimensionnel par un calcul dans le plan méridien.

D'un point de vue purement mathématique, il existe potentiellement dans un modèle axisymétrique deux modes rigides : la translation axiale et la rotation autour de l'axe de révolution. Le déplacement  $u_\theta$  dans la direction circonférentielle n'étant pas défini pour les éléments axisymétriques, puisqu'il est nul par hypothèse, seul le mode de translation axiale peut exister selon les conditions aux limites.

Il n'est pas rare de faire, en pré-dimensionnement, des calculs axisymétriques sur des structures qui ne le sont pas tout à fait, de manière à avoir un ordre de grandeur des déplacements et des contraintes. C'est par exemple le cas de brides, où on remplace la couronne localement percée par un matériau homogène axisymétrique équivalent. Cependant, il faut bien admettre que ce type de modélisation est peu fréquent dans l'industrie pour deux raisons principales. Premièrement, si trois des conditions requises sont souvent satisfaites, il est rare que la charge soit complètement axisymétrique. On peut alors parfois recourir à la technique de Fourier mais elle n'est pas disponible dans tous les logiciels et elle est un peu délicate de mise en œuvre. Deuxièmement, la tendance étant de tout mailler finement en éléments volumiques, cette technique qui permet de réduire les ressources informatiques nécessaires pour une analyse est parfois considérée comme une perte de temps. En effet, à partir d'une CAO volumique, il faut définir l'intersection du volume de la structure et du plan méridien, puis l'isoler pour faire le maillage...

## 12.2. ÉLÉMENTS FINIS AXISYMÉTRIQUES

Quand on étudie la section d'une structure par le plan méridien, trois situations peuvent se produire :

- la structure est massive,
- la structure est élancée,
- la structure comporte des parties massives et des parties élancées.

Il existe dans la plupart des logiciels de calcul une bibliothèque spécialisée comportant divers éléments axisymétriques pour traiter ces situations. Les mailleurs automatiques bi-dimensionnels de tous types peuvent être utilisés pour mailler les parties massives nécessitant des éléments de volumes axisymétriques, les mailleurs linéiques pour mailler les parties élancées qui peuvent être modélisées par des éléments de coques axisymétriques.

### 12.2.1. Volumes axisymétriques

La trace dans le plan méridien d'un **volume torique** est un triangle ou un quadrangle (Figure 12.1). Ces éléments de **volume axisymétrique** sont de degré 1 ou 2. Les triangles du premier degré sont trop raides, il est préférable de les utiliser au second degré. Si les éléments quadrangulaires sont intégrés sélectivement ou s'ils comportent des modes incompatibles, il est possible de les utiliser au premier degré, si la géométrie de la structure s'y prête. Les éléments quadrangulaires classiques sont trop raides au premier degré. Les nœuds, qu'ils soient sommets ou milieux, ont deux degrés de liberté de translation dans le plan méridien, notés  $u_r$  et  $u_z$  : le déplacement radial et le

déplacement axial, tous les deux alimentés en raideur. Il n'y a aucune donnée particulière à définir pour ces éléments.

### 12.2.2. Coques axisymétriques

Dans le plan méridien, la trace d'une surface de révolution est une ligne. Cette ligne représente le feuillet moyen d'un élément de **coque axisymétrique**, rectiligne ou curviligne. Les nœuds, qu'ils soient sommets ou milieux, ont trois degrés de liberté notés  $u_r$ ,  $u_z$  et  $\theta$  respectivement : le déplacement radial, le déplacement axial et la rotation dans le plan méridien, tous les trois alimentés en raideur. Il faut définir l'épaisseur des coques axisymétriques, ce qui correspond à la « largeur du trait » dans le plan méridien.

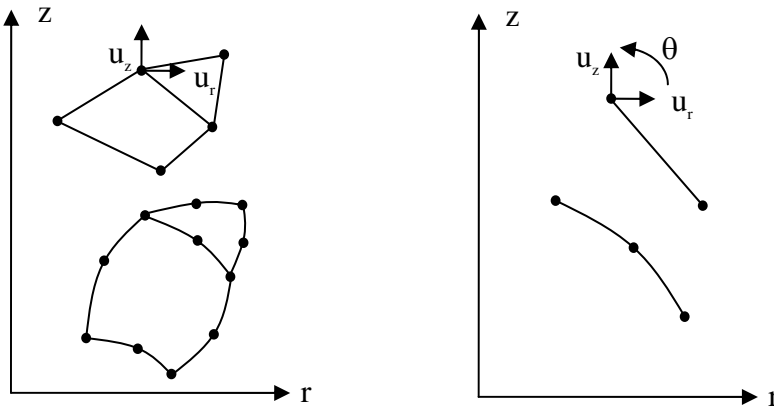


Figure 12.1 : Volumes et coques axisymétriques

### 12.2.3. Autres éléments

Il existe d'autres éléments axisymétriques : les **membranes axisymétriques**, les **poutres axisymétriques** et les **éléments de transition**. La membrane axisymétrique ne travaille qu'en traction-compression dans son feuillet moyen (ligne décrite dans le plan méridien). La poutre axisymétrique, dont la trace dans le plan méridien n'est qu'un point, permet la modélisation de raidisseurs circonférentiels. L'élément de transition est un peu particulier car d'un côté, il a des degrés de liberté de coque, de l'autre, des degrés de liberté de volume. Il permet, dans un même modèle, de raccorder des parties massives modélisées en volume sur des parties élancées modélisées en coques. La zone de transition et sa taille dépendent du choix de l'utilisateur (Figure 12.2).

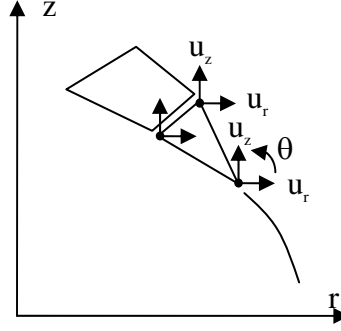


Figure 12.2 : Elément de transition coque-volume axisymétrique

### 12.3. ÉLÉMENT TRIANGULAIRE DU PREMIER DEGRÉ

Soit un élément triangulaire axisymétrique du premier degré dont les nœuds sont numérotés  $i, j$  et  $k$  avec la convention  $i$  inférieur à  $j$  inférieur à  $k$ . Chaque champ de déplacement dans le plan méridien est de la forme :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = a + br + cz \\ u_z(r, z) = d + er + fz \end{cases} \Rightarrow u = PA$$

Tous calculs faits,  $S$  étant la surface du triangle, non nulle si les trois points ne sont pas alignés, on obtient la même expression pour le déplacement  $u_r$  et pour le déplacement  $u_z$  :

$$u_r(r, z) = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} u_1[(r_2 z_3 - r_3 z_2) + r(z_2 - z_3) + z(r_3 - r_2)] \\ -u_2[(r_3 z_1 - r_1 z_3) + r(z_3 - z_1) + z(r_1 - r_3)] \\ +u_3[(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r(z_1 - z_2) + z(r_2 - r_1)] \end{Bmatrix}$$

Soit encore  $u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$  avec  $N_i = \frac{1}{2S} (a_i + b_i r + c_i z)$

$$\begin{cases} a_i = r_j z_k - r_k z_j \\ b_i = z_j - z_k \\ c_i = r_k - r_j \end{cases} \quad i < j < k$$

En appliquant les formules classiques qui, dans le cadre de la mécanique linéaire, expriment les déformations en fonction des déplacements, on obtient :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = Bq$$

En utilisant les formes compactées utilisées pour l'expression des fonctions d'interpolation, les termes de la matrice des déformations sont :

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{1}{2S} b_i \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{2S} c_i \quad \frac{N_i}{r} = \frac{1}{2S} \left( \frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r} \right)$$

La matrice des déformations  $B$  dépend des coordonnées  $r$  et  $z$  du point courant. Les déformations et les contraintes dans l'élément triangulaire axisymétrique du premier degré ne sont pas constantes alors qu'elles l'étaient pour l'élément triangulaire du premier degré en EPC ou EPD. L'expression générale de la matrice de raideur s'applique aux éléments axisymétriques, le volume sur lequel l'intégration est réalisée étant alors le volume du tore dont l'élément est la trace dans le plan méridien.

$$K = \int_0^{2\pi} \int_S B^T(r, z) H B(r, z) r dr d\theta dz = 2\pi \int_S B^T(r, z) H B(r, z) r dr dz$$

Pour évaluer cette intégrale, une première technique consiste à réaliser analytiquement l'intégration. On remarque que les termes diagonaux, qui comportent eux-mêmes plusieurs termes, font apparaître les produits  $B_i B_i$  soit :

$$\int_S \left( \frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r} \right)^2 r dr = \int_S \frac{\alpha}{r} dr + \dots$$

Certains termes de la matrice de raideur comportent des logarithmes. Cela explique la convention selon laquelle les éléments axisymétriques sont toujours définis dans le demi-plan méridien  $r$  positif ou nul. L'intégration analytique donnant les termes en  $\text{Log}(r_i/r_m)$ , si l'élément est à grande distance de l'axe de révolution, le rapport des rayons tend vers 1 et le logarithme est imprécis. Lorsqu'un point touche l'axe de révolution, ce qui arrive fréquemment dans les structures axisymétriques qui sont souvent fermées, il faut évaluer le logarithme de zéro. Pour éviter ces problèmes, la matrice de raideur n'est pas calculée analytiquement.

La seconde méthode consiste à évaluer une matrice  $\bar{B}$  au centre de gravité de l'élément, de coordonnées,  $\bar{r}$  et  $\bar{z}$  et à utiliser une formule approchée :

$$K = 2\pi \bar{B}^T H \bar{B} \bar{r} S$$

Cette intégration à 1 point converge vers la solution exacte si la taille de l'élément tend vers zéro. Cette technique simple donne en général de bons résultats et lève les difficultés rencontrées lors de l'intégration analytique.

La troisième méthode consiste à utiliser les règles classiques d'intégration numérique, en fonction de la topologie de l'élément dont on souhaite calculer la matrice de raideur.

## 12.4. CHARGEMENT D'UN ÉLÉMENT AXISYMÉTRIQUE

Comme un nœud représente en fait le cercle qui y passe, la charge appliquée sur un nœud dans un modèle axisymétrique est la résultante sur la circonférence. Selon les programmes de calcul, on introduit donc sur un nœud soit la charge linéique par radian, soit la charge linéique par unité de longueur de circonférence. Les charges surfaciques et les charges de volume (par exemple la pesanteur) s'introduisent classiquement, le programme calculant lui-même la répartition nodale énergétiquement équivalente. Si  $P$  est l'intensité volumique de la charge de pesanteur, agissant conventionnellement dans la direction axiale, la charge nodale sur un élément triangulaire axisymétrique du premier degré est :

$$\begin{pmatrix} F_{1z} \\ F_{2z} \\ F_{3z} \end{pmatrix} = F_e = \int_V N^T P \cdot dv = \int_0^{2\pi} \int_S N^T P \cdot r dr d\theta dz = 2\pi P \int_S N^T \cdot r dr dz$$

En choisissant le centre de gravité de l'élément comme origine de ses axes, on peut faire un changement de variable et déterminer les charges nodales :

$$\begin{cases} r = \bar{r} + r' \\ z = \bar{z} + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = \frac{2S}{3} = a_j = a_k \\ b_i = b_j = b_k = 0 \\ c_i = c_j = c_k = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{iz} = 2\pi P \int_S \frac{1}{2S} \frac{2S}{3} \bar{r} dr' dz' = 2\pi \bar{r} P \frac{S}{3}$$

## 12.5. PREMIER EXEMPLE

La membrane circulaire, mince, soumise à une pression interne, étudiée dans le chapitre consacré aux éléments de membrane (cf. paragraphe 8.6), peut être

traitée en axisymétrie. Le modèle est très simple : 3 nœuds, 2 éléments de membrane d'épaisseur 1 mm (Figure 12.3). Il n'y a aucune condition de symétrie à imposer, il faut simplement éliminer le mode rigide de translation axiale en bloquant le déplacement axial de l'un des trois nœuds. Une charge nodale est appliquée sur le nœud intérieur, représentant la charge appliquée sur toute la circonférence.

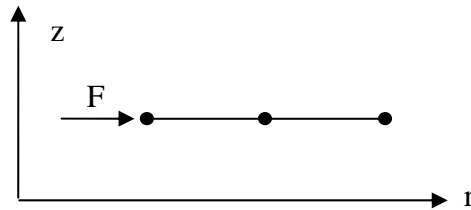


Figure 12.3 : Modèle axisymétrique

Le déplacement radial du nœud intérieur est de 0,2808 mm (0,2810 mm pour la référence), celui du nœud extérieur de 0,1904 mm (0,1905 mm pour la référence). On note sur cet exemple l'intérêt de la modélisation axisymétrique : simplicité du maillage, faible nombre d'éléments et de degrés de liberté.

Dans le fichier de résultat, l'équilibre charge-réaction ne semble être respecté ni sur la composante radiale, ni sur la composante de rotation dans le plan méridien, alors qu'il l'est sur la composante axiale. Dans le cas d'un problème axisymétrique, la charge radiale et le moment éventuellement appliqué sur un nœud de coque sont auto-équilibrés, ils ont une intégrale nulle par intégration sur la circonférence. La réaction radiale a également une résultante nulle sur la circonférence, quelle que soit sa valeur qui n'est pas nécessairement opposée à celle de la charge. La relation d'équilibre est vectorielle et elle est vérifiée pour la structure 3D. C'est le seul cas où on peut avoir l'impression que la charge et la réaction ne sont pas opposées, mais elles le sont bien.

## 12.6. DEUXIÈME EXEMPLE

La structure représentée ci-dessous est une fenêtre d'observation (Figure 12.4). Ce hublot est en béryllium que l'on considère ici comme isotrope. Le module d'élasticité du matériau est de 303400 MPa, son coefficient de Poisson de 0,02 et sa limite élastique de 400 MPa. La pression dans la chambre d'expérience est de 400 bars. On suppose ici qu'elle est uniforme sur toute la zone en trait épais et nulle au-delà. Le montage du hublot dans la paroi de la chambre est tel que l'on puisse considérer que toute la base du hublot est en appui sur un support indéformable. Toutes les conditions nécessaires pour faire un modèle



axisymétrique sont remplies. Le plus grand diamètre du hublot est de 22,2 mm et sa hauteur au centre de 7,35 mm.

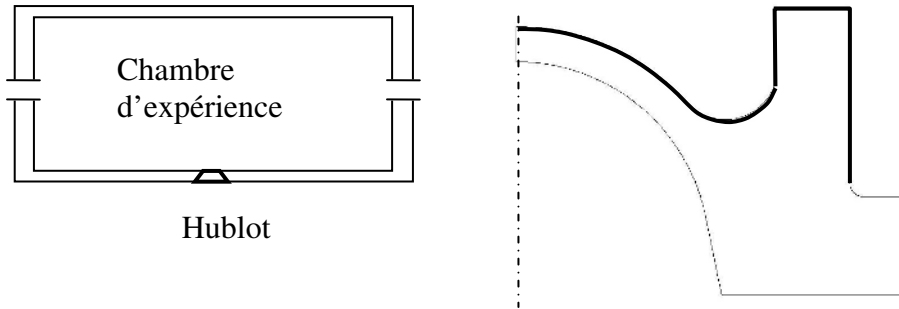


Figure 12.4 : Hublot

La géométrie du hublot dans le plan méridien est découpée afin de pouvoir utiliser un mailleur réglé. Le modèle comporte 1500 éléments de volume axisymétrique de degré 2, soit 9420 degrés de liberté (Figure 12.5). Toute la base est bloquée en translation axiale, tous les nœuds situés sur l'axe de révolution ont un déplacement radial nul en raison de l'axisymétrie.

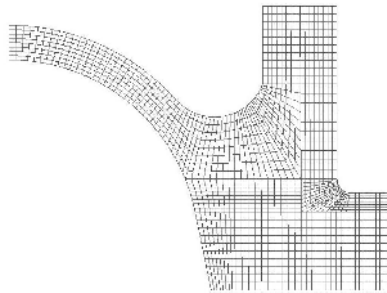


Figure 12.5 : Maillage

L'amplitude maximale du déplacement est de  $5,4 \cdot 10^{-3}$  mm, cohérente avec l'hypothèse de linéarité géométrique (Figure 12.6). Mais l'examen des réactions fait apparaître que sur certains nœuds, la réaction va du nœud vers la fondation : pour que la condition d'appui (bilatérale en analyse linéaire) soit satisfaite, il faut que la fondation retienne la structure. Or ce n'est qu'un appui : le modèle ne traduit pas la physique. Il est donc indispensable d'introduire des conditions de contact pour prendre en compte le décollement, objet du paragraphe 27.2. L'amplitude maximale du déplacement reste de l'ordre de  $5,4 \cdot 10^{-3}$  mm, le décollement se produit à partir d'un rayon de 9,2 mm.

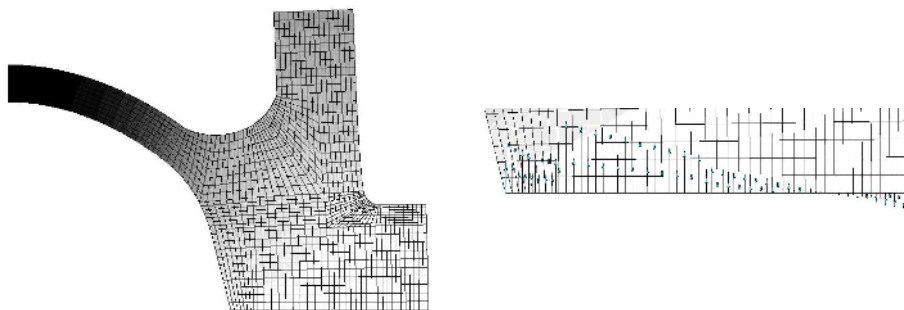


Figure 12.6 : Amplitude des déplacements et zoom sur les réactions

La contrainte équivalente de Von Mises extrapolée aux nœuds a une valeur maximale de 288 MPa (Figure 12.7), inférieure à la limite élastique du matériau. L'hypothèse de linéarité matérielle est validée. Mais la partie centrale du hublot a tendance à se renverser sous l'effet de la pression : il faut vérifier sa tenue en stabilité (objet du paragraphe 26.4) avant de conclure.

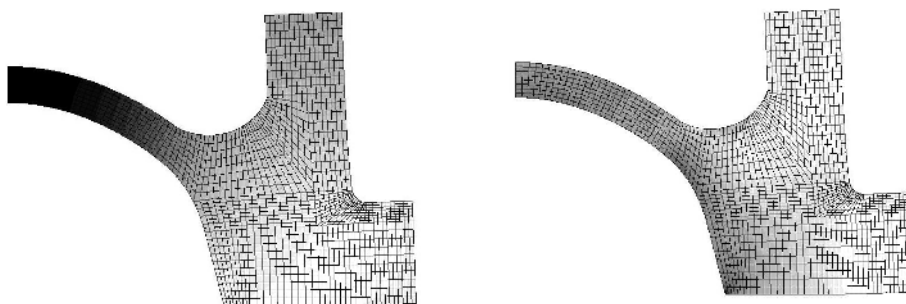


Figure 12.7 : Amplitude des déplacements et contrainte équivalente

Les éléments de volume axisymétriques ont des arêtes dont la taille moyenne est de l'ordre de 0,15 mm. Pour un modèle 3D, les arêtes des volumes devraient être de cet ordre pour que les éléments respectent les critères d'élancement. Le rayon maximal étant de 11 mm, sur un périmètre d'environ 70 mm, il faudrait générer de l'ordre de 700000 éléments volumiques du second degré, soit un modèle comportant 16 200 000 degrés de liberté.



## Chapitre 13

### Raccord d'éléments

#### 13.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Dans de très nombreux modèles industriels coexistent des éléments de coque, de volume et de poutre. La connexion de ces éléments pose généralement des problèmes car ils n'ont pas le même nombre de degrés de liberté aux nœuds : une poutre a 6 degrés de liberté alimentés en raideur sur chaque nœud, une coque 5 ou 6, un volume et une barre 3 seulement. Il est donc évident que la continuité des déplacements et des rotations si elles existent, ne pourra pas toujours être garantie alors que la théorie des éléments finis est basée sur cette continuité. Le but de ce chapitre n'est pas de passer en revue toutes les solutions possibles mais de sensibiliser le lecteur au fait qu'il y a là une difficulté réelle.

Le paragraphe suivant est consacré au **raccord homogène**, le même type d'élément étant situé de part et d'autre de la ligne (ou surface en 3D) de raccord. Les autres paragraphes sont consacrés à des raccords hétérogènes.

#### 13.2. RACCORD HOMOGÈNE

Dans le chapitre 3, on a insisté sur le fait que dans un maillage, un nœud sommet ne se connecte qu'à un nœud sommet, un nœud milieu ne se connecte qu'à un nœud milieu. De part et d'autre d'une ligne (ou d'une surface), il doit y avoir coïncidence des maillages pour garantir la continuité du champ de déplacement et éviter l'**effet boutonnière**. Par exemple, des éléments de degré 1 sont reliés par leurs sommets à des éléments de degré 2 sur la figure 13.1. Quand on souhaite étudier l'influence de quelque chose de local sur la réponse de la structure, il n'est pas toujours possible de mailler très finement toute la structure, faute de ressources informatiques ou en raison d'un temps de calcul prohibitif. Dans le cas d'analyses linéaires, la technique des super-éléments (cf. chapitre 19) peut être une alternative intéressante : on condense la plus grande

partie des degrés de liberté, et il devient possible de mailler finement la zone qui doit l'être. Dans le cas d'analyses non linéaires, analyses qui coûtent beaucoup plus chers que des analyses linéaires, cette technique n'est pas possible puisque la matrice de raideur du super-élément n'est pas actualisée.

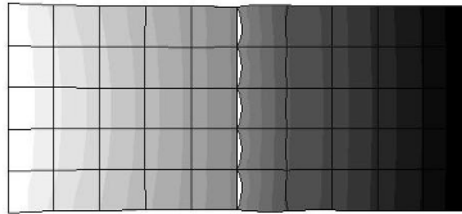


Figure 13.1 : Exemple d'effet boutonnière

Mettre en place dans le maillage une zone de transition pour passer progressivement d'un maillage grossier à un maillage fin, ne présente qu'un intérêt limité. La taille de cette zone est totalement arbitraire, elle contient généralement un grand nombre de degrés de liberté, son influence sur la zone finement maillée est difficile à estimer. Quand une partie de structure est sujette à un grand nombre de modifications, en termes de maillage et/ou en termes de positionnement par rapport au reste de la structure, chaque modification de cette partie entraîne la modification du reste de la structure pour que les nœuds soient toujours en vis-à-vis. Cela peut s'avérer très lourd et fastidieux, et poser le problème de la mauvaise qualité de certains éléments parfois très déformés (Figure 13.2). C'est par exemple le cas du dimensionnement des aubages.

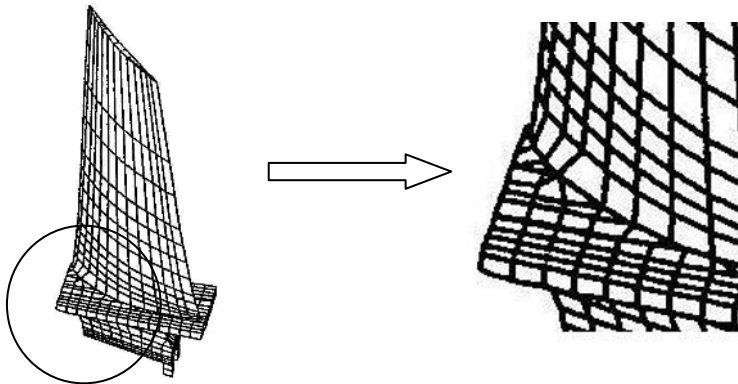


Figure 13.2 : Distorsion de certains éléments pour que les maillages coïncident

Pour faire coexister des zones maillées très finement et des zones maillées grossièrement au sein d'un modèle, la technique la plus efficace consiste à

mailler les zones sans se préoccuper du nombre d'éléments de part et d'autre de la ligne (ou de la surface) de raccord. On impose ensuite des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds situés dans la zone d'incompatibilité. Le côté qui a le moins de degrés de liberté et qui est donc le plus rigide, va imposer le déplacement de l'autre : c'est une technique de collage originale car les nœuds à « coller » ne sont pas superposés. A titre d'exemple, l'abscisse curviligne  $s$  du nœud A est connue dans le repère lié à l'élément en regard, dont l'arête est définie par les nœuds 1 et 2 (Figure 13.3). Si le champ de déplacement est du premier degré, le déplacement du point matériel de cette arête, situé à la distance  $s$  du nœud 1, s'exprime en fonction du déplacement des nœuds 1 et 2 par la relation

$$u(s) = N_1(s)u_1 + N_2(s)u_2$$

On impose au nœud A d'avoir le déplacement du point matériel situé à la même abscisse, sur l'arête en regard, soit

$$u(s_A) = N_1(s_A)u_1 + N_2(s_A)u_2$$

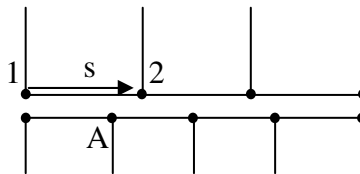


Figure 13.3 : Contrainte cinématique pour assurer le collage

Des relations équivalentes sont écrites automatiquement pour tous les degrés de liberté de tous les nœuds situés du côté le plus souple du raccord. La continuité partielle du champ de déplacement est assurée (Figure 13.4). Les contraintes dans le raccord sont peu fiables puisque les maillages sont incompatibles, mais on peut les analyser à proximité du raccord (théorème de Saint Venant). Cette technique a largement supplanté celle du **zoom structural**.

### 13.3. RACCORD POUTRE-COQUE COPLANAIRES

Dans le cas de poutres utilisées comme raidisseurs sur des panneaux modélisés par des éléments de coque (Figure 13.5), il faut assurer la continuité du déplacement  $v$  de la poutre, qui est du troisième degré, avec le déplacement  $v$  de la partie membranaire de la coque, qui est du premier ou du second degré. Ce point a déjà été abordé dans le chapitre consacré aux éléments de coque.

Un moment  $M_z$  appliqué sur un nœud de la poutre ou créé par un effort tranchant  $T_x$  ne se transmet à la coque que par les déplacements dans le plan des extrémités de la poutre si le degré de liberté  $\phi_z$  n'est pas alimenté en raideur dans la coque. Si  $\phi_z$  est alimenté en raideur, le problème n'est que partiellement résolu car ce degré de liberté est « numérique » et dépend des formulations. En fait, ce type de connexion pose plus de problèmes théoriques que pratiques si le maillage est suffisamment fin.

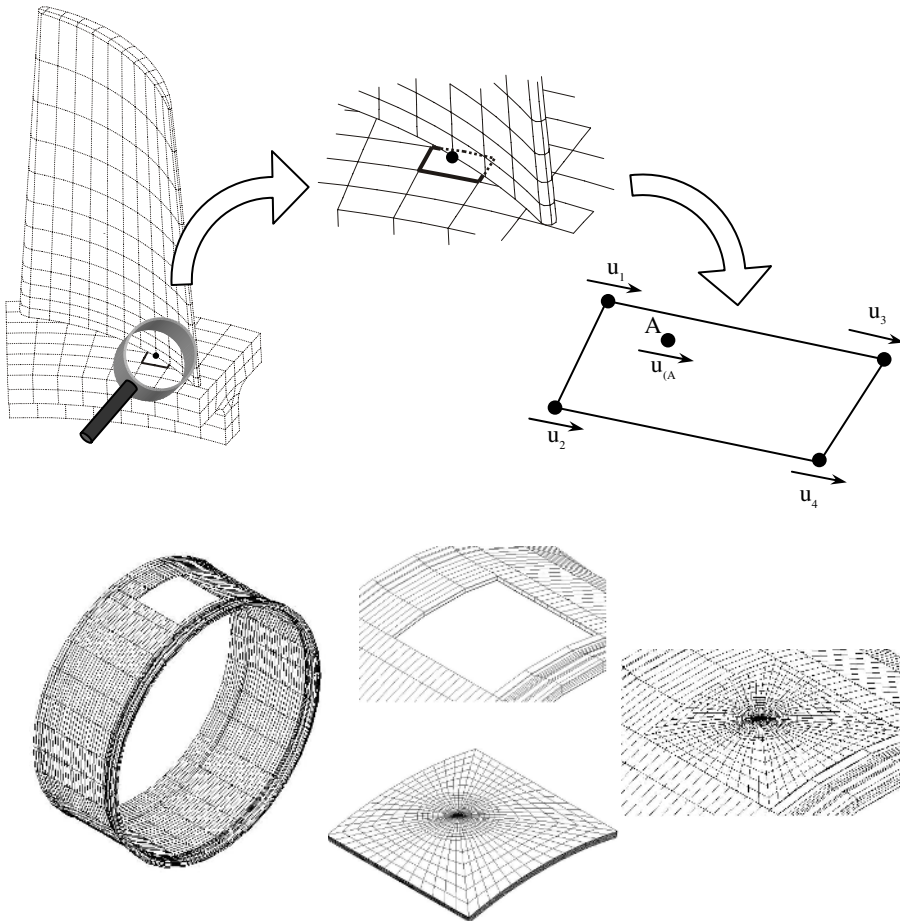


Figure 13.4 : Collage de maillages incompatibles

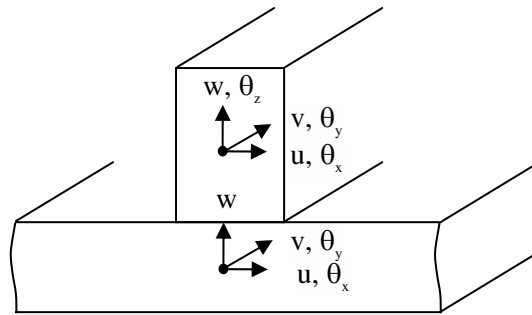


Figure 13.5 : Raccord poutre-coque coplanaires

### 13.4. RACCORD POUTRE-COQUE PERPENDICULAIRES

Ce type de raccord pose clairement le problème de connexion : la torsion de la poutre n'entraîne pas la coque en rotation si son degré de liberté  $\phi_z$  n'est pas alimenté en raideur. Il en résulte l'apparition de pivots nuls lors de la résolution et des résultats sans réalité physique. Si le degré de liberté  $\phi_z$  est alimenté en raideur, le programme ne détecte pas de pivots nuls mais la solution n'est pas pour autant physique car  $\phi_z$  est « numérique » (cf. chapitre 9). On peut choisir de faire un maillage tel que la section réelle de la poutre soit représentée. Le point  $M$  matérialise la trace de l'axe neutre de la poutre dans le plan de la coque,  $n$  nœuds  $E_i$  sont répartis à la périphérie de la trace de la poutre (Figure 13.6). En Résistance Des Matériaux, la section d'une poutre étant supposée indéformable, on définit donc un corps rigide de nœud maître  $M$  et de nœuds esclaves  $E_i$ . La transmission des tous les efforts et moments se fait naturellement mais la préparation de la géométrie pour générer le maillage adapté peut nécessiter beaucoup de temps.

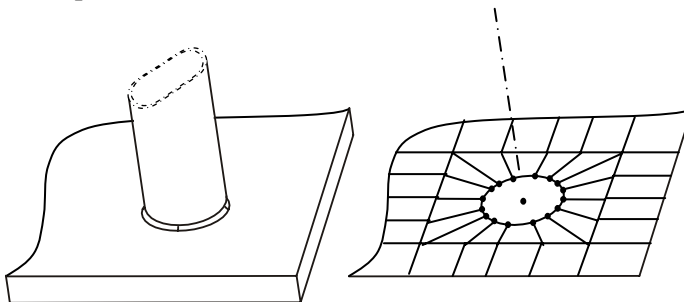


Figure 13.6 : Corps rigide pour simuler le comportement de la section

Dès qu'il s'agit de raccorder une poutre perpendiculairement à une coque, il est fondamental de bien étudier la physique du problème et de bien le poser.



L'idéalisation de la structure qui est faite au travers du modèle de calcul peut introduire des difficultés numériques dues à des simplifications abusives. Si le pied d'une table, perpendiculaire au plateau, est relié à des raidisseurs qui reprennent en flexion la torsion du pied, ils doivent être inclus dans le modèle, au même titre que les éventuels goussets, vis pointeau, goupilles qui empêchent les rotations relatives (Figure 13.7). Sinon, le programme d'analyse détecte des singularités (apparition de pivots nuls) alors que la structure réelle se comporte bien.

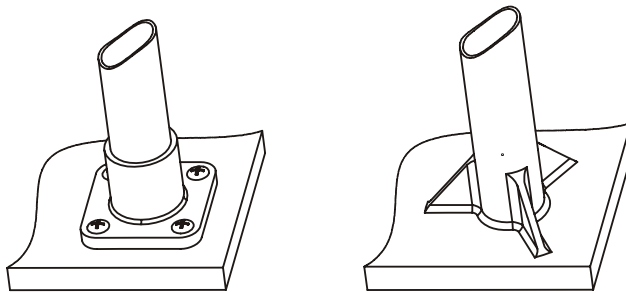


Figure 13.7 : Divers raccords poutre-coque

### 13.5. RACCORD COQUE-VOLUME

Il y a trois degrés de liberté pour un nœud de volume, et six pour un nœud de coque. Les rotations de la coque ne peuvent pas être naturellement reprises par le volume. La ligne AB est l'axe d'une charnière autour duquel la coque pivote librement (Figure 13.8).

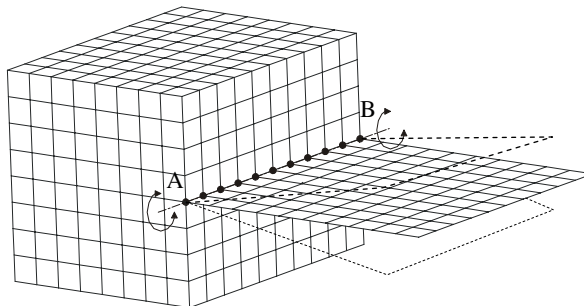


Figure 13.8 : Charnière au raccord coque-volume

Mais en pratique, en imaginant que le feuillet moyen est une tôle très mince, on ne soude pas une tôle très mince sur un massif. La tôle est pliée puis collée ou

vissée dans le massif, pincée entre deux cornières, insérée dans une fente pratiquée dans le massif... Dans tous les cas, l'assemblage fait que le moment agissant au raccord est transformé en couple, c'est à dire en paires de forces agissant selon des sens opposés. Ces forces sont associées à des degrés de liberté de translation, qui eux sont communs au volume et à la coque, la bonne connexion entre éléments est établie. Si la modélisation reproduit les techniques d'assemblage, il n'y a pas de problème de connexion (Figure 13.9).

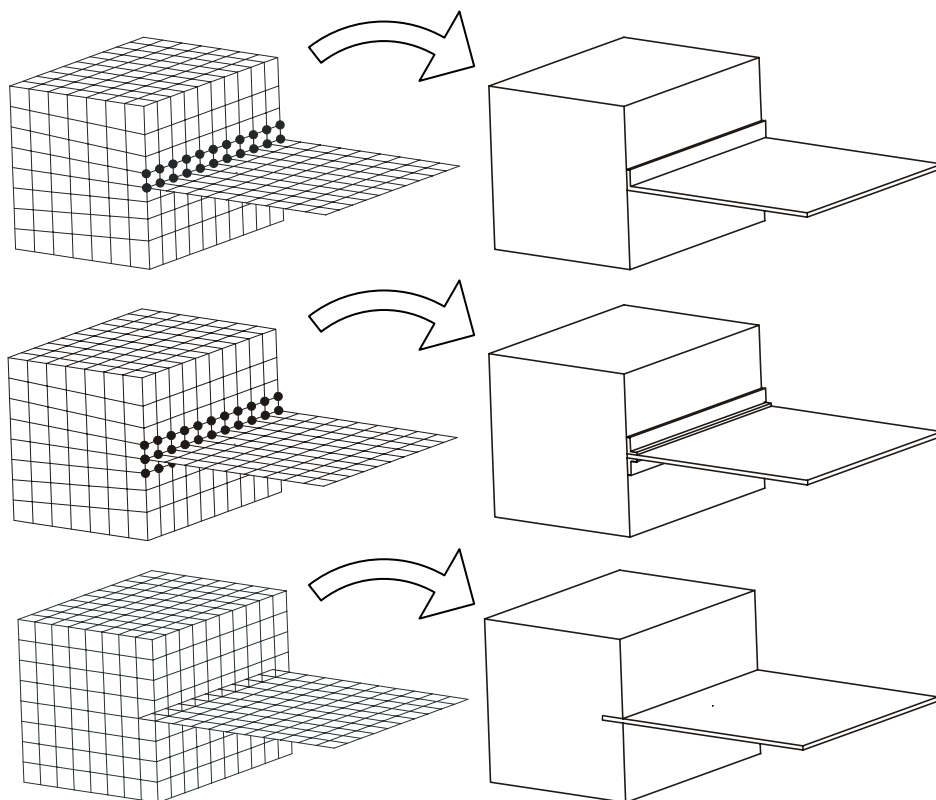


Figure 13.9 : Divers raccords coque-volume

De la même façon, si le raccord volume-poutre reproduit l'assemblage réalisé, il n'y a pas de problème de connexion dans le modèle.



# Chapitre 14

## Effets thermiques

### 14.1. HYPOTHÈSES PRÉLIMINAIRES

Bien que beaucoup de calculs mécaniques aient pour but la prévision de la tenue mécanique des structures, il arrive souvent que l'on s'intéresse à la réponse de structures soumises à des chargements thermiques, éventuellement superposés à des charges mécaniques. Des structures ou certains de leurs composants peuvent subir des ambiances thermiques sévères et variées, tant en amplitude qu'en durée : moteur Vulcain d'Ariane, avion qui passe en quelques minutes de  $-50^{\circ}\text{C}$  en vol à  $+40^{\circ}\text{C}$  sur la piste, tuyauteries ou réservoirs contenant des fluides à basse ou haute température, cycle été-hiver... Dans la plupart des logiciels industriels, la thermique et la mécanique sont découplées, c'est-à-dire qu'elles n'ont pas d'influence mutuelle directe. Ceci impose entre autres que la mise en charge mécanique soit quasi-statique. Les modifications de géométrie sous le chargement mécanique n'ont pas d'influence sur la répartition des températures, les sollicitations thermiques n'ont pas d'influence sur la géométrie.

### 14.2. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

L'influence du champ thermique peut être double. D'une part, les coefficients élastiques des matériaux dépendent de la température, donc la raideur de la structure aussi. En règle générale, les matériaux s'assouplissent quand la température augmente et leur limite élastique diminue. D'autre part, une variation de température produit des déformations thermiques liées à la dilatation des matériaux sous l'effet de la température. Celles-ci peuvent générer des **contraintes d'origine thermique** qui se superposent aux éventuelles contraintes d'origine mécanique : c'est cet aspect que l'on va étudier ici en supposant que le comportement de la structure est linéaire. Lors d'une analyse thermomécanique, on résout donc en premier lieu un problème thermique (transitoire ou stationnaire), la géométrie de la pièce n'étant pas

affectée par le champ de température. Ensuite, de façon tout à fait indépendante, au pas de temps désiré dans le cas d'une analyse transitoire, on injecte dans le calcul mécanique la carte des températures aux nœuds pour déterminer la réponse de la structure. La résolution des problèmes thermiques n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage mais il est important de signaler que si les maillages thermiques et mécaniques ne coïncident pas (les contraintes sur le maillage, imposées en particulier par les conditions aux limites, sont souvent très différentes), il faut disposer d'outils d'interpolation pour attribuer une température à chaque nœud du maillage mécanique.

Suite à la variation de température par rapport à un état de référence où on suppose qu'il n'existe aucune contrainte d'origine thermique, la structure se déforme et change de dimensions. En l'absence de conditions aux limites mécaniques, elle s'allonge généralement si on la chauffe et se raccourcit dans le cas contraire. Les déformations axiales, mesurant des variations relatives de dimensions, sont une fonction linéaire de la variation de température alors que les déformations angulaires, mesurant des variations d'angles, sont nulles : la structure change de dimensions mais pas de forme. Elle n'est le siège d'aucune contrainte : elle change simplement d'état de référence. Le coefficient de proportionnalité traditionnellement noté  $\alpha$  s'appelle le **coefficient de dilatation thermique**, et son unité dans le système SI est le m/m/K. Dans le cas 1D, la déformation axiale est liée à la variation de température par :

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

On généralise cette écriture aux cas 2D et 3D, en définissant le tenseur des coefficients de dilatation thermique. Pour un matériau thermiquement isotrope, ce coefficient est le même dans toutes les directions de l'espace ; pour les autres matériaux, chaque coefficient doit être introduit dans le repère d'orthotropie ou d'anisotropie. Les déformations thermiques s'écrivent dans le repère d'orthotropie

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12})^T = (\alpha_1 \Delta T \ \alpha_2 \Delta T \ \alpha_3 \Delta T \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Soit une poutre de section constante, à la température  $T_1$ , encastree à une extrémité et soumise à un effort tranchant sur l'autre. Cette structure est isostatique. Le déplacement transversal est inversement proportionnel au module d'Young. Si la poutre est ensuite à la température  $T_2$  supérieure à  $T_1$ , le module d'Young diminue donc la flèche augmente, bien que le chargement n'ait pas changé. La contrainte dans une section de la poutre a pour expression,  $y$  étant la distance entre le point considéré dans la section et l'axe de flexion :

$$\sigma(y) = \frac{My}{I}$$

En première approximation, les dimensions transversales de la poutre ne changent pas sous l'effet de la température. Donc la contrainte ne change pas. Mais comme la limite élastique diminue avec la température, une contrainte admissible à  $T_1$  peut dépasser la limite élastique à  $T_2$ .

Soit maintenant une poutre de longueur  $L$ , encastrée à chaque extrémité sur un massif indéformable. Cette structure est hyperstatique. Il n'y a pas de charge mécanique, la poutre n'est pas contrainte à la température  $T_1$ . Puis l'ensemble passe à la température  $T_2$ , supérieure à  $T_1$ . La poutre essaie de se dilater mais sa longueur est fixée par la distance entre les massifs. Elle est donc soumise à une compression, dont l'intensité augmente avec la température. Le signe de la contrainte due à la thermique et celui de la variation de température sont donc opposés. Les contraintes dans la structure ne dépendent que des déformations mécaniques, les contraintes d'origine thermique se superposent algébriquement aux éventuelles contraintes d'origine mécanique.

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_{th} = H\varepsilon_m = H(\varepsilon - \varepsilon_{th}) = H\varepsilon - H\alpha\Delta T$$

$$\sigma_{th} = -H\alpha\Delta T$$

Pour un treillis hyperstatique (Figure 14.1) comme celui composé de trois barres, sous l'effet de la chaleur, chaque barre a tendance à se dilater différemment des deux autres car les trois longueurs sont différentes. Or ces barres ont un point commun, ce qui impose une relation entre les dilatations : le treillis est donc soumis à des contraintes d'origine thermique. Une structure hyperstatique est plus sensible aux effets thermiques qu'une structure isostatique du fait des contraintes d'origine thermique qui s'y développent.

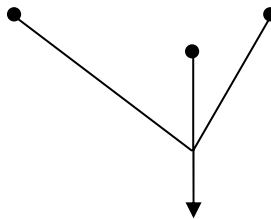


Figure 14.1 : Treillis hyperstatique

### 14.3. ANALOGIE DE DUHAMEL

Quand on résout un problème statique linéaire par la méthode des éléments finis, on se ramène à l'équation

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{q}$$

Il est rare que la distribution des températures soit uniforme dans une structure, du fait des différents modes d'échange thermique (conduction dans les solides, convection et/ou rayonnement aux frontières) et des conditions aux limites variées (températures ou flux imposés). La variation de température  $\Delta T$  n'est donc pas la même pour chaque élément du maillage. Imposer une contrainte non uniforme dans la structure présente une réelle difficulté. De toutes façons, il n'est pas possible d'introduire directement les contraintes d'origine thermique car les données pour un calcul mécanique sont soit des efforts, soit des déplacements imposés et non des contraintes. Pour contourner cette difficulté, on applique des forces de volume  $\mathbf{X}$  et des forces de surface  $\mathbf{t}$  sur la structure isotherme qui génèrent les mêmes contraintes que les contraintes thermiques dues à la variation de température : c'est **l'analogie de Duhamel**. Ce sont des données classiques en termes d'analyse mécanique, ces forces s'ajoutent aux éventuelles forces mécaniques. Elles sont construites par le programme et sont transformées en charges nodales énergétiquement équivalentes. Leur expression est donnée par :

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^T \mathbf{H} \alpha \Delta T \quad \mathbf{t} = \mathbf{N}^T \mathbf{H} \alpha \Delta T$$

$\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions d'interpolation de l'élément,  $\mathbf{D}$  l'opérateur de dérivation reliant les déplacements aux déformations,  $\mathbf{H}$  la matrice de Hooke.

Pour prendre en compte les effets thermiques en mécanique linéaire, il existe deux méthodes selon la configuration. Si la structure subit une variation uniforme de température  $\Delta T = T_2 - T_1$ , il faut donner le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique à cette température  $T_2$ , la température  $T_1$  de l'état thermiquement non contraint, et imposer à tous les nœuds du maillage la température  $T_2$ . Si la structure a une température non uniforme, il faut donner la loi d'évolution du module d'élasticité et du coefficient de dilatation thermique en fonction de la température, la température  $T_1$  de l'état thermiquement non contraint et la température de chaque nœud du maillage par des procédures automatiques liant la thermique à la mécanique. Connaissant la température de tous les nœuds d'un élément, le programme calcule sa température moyenne et la valeur de  $\Delta T$ , ce qui lui permet de déterminer le module d'élasticité de l'élément et la valeur de son coefficient de dilatation. Le programme construit ensuite la matrice de raideur de l'élément et le vecteur des charges thermiques, puis réalise l'assemblage...

# Chapitre 15

## Précontrainte

### 15.1. ASPECT PHYSIQUE

La « précontrainte » est une notion qui paraît familière (qui n'a jamais entendu parler de béton précontraint ?) et simple. Un objet est soumis à un chargement initial avant d'être sollicité par une charge de service ou une charge exceptionnelle. Cette **précontrainte** peut être naturelle ou artificielle, avoir de nombreuses origines, être connue ou inconnue. Elle peut être recherchée ou évitée...

Dans le cas d'un pont, d'un plancher de bâtiment, le poids propre peut être du même ordre de grandeur que la charge supportée, il faut donc en tenir compte. La précontrainte est naturelle et connue. Dans le cas d'une raquette de tennis, de câbles (caténaires, lignes EDF, haubans...) ou d'un instrument de musique à cordes, la tension du cordage est une charge de précontrainte artificielle mais indispensable pour l'usage souhaité de ces objets : une corde ou un câble n'a de raideur transversale que lorsqu'il est tendu. Lors de l'assemblage de pièces, par boulonnage, rivetage..., on crée des contraintes relativement locales et en général connues avant d'utiliser les ensembles constitués.

Lors de l'usinage d'une pièce, on crée un état de contrainte en général non maîtrisé et non recherché, là encore avant que la pièce ne soit utilisée. Lors de l'emboutissage, du cintrage... d'une pièce, on crée volontairement un état de contrainte pour donner la forme souhaitée, avant que la pièce ne soit utilisée. Lorsqu'une pièce est obtenue par injection, par moulage, les matériaux n'étant pas homogènes et les températures n'étant pas uniformes dans le moule, le procédé engendre là aussi un état de contrainte initial. Il se manifeste pour les pièces plastiques par un vrillage plus ou moins prononcé des pièces lors de leur éjection du moule, effet que l'on cherche à limiter. Pour les pièces métalliques, on relaxe les contraintes par des traitements thermiques appropriés.



En pratique, il existe des **contraintes** dites **résiduelles** dues aux procédés et des **précontraintes** dues aux assemblages ou à des sollicitations préalables. La connaissance du niveau de précontrainte dans une structure peut être très importante selon le coefficient de sécurité employé pour le dimensionnement.

Soit par exemple un acier dont la limite d'élasticité est de 200 MPa. Le coefficient de sécurité est de 2, c'est à dire que la limite à ne pas dépasser est de 100 MPa. Si la précontrainte est de 80 MPa, la limite du matériau n'est pas atteinte en fonctionnement ( $100+80$ ). Si le coefficient de sécurité est de 1,5, c'est à dire que la limite à ne pas dépasser est de 135 MPa, la limite du matériau peut être atteinte en fonctionnement ( $135+80$ ). Pour des matériaux dont le comportement est différent en traction et en compression, comme le béton par exemple, la précontrainte a pour effet de permettre à la structure de supporter une charge de traction, ce qui réduit d'autant la compression possible (Figure 15.1).

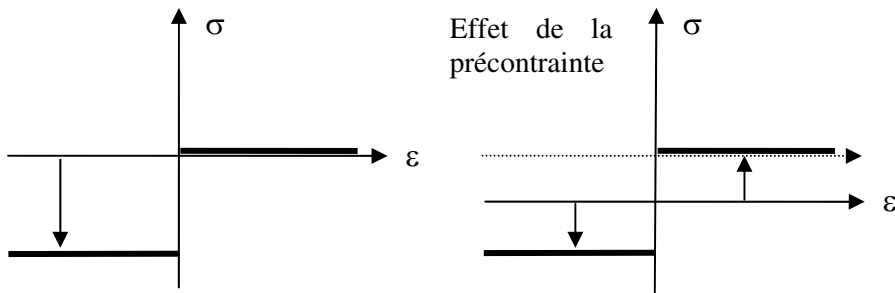


Figure 15.1 : Précontrainte dans le béton

## 15.2. PRÉCONTRAINTÉ ET EFFORTS « EXTÉRIEURS »

### 15.2.1. Modélisations de l'effet de précontrainte

En mécanique des structures, la précontrainte est un phénomène que l'on retrouve souvent, mais qui se gère différemment selon les cas. On ne traite pas dans ce chapitre la modélisation et la prise en compte des contraintes résiduelles. Soit une structure soumise à un chargement extérieur, par exemple son poids. Pour appréhender la notion de précontrainte dans ce cas, il faut faire appel à une grandeur auxiliaire en statique, qui est une grandeur physique en dynamique : le temps. Le temps permet de donner la chronologie des événements et donc de les positionner les uns par rapport aux autres. Ce chargement de précontrainte est appliqué progressivement, de l'instant initial à l'instant  $t_1$ , à partir duquel il reste constant. Quand la structure est en équilibre sous l'action de cette première charge, on lui applique progressivement la

charge de service qui commence à  $t_2$ , atteint sa valeur à l'instant  $t_3$  et reste constante au-delà. Cette seconde charge se superpose donc à la première (Figure 15.2).

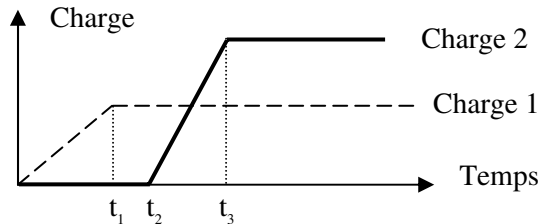


Figure 15.2 : Histoire du chargement

Dans le cas général, la mécanique n'est pas linéaire ce qui a deux conséquences principales. La première est que la raideur de la structure n'est pas constante et qu'elle dépend d'un certain nombre de grandeurs détaillées ci-dessous. La seconde, liée à la première, est que l'ordre dans lequel les charges sont appliquées a une influence sur le résultat final, la chronologie physique doit être respectée. L'ensemble des couples force-déplacement associé forme le chemin d'équilibre qui, dans le cas d'un système non linéaire à un degré de liberté, n'est pas une droite car le lien entre la charge et le déplacement n'est pas constant. La **matrice de raideur tangente** relie l'accroissement de charge à l'accroissement de déplacement correspondant : graphiquement, c'est la pente du chemin d'équilibre en un point pour un système à un degré de liberté (Figure 15.3).

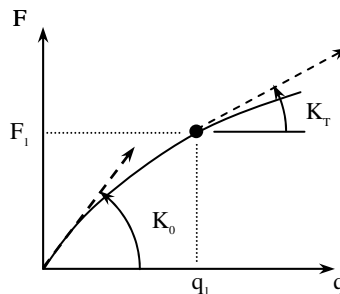


Figure 15.3 : Matrice tangente pour un problème à 1 degré de liberté

Sous l'effet de la première charge  $F_1$ , on parcourt le chemin d'équilibre jusqu'au point d'équilibre correspondant  $q_1$ . La matrice de raideur a changé sous la charge et quand on applique la charge de service, la raideur de la structure est sa matrice tangente. La **précontrainte** n'est donc pas un chargement particulier appliqué avant un autre chargement mais plutôt l'effet

qu'elle a, par la modification de la raideur, sur le comportement de la structure. Dans le cas général, la matrice tangente est la somme de plusieurs matrices :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma$$

$\mathbf{K}_0$  est la matrice de raideur « classique », appelée raideur initiale. C'est celle qui est calculée et utilisée en mécanique linéaire.  $\mathbf{K}_u$  est la matrice qui traduit la variation de raideur due à la variation de géométrie.  $\mathbf{K}_\sigma$  est la **matrice de raideur géométrique** qui traduit la variation de raideur avec l'état de contrainte sous charge.

Trois cas peuvent se présenter pour la modélisation, qui ne dépendent pas du niveau de la précontrainte mais de l'effet qu'elle a produit sur le comportement de la structure. Sous l'effet de la précontrainte,

- la raideur de la structure est relativement différente de la raideur initiale,
- la raideur de la structure est peu différente de la raideur initiale,
- la raideur de la structure est la raideur initiale.

Dans le premier cas, une analyse linéaire n'est pas envisageable, la chronologie des charges et la modification progressive de la matrice tangente doivent être modélisées.

Dans le second cas, les déplacements sont souvent petits (linéarité géométrique) et la matrice  $\mathbf{K}_u$  peut être négligée. L'évolution de la raideur dépend alors exclusivement de l'état de contrainte. Si les contraintes restent inférieures à la limite élastique des matériaux, la matrice  $\mathbf{K}_\sigma$  est proportionnelle à l'état de contrainte. Graphiquement, cela revient à évaluer la raideur approchée au point  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{q}_1)$  puis à faire une seconde analyse en appliquant tout le chargement (précontrainte et charge de service) à une structure ayant cette raideur : cela constitue une linéarisation de la matrice tangente au voisinage du point d'équilibre précontraint (Figure 15.4). Informatiquement parlant, cette technique consiste à enchaîner deux analyses linéaires. La première résout le problème

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_1$$

A l'équilibre, on connaît le champ de déplacement  $\mathbf{q}_1$  et le champ de contrainte associé. La seconde analyse récupère ce champ de contrainte et l'utilise pour générer la matrice  $\mathbf{K}_\sigma$  puis pour résoudre le problème

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{q}_2$$

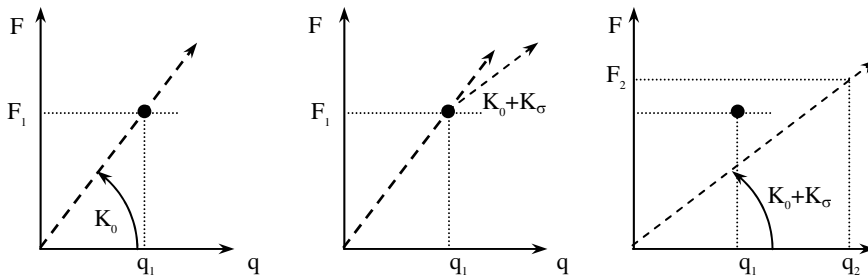


Figure 15.4 : Matrice tangente pour un problème à 1 degré de liberté

Dans le troisième cas, la raideur de la structure n'est pas modifiée par l'application de la charge de précontrainte. Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer une analyse non linéaire ou une linéarisation de la matrice tangente, il suffit de réaliser une seule analyse linéaire en cumulant les deux charges : il n'y a pas à proprement parler de précontrainte dans la modélisation, même si l'une des charges joue physiquement ce rôle.

Plus une structure a une raideur faible, plus elle est sensible à la précontrainte. C'est un phénomène qu'il faut donc savoir prendre en compte pour les structures minces et élancées car il peut ne pas être négligeable. Il peut conduire à un calcul beaucoup plus prédictif quant au comportement de la structure par une double analyse linéaire.

Dans le chapitre 26, la pression hydrostatique exerce un effort de tension sur toutes les parois de la cuve. Cette charge peut être considérée comme une précontrainte : on calcule les contraintes sous la charge de pression, on s'en sert pour modifier la matrice de raideur de la cuve, et on lance une seconde analyse avec la pression comme charge... Dans ce cas, la charge de service constitue la précontrainte. Dans le chapitre 22, quand les deux tubes sont frettés, l'assemblage peut être soumis à diverses charges dont une traction dans l'axe commun des tubes ou une pression interne. Les contraintes dues au frettage peuvent servir à générer la matrice de raideur modifiée par l'état de contrainte initial, selon que la modification de la matrice  $\mathbf{K}_0$  par  $\mathbf{K}_\sigma$  soit négligeable ou non.

### 15.2.2. Exemple des forces centrifuges

La structure de la Figure 15.5 représente schématiquement une aube de turbine avec son pied. Il en existe 36 identiques en rotation autour de l'axe  $z$  pour l'étage considéré, on ne modélise qu'un secteur en profitant de la **symétrie cyclique**. Pour cet exercice, le maillage est réalisé avec des éléments

tétraédriques du premier degré (23431 éléments pour 5926 nœuds) et la seule charge est la **charge centrifuge**. Les nœuds qui sont dans les surfaces délimitant le secteur sont soumis à des conditions aux limites particulières. La forme de l'aube fait que le chargement exercé sur le pied n'est pas purement radial : les faces d'un secteur, plane au repos, ne le sont plus quand le moteur est en rotation. Il n'est donc pas possible d'y mettre des **conditions de planéité** ou des axes locaux pour bloquer on ne sait quel déplacement. En appelant « frontière gauche » et « frontière droite » les surfaces qui délimitent le secteur, on sait que le déplacement de la frontière gauche du secteur 1 est égal au déplacement de la frontière droite du secteur 2 puisque cette frontière est physiquement commune aux deux secteurs. De proche en proche, on en déduit que le déplacement de la frontière gauche du secteur  $n$  est égal au déplacement de la frontière droite du secteur 1 : toutes les frontières ont donc les mêmes déplacements. Il faut donc introduire sur ces frontières des conditions aux limites relatives (leur mouvement n'est pas connu a priori) qui sont des conditions de symétrie cyclique. Ce sont en pratique des contraintes cinématiques entre les nœuds de la frontière gauche et ceux de la frontière droite du secteur modélisé.

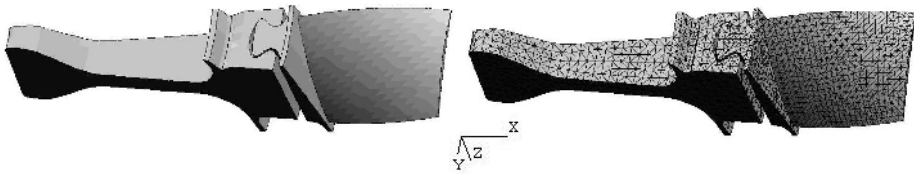


Figure 15.5 : Aube et son pied (géométrie et maillage)

Sous l'effet de la charge centrifuge, bien que la structure soit en rotation, quand la vitesse de rotation est constante (régime stabilisé), la structure a un comportement statique car à chaque instant, elle a le même comportement qu'aux instants précédents. La position angulaire change dans un repère fixe mais pas le déplacement ou les contraintes dans un repère tournant lié à l'aubage. Le problème s'écrit donc sous la forme suivante.  $\mathbf{K}_0$  est la matrice de raideur initiale,  $\mathbf{q}$  le vecteur des déplacements,  $\omega$  la vitesse de rotation,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse de la structure et  $\mathbf{X}$  le vecteur position des nœuds du maillage.

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{X} + \mathbf{q})$$

On calcule le comportement de l'aubage pour un certain nombre de vitesses de rotations caractéristiques du moteur. Sous l'effet de la tension, car la structure a tendance à partir vers l'extérieur, il y a une augmentation de raideur qui se traduit par la matrice  $\mathbf{K}_\omega(\omega)$ . Lorsque le moteur tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ , on peut donc réaliser une analyse avec précontrainte, cette dernière étant due à

la charge centrifuge elle-même qui induit une modification d'autant plus significative de la raideur que la valeur de  $\omega$  est élevée. La prise en compte de cette précontrainte diminue l'amplitude des déplacements car la structure se rigidifie lorsqu'elle est en rotation

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma(\omega))\mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{X} + \mathbf{q})$$

Mais quand la vitesse de rotation se rapproche de la vitesse critique (vitesse à laquelle le moteur rentre en résonance), l'amplitude des déplacements augmente. La raideur apparente du moteur diminue donc sous l'effet de la raideur centrifuge  $\mathbf{K}_\omega(\omega)$ . Le problème linéarisé résolu à chaque vitesse caractéristique s'écrit finalement sous la forme suivante :

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma(\omega) - \mathbf{K}_\omega(\omega))\mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{X} + \mathbf{q})$$

C'est une analyse statique avec une précontrainte constituée de deux termes de signes contraires, chacun dépendant de la vitesse de rotation.

### 15.3. PRÉCONTRAINTES ET ASSEMBLAGE

La précontrainte due à un assemblage peut être gérée de diverses manières selon les cas, illustrés par les exemples ci-dessous.

#### 15.3.1. Assemblage mobile

Soit le treillis articulé suivant, encastré en A et guidé horizontalement en B, pour lequel les neuf barres ont des longueurs telles que sa conformation initiale est donnée sur la Figure 15.6. Toutes les barres non inclinées par rapport aux axes  $x$  et  $y$  ont une longueur de 1 m, les barres inclinées de  $\sqrt{2}$  m. Le module d'élasticité est de 210 GPa, le coefficient de Poisson de 0,3 et toutes les barres ont une section droite d'aire  $10^{-4}$  m<sup>2</sup>.

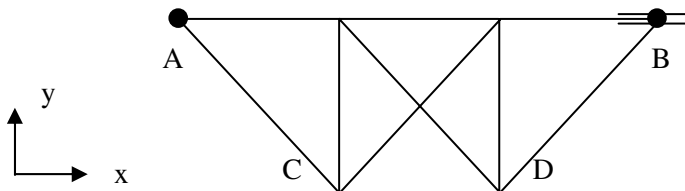


Figure 15.6 : Treillis et assemblage initial

Le treillis est intérieurement et extérieurement isostatique, les points de liaison se déplacent dans le plan lors du montage du treillis si la dimension d'une membrure est légèrement différente de la coté nominale (en particulier celles de  $\sqrt{2}$  m) ou s'il est soumis à une variation uniforme de sa température, mais aucune barre n'est sollicitée, ni en traction ni en compression. On suppose que les neuf membrures ont leur cote nominale. On souhaite maintenant ajouter une dixième membrure CE pour fermer le carré central, mais la barre a une longueur de 0,995 m. Elle est trop courte de 5 mm, il faut donc forcer sur le treillis pour finir son montage (Figure 15.7). Quand le treillis est assemblé, on exerce un effort de 10000 N en C et en D, dans la direction  $-y$ .

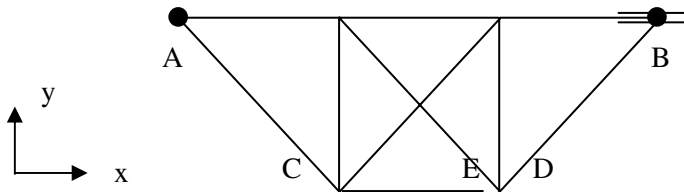


Figure 15.7 : Treillis et assemblage final

Il n'est pas possible d'imposer le déplacement horizontal du point E car ainsi, on ne fermerait pas le treillis (pas de connexion entre E et D) et on assignerait au point E une position finale or on ne la connaît pas. Il n'est pas possible d'imposer une force horizontale sur le point E pour étirer de 5 mm la barre CE car on ne fermerait pas le treillis, et on ne connaît pas les tensions à l'équilibre dans les barres. Lorsque le treillis est assemblé, il est en équilibre contraint mais il n'est soumis à aucune force extérieure et à aucun déplacement imposé hormis ses conditions à la limite. Les membrures exercent les efforts les unes sur les autres, mais ce sont des efforts intérieurs au treillis assemblé. Cet exercice est représentatif des problèmes d'**assemblage** pour lesquels les parties assemblées (ici les nœuds E et D) sont mobiles, problème que l'on retrouve par exemple dans l'assemblage de tôles par rivetage ou boulonnage (Figure 15.8).

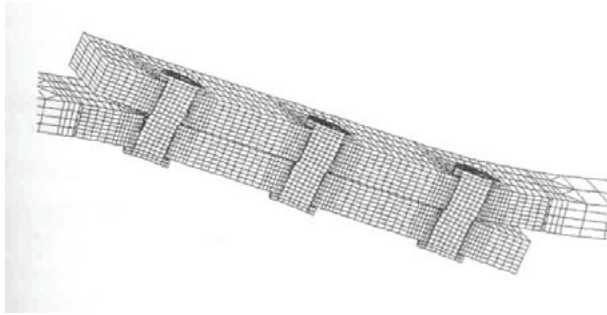


Figure 15.8 : Assemblage par boulonnage (Snecma moteurs, Journées utilisateurs SAMCEF, 1998)

La seule méthode permettant de traiter ce type de problème est celle des **techniques de contact** décrites dans le chapitre 22. Quand le treillis est assemblé, les nœuds E et D ont une position commune. En pratique, on donne au programme une contrainte d'inégalité à respecter sur le champ de déplacement : la différence de position entre E et D, appelée à tort distance ED car elle peut être négative, doit être négative ou nulle. A l'équilibre, l'énergie potentielle du système est minimale lorsque cette distance est nulle.

Les trois analyses sont effectuées et comparées. Sans précontrainte, c'est à dire en traitant simultanément l'assemblage et le chargement dans une analyse linéaire, l'amplitude maximale du déplacement est de 2,55 mm et la contrainte maximale a pour valeur 208,8 MPa en traction et 154 MPa en compression. Quand on gère la précontrainte par une double analyse linéaire, on accède à l'état d'équilibre avant l'application du chargement extérieur. Le nœud E a un déplacement horizontal vers la droite de 3,02 mm, le nœud D a un déplacement horizontal vers la gauche de 1,98 mm, soit les 5 millimètres du jeu initial (Figure 15.9). Les nœuds E et D sont superposés à l'équilibre. Les contraintes de traction maximale sont de 109 MPa, les contraintes de compression maximale sont de 154 MPa, ce qui est loin d'être négligeable. Il est évident que pour le montage de la dernière membrure, un opérateur a tiré ou poussé sur certaines parties du treillis, mais une fois que les liaisons ont été réalisées, aucune force extérieure ne lui est appliquée : la somme des forces est nulle, la somme des réactions est nulle alors qu'il y a des déplacements et des contraintes. Sous la charge extérieure, l'amplitude maximale du déplacement passe à 2,55 mm, celle de la contrainte maximale à 208,8 MPa en traction et à 154 MPa en compression. On retrouve le résultat de l'analyse simultanée.



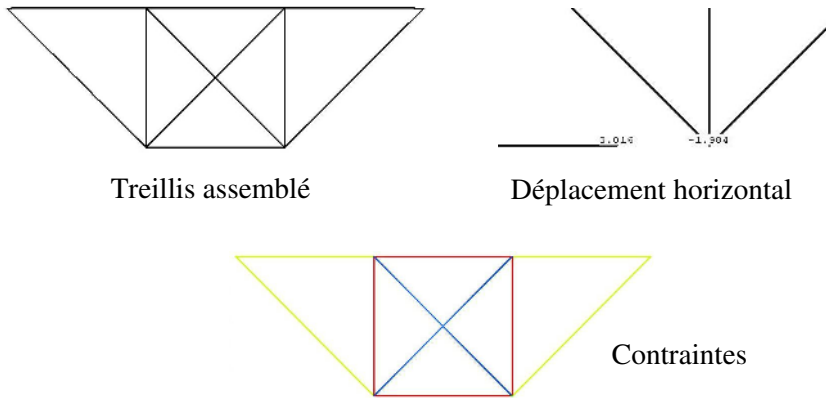


Figure 15.9 : Treillis assemblé, déplacements et contraintes

Par une analyse non linéaire, quand le treillis est assemblé, l'amplitude maximale du déplacement est de 3,915 mm et la contrainte maximale a pour valeur 112,8 MPa en traction et 159,4 MPa en compression. Sous la charge extérieure, l'amplitude maximale du déplacement passe à 2,55 mm, celle de la contrainte maximale à 208,8 MPa en traction et à 154 MPa en compression. On retrouve le résultat des deux analyses précédentes. Cela signifie que malgré le niveau de contrainte dû à l'assemblage, la précontrainte ne joue aucun rôle. Cela illustre bien le fait que la « précontrainte » dépend de la modification de raideur engendrée par la charge de précontrainte, et non par la contrainte elle-même.

Pour un élément de barre soumis à une traction  $N$ , le vecteur des degrés de liberté étant rangé dans l'ordre  $\mathbf{q}^T = (u_1, v_1, u_2, v_2)$ , les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_\sigma$  sont, exprimées dans le repère propre de l'élément :

$$\mathbf{K}_0 = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_\sigma = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} a+b & 0 & -a-b & 0 \\ 0 & b & 0 & -b \\ -a-b & 0 & a+b & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \end{bmatrix} \quad a = \frac{ES}{L} \quad b = \frac{N}{L}$$

Dans les zones qui se trouvent comprimées du fait de l'assemblage, il se peut que la somme  $(a + b)$  soit négative. Les termes négatifs qui apparaissent sur la

diagonale de  $\mathbf{K}$ , entraînant des **pivots négatifs** lors de la résolution, sont le signe que la structure a flambé pour ce niveau de précontrainte et que le calcul linéaire n'a pas de sens.

Dans notre exemple, lorsque la structure est assemblée, les efforts dans les barres ont une valeur maximale de 20000 N. Le terme  $a$  est de l'ordre de  $10^7$ , le terme  $b$  de l'ordre de  $10^4$ . Bien que le treillis soit fortement contraint lors de son assemblage et que la contrainte maximale soit proche de la limite élastique du matériau, la matrice de raideur  $\mathbf{K}_\sigma$  reste négligeable par rapport à la matrice de raideur initiale  $\mathbf{K}_0$  pour l'état de contrainte engendré par l'assemblage.

Gérer la précontrainte ou réaliser une analyse non linéaire n'apporte rien en termes de solution par rapport à une analyse linéaire avec cumul des charges pour cet exemple.

### 15.3.2. Assemblage fixe

Une bride est fixée au mur par quatre vis. Avant d'installer le portique et de le charger, l'ensemble bride-vis n'est soumis à aucune charge extérieure. Les vis sont soumises à une traction générée et de valeur connue lors du serrage, mais c'est une charge interne au système. Pour la bride boulonnée dans le mur de la Figure 15.10, la tête de la vis est modélisée par des corps rigide, son corps par une poutre. Les techniques décrites ici sont utilisables lorsque la modélisation de la vis est plus complexe, comme par exemple un modèle 3D avec du contact entre la tête de vis et la bride.

Sous l'action des efforts ramenés par le portique, et en supposant que la précontrainte due au serrage contre le mur doive être prise en compte dans la simulation numérique, deux techniques sont possibles.

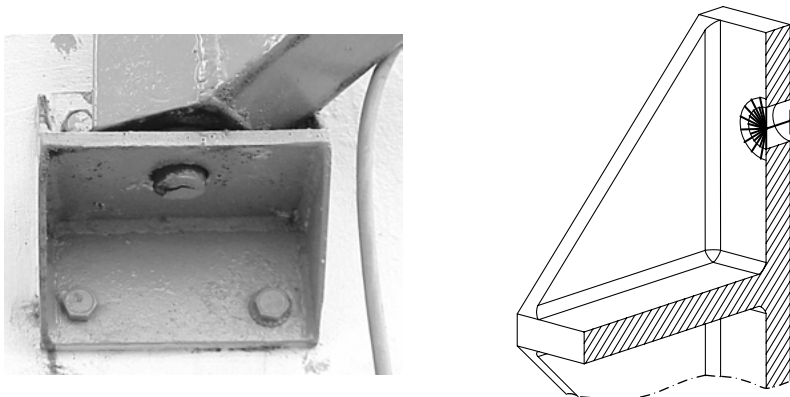


Figure 15.10 : Bride

Pour la première, la poutre qui matérialise la vis va du centre du corps rigide noté A au point situé au niveau du mur noté B (Figure 15.11). Si la bride n'est pas soumise à un véritable **chargement thermique**, on introduit dans le modèle le coefficient de dilatation thermique du matériau constituant la vis et un refroidissement de la poutre, par exemple de 100 °C. Il en résulte un effort axial dans la poutre auquel on accède en effectuant une analyse éléments finis. Sachant quel est l'effort dû au serrage, il suffit d'adapter la charge thermique pour qu'elle génère l'effort voulu qu'il n'est pas possible de déterminer directement. La relation de la RDM qui relie effort de traction et allongement n'est en effet pas utilisable :

$$F = \frac{ES}{L} \Delta L = ES\varepsilon = ES\alpha\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{F}{ES\alpha}$$

La vis ne peut pas se raccourcir librement car d'un côté, elle est encastrée dans le mur, de l'autre la bride résiste et s'oppose à son déplacement. Or la formule ci-dessus donne la variation de longueur d'un barreau complètement libre (pas de condition à la limite) soumis à une variation de température.



Figure 15.11 : Modélisation de l'effort de serrage

La seconde technique consiste à supposer que la poutre a pour longueur AB (elle est donc trop courte), et que le point fixe (le mur) est en C. On introduit une relation de contact entre B et C en donnant au programme une contrainte sur la distance BC qui ne peut pas être strictement positive. Une première analyse éléments finis donne l'effort induit dans la vis pour que B et C soient superposés. Il suffit ensuite d'adapter la distance BC pour que la condition de contact crée dans la vis l'effort voulu. L'avantage de cette technique est que l'ensemble bride-vis peut être soumis à un véritable chargement thermique si tel est le cas.

# Chapitre 16

## Analyse modale

### 16.1. PRÉSENTATION

L'analyse dynamique est un domaine essentiel des sciences de l'ingénieur qui recouvre une très grande diversité de problèmes. Elle peut être très complexe selon le caractère linéaire ou non du problème, les vitesses mises en jeu et le nombre d'inconnues à déterminer. Elle couvre l'aéroélasticité, l'analyse sismique, l'acoustique, la prédiction comportementale d'une structure ou d'un système... Elle s'est tellement développée ces derniers temps (algorithmes performants et outils logiciels disponibles depuis une vingtaine d'années) qu'elle a été découpée en plusieurs domaines dont la dynamique rapide, l'interaction fluide-structure (naval, avion, pale hélicoptère...), la dynamique des systèmes flexibles poly-articulés (mouvement de robots, de bras manipulateurs, de machines-outils, déploiement de satellites...), les techniques d'identification et de recalage, le sismique...

L'analyse modale est une partie de l'analyse dynamique, et elle sert de base à la plupart des méthodes utilisées d'où son intérêt. L'**analyse modale** d'une structure est la détermination de ses fréquences propres et de la forme des modes de résonance associés. Elle permet d'en améliorer la connaissance physique des structures puis, dans certains cas, le comportement : le calcul de la base modale d'une structure est aujourd'hui une étape importante de son dimensionnement. Du fait de l'excitation forcée à laquelle peut être soumise la structure en fonctionnement, pour éviter les problèmes d'amplification dynamique souvent synonymes d'inconfort voire de rupture, on peut souhaiter lors de la définition de la structure qu'elle n'ait pas de fréquence propre dans une bande donnée ou que l'amplification en un point ne dépasse pas un certain niveau, ce qui peut être déterminé par le calcul. D'autre part, même si la notion n'a pas de sens physique immédiat car les modes propres calculés ont une amplitude indéterminée, il existe à une fréquence propre donnée un champ de

contraintes dynamiques dans la structure. Des outils particuliers permettent, à partir de ces informations, pour un matériau donné, de prédire la durée de vie de la structure en fatigue. Enfin, les problèmes de réponse dynamique des structures sont souvent résolus par superposition modale, que ce soit pour des **analyses temporelles** (réponses transitoires, réponses sismiques, réponses spectrales) ou **fréquentielles** (réponses harmoniques). Il est donc nécessaire de disposer de la base modale pour certains calculs de réponse. Le théorème de l'énergie potentielle totale utilisée dans l'approche cinématique (hypothèses sur le champ de déplacements) pour l'analyse statique a un équivalent pour l'analyse dynamique : il s'agit du **principe de Hamilton** dont le contenu et la démonstration ne sont pas abordés ici. L'équation générale de la dynamique s'écrit sous forme discrète :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_a + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q})$$

$\mathbf{K}$  est la **matrice de raideur**,  $\mathbf{q}$  est le vecteur des degrés de liberté donc le vecteur contenant le déplacement généralisé des nœuds,  $\mathbf{F}_a$  représente les forces d'amortissement qui peuvent prendre plusieurs formes,  $\mathbf{M}$  est la **matrice de masse**,  $\ddot{\mathbf{q}}$  est le vecteur accélération.  $U$  et  $T$  étant respectivement les énergies de déformation et cinétique,  $\dot{\mathbf{q}}$  le vecteur vitesse, les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  ont pour expression :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

La matrice de masse est symétrique, définie positive, la matrice de raideur est symétrique, semi-définie positive. L'analyse modale est la détermination des paramètres modaux d'une structure qui vibre librement, sans excitation extérieure : fréquences propres et modes propres. Ce sont des grandeurs caractéristiques d'un point de vue dynamique, à partir desquelles il est possible de prédire la réponse de la structure. L'équation modale la plus générale est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_a + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$$

L'équation des mouvements harmoniques (ou des **vibrations libres**) des structures non dissipatives, sous une forme discrétisée, est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$$

## 16.2. MODES PROPRES ET FRÉQUENCES PROPRES

Les systèmes mécaniques sont toujours dissipatifs : les **modes propres** de vibration physiques sont des vecteurs complexes au sens algébrique et les fréquences propres associées sont des nombres complexes, alors que les modes propres calculés par les programmes d'analyse modale traditionnels sont des

vecteurs réels au sens algébrique et les fréquences associées sont des nombres réels. On les appelle modes propres réels bien qu'ils n'aient de réel que leur forme mathématique.

Les divers **amortissements**, généralement mal connus, sont souvent très faibles : beaucoup de structures sont **faiblement dissipatives**. Dans ce cas, les modes propres réels sont peu différents des modes propres physiques. C'est pour cette raison que l'équation des vibrations libres pour les structures non amorties est utilisée en analyse modale. Le vecteur des déplacements  $\mathbf{q}$  est une fonction du temps et de l'espace. On cherche une solution de la forme

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}\phi(t)$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur de constantes décrivant la forme propre du mode, indépendante du temps, et  $\phi(t)$  une fonction décrivant l'évolution temporelle de l'amplitude du mode.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{x}\ddot{\phi} + \mathbf{K}\mathbf{x}\phi = 0 \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{x}\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{spatial} & \mathbf{M}\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{x} \\ \text{temporel} & \ddot{\phi}, \phi \end{cases}$$

La première partie de l'équation dépend de l'espace et du temps, la seconde de l'espace. Pour que la somme soit nulle en tout point à tout instant, il faut que

$$-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}$$

$\lambda$  est une constante dont on ne connaît a priori pas le signe. Soit le cas général où le mode propre est complexe et s'écrit sous la forme :  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$

$$\mathbf{K}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{M}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a} - i\mathbf{b})^T \mathbf{K}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} - i\mathbf{b})^T \mathbf{M}(\mathbf{a} + i\mathbf{b})$$

En utilisant la symétrie des matrices de masse et de raideur, le fait que  $\mathbf{M}$  soit définie positive et que  $\mathbf{K}$  soit semi-définie positive, on montre que  $\lambda$  ne peut être que réel et positif : c'est le carré d'un réel.

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{K} \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{b}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \omega^2$$

L'équation temporelle est alors :  $\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0$

Sa solution est connue, c'est une sinusoïde non amortie

$$\phi(t) = \alpha e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

La partie spatiale vérifie l'équation  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{x}$

qui s'écrit sous une forme plus utilisée

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = 0$$

Ce système linéaire homogène est de dimension  $N$  où  $N$  est le nombre de degrés de liberté du modèle. Cherchant des vecteurs  $\mathbf{x}$  non identiquement nuls, le déterminant du système doit être nul : les solutions sont les **valeurs propres** du système.  $\omega_i$  est la **pulsation propre** qui s'exprime en radian par seconde (rd/s).

$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  est la fréquence propre (en Hertz) associée. A chaque valeur propre  $\omega_i^2$  est associé un **mode propre** réel, noté  $\mathbf{x}_i$ .

Si  $\mathbf{x}_i$  est un mode propre, alors quel que soit le réel non nul  $\alpha$ ,  $\alpha\mathbf{x}_i$  vérifie également l'équation d'équilibre dynamique. L'amplitude d'un mode propre est donc complètement arbitraire et n'a pas de signification physique. La forme d'un mode est une caractéristique de la structure : elle ne dépend pas du temps. C'est l'amplitude du mode qui varie sinusoidalement avec le temps.

Les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques à coefficients réels : il en résulte que toutes les valeurs propres du système  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$  sont réelles et ne sont donc pas regroupées par paires de valeurs complexes conjuguées. Si le système comporte  $N$  degrés de liberté indépendants, il existe  $N$  valeurs propres réelles dont **seulement  $N/10$  a un sens physique**. Les autres sont « numériques », leur valeur est essentiellement liée à la discrétisation (maillage). C'est la règle empirique dite **règle des 10 %**. Des valeurs propres peuvent être éventuellement confondues et sont rangées conventionnellement dans l'ordre croissant

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_N^2$$

### 16.3. ORTHOGONALITÉ DES MODES PROPRES

Les modes propres sont orthogonaux entre eux par rapport aux matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ . Soient les modes  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  vérifiant l'équation d'équilibre dynamique. Chaque relation peut être pré-multipliée par un vecteur ligne, les relations obtenues ci-dessous étant alors des relations scalaires et non plus vectorielles.

$$\mathbf{x}_j^T (\mathbf{K} \mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_j^T (\omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{x}_i) \quad \text{car } \mathbf{x}_i \text{ est un mode propre de la structure}$$

$$\mathbf{x}_i^T (\mathbf{K} \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i^T (\omega_j^2 \mathbf{M} \mathbf{x}_j) \quad \text{car } \mathbf{x}_j \text{ est un mode propre de la structure}$$

Par soustraction, du fait de la symétrie des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ , il reste

$$0 = (\omega_j^2 - \omega_i^2) \{ \mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j \}$$

Si les valeurs propres sont distinctes ( $\omega_i \neq \omega_j$ ), alors le produit  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j$  est nul. Si les valeurs propres sont égales ( $\omega_i = \omega_j$ ), alors le produit  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i$  est égal à  $\mu_i$ , **masse généralisée** du mode  $i$ . Si les valeurs propres sont distinctes ( $\omega_i \neq \omega_j$ ), alors le produit  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_j$  est nul. Si les valeurs propres sont égales ( $\omega_i = \omega_j$ ), alors le produit  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_i$  est égal à  $\gamma_i$ , **raideur généralisée** du mode  $i$ . En utilisant le symbole de Kronecker, on regroupe ces relations sous la forme

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \mu_i \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_j = \gamma_i \delta_{ij}$$

La raideur et la masse généralisées ne sont pas faciles à interpréter physiquement même si elles sont respectivement plus ou moins représentatives de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de la structure. En pratique, soit on impose 1 pour le plus grand déplacement du mode ou pour son module, ce qui est une façon de le normaliser, soit on impose 1 pour sa masse généralisée. La raideur généralisée et la masse généralisée ne sont connues qu'à un coefficient multiplicatif près, qui dépend de la façon dont est normé le mode propre, mais sont reliées par le **quotient de Rayleigh** associé au vecteur propre  $\mathbf{x}_i$ . Ce quotient est défini de la façon suivante :

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i}$$

$\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j$  est le produit des **forces d'inerties**  $\mathbf{M} \mathbf{x}_j$  par le mode propre  $\mathbf{x}_i$  : les forces d'inertie associées au mode  $j$  ne produisent aucun travail selon le mode  $i$  et inversement. Il en est de même pour les forces élastiques  $\mathbf{K} \mathbf{x}$ . Lorsqu'une structure vibre librement sur un de ses modes propres, l'énergie totale ne se distribue que sur ce mode là. Si une valeur propre a un ordre de multiplicité égal à  $m$ , les  $m$  vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants et peuvent toujours être orthogonalisés. Il en résulte que les  $N$  vecteurs propres d'un système comportant  $N$  degrés de liberté indépendants forment toujours une base de dimension  $N$ . En conséquence, n'importe quel vecteur  $\mathbf{x}$  peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire unique des  $N$  vecteurs propres. Ce résultat fondamental est utilisé en réponse dynamique par superposition modale. En général, un vecteur propre  $\mathbf{x}_i$  n'est numériquement déterminé qu'à un résidu près. On peut donc écrire

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \varepsilon \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{x}_j$$



$\mathbf{x}$  n'est en effet qu'une approximation du vrai vecteur propre  $\mathbf{x}_i$ , le résidu étant une combinaison linéaire de tous les modes sauf le  $i$ -ième auquel il est orthogonal, et  $\varepsilon$  une constante tendant vers zéro pour bien montrer que l'on est très proche du vecteur propre. En calculant le quotient de Rayleigh associé à l'approximation  $\mathbf{x}$ , on montre que l'on peut écrire  $\omega^2 = \omega_i^2 + \varepsilon^2 C$  où  $C$  est une constante dont le signe n'est pas connu a priori. Ce résultat peut s'énoncer de la façon suivante : *on détermine plus précisément une fréquence propre que la forme du mode qui lui est associé.*

Le principe de Rayleigh montre que si l'on impose une contrainte linéaire sur les modes propres, comme par exemple ajouter une fixation dans une structure, on augmente les fréquences du système. La méthode des déplacements revient à introduire des contraintes dans la structure discrétisée car le déplacement dans un élément est imposé par la fonction de forme de l'élément. Il en résulte que les fréquences du système discrétisé sont supérieures ou égales aux fréquences exactes. On montre cependant que cette propriété est perdue quand la compatibilité n'est pas respectée, en particulier dans le cas de matrices de masse diagonales, objet d'un paragraphe ultérieur.

#### 16.4. MODES RIGIDES

Ces modes particuliers, notés  $\mathbf{u}$ , vérifient l'équation

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

Ils peuvent être considérés comme des modes propres de fréquence nulle. En effet, la raideur généralisée associée est nulle donc le quotient de Rayleigh aussi. L'équation temporelle devient alors, pour  $\mathbf{q} = \mathbf{u} \phi(t)$

$$\ddot{\phi}(t) = 0$$

d'où une solution temporelle qui n'est plus sinusoïdale mais linéaire en  $t$

$$\phi(t) = \alpha + \beta t$$

Il y a un mouvement d'entraînement qui est en général une combinaison linéaire des différents modes rigides possibles. Ces modes vérifient les relations d'orthogonalité et sont orthogonaux aux modes propres élastiques :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = \mu_i \delta_{ij} \quad \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j = 0$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j = 0 \quad \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_j = 0$$

## 16.5. MASSE EFFECTIVE

La masse effective présente de nombreux intérêts en dimensionnement dynamique des structures. Dans le cahier des charges, on peut trouver une restriction sur les fréquences propres qui ne doivent pas se situer dans une certaine bande. Si une fréquence y est située, en alourdissant la structure, cette fréquence peut descendre suffisamment bas pour sortir de la bande interdite. Mais des fréquences qui étaient au dessus peuvent y arriver. En procédant inversement, on peut repousser la fréquence qui pose un problème mais faire monter dans la bande interdite des fréquences qui étaient en dessous précédemment. Mais ce n'est pas parce qu'une fréquence se situe dans une bande interdite qu'il y a un risque pour la structure : c'est ce que l'on peut tirer comme information des masses effectives.

La masse généralisée est un scalaire dont la valeur dépend de la norme utilisée et qui ne caractérise donc pas physiquement le mode  $\mathbf{x}_i$  correspondant. La **masse effective**, indépendante de la norme appliquée sur un mode, le caractérise.  $\mathbf{u}_j$  étant l'un des six modes rigides de la structure, on définit :

$$m_{ij} = \frac{(\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j)^2}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i}$$

La masse effective représente physiquement le pourcentage de masse qui, à la fréquence associée au mode  $\mathbf{x}_i$ , est mis en mouvement dans la direction du mode rigide  $\mathbf{u}_j$ . Pour chaque fréquence propre, il existe donc six masses effectives. C'est un indicateur important dans le cas d'une structure excitée par sa fondation. La somme des masses effectives pour la totalité des N modes propres d'une structure est égale, dans chaque direction, à la masse totale moins la masse de ses supports (notion de masse vibrante). La masse effective donne le couplage entre les directions de l'espace lorsque la structure vibre sur le mode associé. Un mode peut avoir une très grande masse effective dans une direction et rien dans une autre, ou il peut y avoir un mouvement simultané dans plusieurs directions. Une grande masse effective dans la direction de l'excitation, pour une fréquence située dans ou au voisinage d'une bande interdite, nécessite une modification de conception de la structure. Une petite masse effective peut être acceptable, quitte à positionner un amortisseur. L'analyse des masses effectives permet donc, dans le cas d'une structure excitée par sa fondation, de déterminer quels sont les modes dont la contribution sera importante dans la solution et d'assurer ainsi la qualité de la base modale tronquée avec laquelle sera fait le calcul de la réponse dynamique.

La masse effective permet de séparer les modes en modes globaux et modes locaux mais demande une analyse fine. Si la masse effective associée à un mode

tend vers zéro dans toutes les directions, le mode est généralement très local : une toute petite partie de la structure peut rentrer en résonance. Mais pour certains modes et pour des structures présentant au moins une symétrie, il peut y avoir autant de masse « qui monte » que de masse « qui descend ». Le bilan des quantités de mouvement est nul donc le carré (masse effective) est nul alors que c'est un mode global. L'examen des masses effectives est important, mais insuffisant : la forme des modes, le contenu fréquentiel de l'excitation et la direction de l'excitation doivent être utilisés conjointement pour analyser le résultat du calcul modal (Figure 16.1).

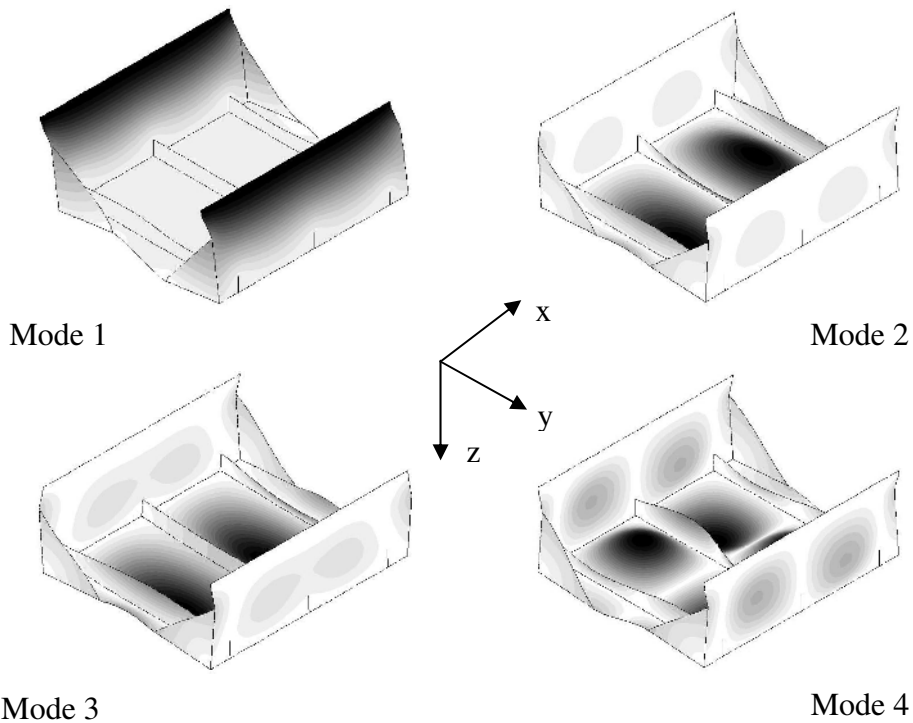


Figure 16.1 : 4 premiers modes propres

La structure raidie dont les quatre premiers modes propres sont représentés sur la figure précédente est vue par dessous. Ses deux bords inférieurs sont encastres. Le tableau suivant regroupe les masses effectives pour les quatre fréquences propres calculées. Le premier mode est un mode d'ensemble dans la direction  $y$ . Le second est un mode de plateau, symétrique : les masses effectives en translation sont nulles, mais la structure pivote. Le troisième est un mode de plateau dans la direction  $z$ . Bien que les masses effectives soient nulles en translation et en rotation, le quatrième mode est un mode global de structure, parfaitement symétrique.

Mode	m <sub>xx</sub>	m <sub>yy</sub>	m <sub>zz</sub>	phi <sub>xx</sub>	phi <sub>yy</sub>	phi <sub>zz</sub>
1	0 %	88 %	0 %	1 %	0 %	0 %
2	0 %	0 %	0 %	0 %	5 %	0 %
3	0 %	0 %	20%	11 %	0 %	0 %
4	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

## 16.6. MATRICES DE MASSE

L'énergie cinétique d'un élément est

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dv$$

$\rho$  est sa masse volumique,  $\dot{u}$  la vitesse de tous ses points matériels. La matrice des fonctions de forme  $\mathbf{A}$  permet de passer d'une représentation continue à une représentation discrète de l'élément par la relation

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \mathbf{q}(t)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des degrés de liberté de l'élément. La vitesse  $\dot{u} = du/dt$  est alors simplement  $\dot{u} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}$ , la matrice  $\mathbf{A}$  étant indépendante du temps. L'énergie cinétique s'écrit sous forme discrétisée

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} dv = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \int_{V_e} \rho \mathbf{A}^T \mathbf{A} dv \right) \dot{\mathbf{q}}$$

On définit la matrice de masse d'un élément par la relation

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{A}^T \mathbf{A} dv$$

Lorsque l'on prend pour la construction de la matrice de masse les mêmes fonctions d'interpolation que celles utilisées pour construire la matrice de raideur ( $\mathbf{A} = \mathbf{N}$ ), la matrice de masse est dite **cohérente** ou **consistante**. Elle est symétrique mais non diagonale, définie et positive. Il est possible, dans certains programmes de calcul, d'avoir des fonctions d'interpolation différentes pour  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  ou des règles d'intégration différentes pour la construction de ces deux matrices.

La méthode la plus simple pour générer une matrice de masse et la plus rapide pour calculer les fréquences propres d'une structure consiste à attribuer à chaque nœud d'un élément qui en comporte  $n$ ,  $1/n$  de la masse totale de l'élément sur chaque degré de liberté de translation. La **matrice de masse** est

**diagonale.** Cette technique est utilisée en dynamique rapide. Dans le cas du crash, on se ramène à chaque pas de temps au système d'équations suivant :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \sum \mathbf{F}_{ext}$$

On y gagne beaucoup en temps de calcul quand la matrice de masse est diagonale car son inverse ne coûte rien. En implicite, il est rare que les matrices de masse soient diagonales. Puisque seuls les degrés de liberté de translation sont affectés d'une masse, pour les modèles ne comportant ni poutres ni coques, la matrice de masse est inversible. Pour les modèles comportant des poutres et/ou des coques, les degrés de liberté de rotation étant non alimentés en masse, la matrice de masse est non inversible, ce qui peut poser des problèmes numériques lors de la résolution selon l'algorithme employé. D'autre part, du fait de la mauvaise représentation des inerties en rotation, il faut un maillage sensiblement plus raffiné qu'avec un modèle à masse cohérente pour déterminer les fréquences propres avec une précision donnée.

Il est fréquent d'inclure dans un modèle à masse cohérente, une ou plusieurs **masses ponctuelles** (ou **masses concentrées**), complétées ou non d'inerties en rotation, pour modéliser des composants ou des sous-structures de la structure principale. Les caractéristiques globales (masse et inerties) sont appliquées au centre de gravité du sous-système représenté, ce centre de gravité étant généralement relié aux points d'attache réels de l'équipement sur la structure par un corps rigide. Une masse concentrée est un modèle. La matrice de masse associée est diagonale si les inerties introduites sont les inerties principales, non diagonale dans le cas contraire, mais elle n'est pas cohérente.

Si les fonctions de forme choisies pour représenter le comportement statique d'une poutre permettent d'obtenir la solution analytique sous charge concentrée ou répartie avec un seul élément, il n'en est pas de même en analyse modale. Les modes propres de vibrations transversales des poutres élancées sont des combinaisons linéaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques, alors que les fonctions de forme, quelle que soit la base fonctionnelle choisie, sont des fonctions du troisième degré en  $x$ . La poutre n'est pas un élément exact en analyse modale : le maillage des poutres (discrétisation) a une influence sur les fréquences calculées, indépendamment de la méthode de construction de la matrice de masse.

Les deux exemples suivants permettent de comparer la convergence des modèles en fonction de la constitution des matrices de masse.

### Exemple 1 :

Le premier exemple est celui d'une poutre encastree-libre, de caractéristiques mécaniques et physiques uniformes et pour laquelle on ne s'intéresse qu'aux flexions dans le plan  $xOy$ . La poutre est en acier, de longueur 1 m, de section

circulaire, de diamètre 14 mm. La poutre est suffisamment élancée pour que les effets d'effort tranchant et l'énergie cinétique de rotation des sections puissent être négligés : la solution analytique R.D.M. des poutres élancées sert de référence. Le modèle A est à masse diagonale : la masse volumique de la poutre est nulle et des masses ponctuelles sont appliquées sur chaque nœud du maillage qui comporte un nombre d'éléments variable. Le modèle B est à masse cohérente.

Réf. analytique		10,162 Hz	63,69 Hz	178,33 Hz	349,48 Hz	577,5 Hz
Nbre d'élts						
2	A	9,23 Hz	46,99 Hz			
	B	10,162 Hz	63,77 Hz			
4	A	9,879 Hz	58,07 Hz	153,77 Hz		
	B	10,162 Hz	63,69 Hz	178,39 Hz		
6	A	10,035 Hz	61,013 Hz	166,61 Hz	316,51 Hz	497,33 Hz
	B	10,162 Hz	63,69 Hz	178,33 Hz	349,52 Hz	578,20 Hz
8	A	10,090 Hz	62,157 Hz	171,34 Hz	330,35 Hz	535,85 Hz
	B	10,162 Hz	63,69 Hz	178,33 Hz	349,46 Hz	577,76 Hz
10	A	10,116 Hz	62,69 Hz	173,78 Hz	336,99 Hz	550,88 Hz
	B	10,62 Hz	63,69 Hz	178,33 Hz	349,45 Hz	577,68 Hz
15	A	10,142 Hz	63,24 Hz	176,28 Hz	343,82 Hz	565,63 Hz
	B	10,162 Hz	63,69 Hz	178,33 Hz	349,45 Hz	577,67 Hz
20	A	10,151 Hz	63,44 Hz	177,17 Hz	346,27 Hz	570,9 Hz
	B	10,162 Hz	63,69 Hz	178,33 Hz	349,45 Hz	577,67 Hz

Le modèle A converge par valeurs inférieures vers la solution, alors que le modèle B converge par valeurs supérieures. Il faut peu d'éléments pour obtenir une bonne estimation des fréquences avec le modèle B, alors qu'il en faut sensiblement plus avec le modèle A.

### Exemple 2 :

Le second exemple est celui d'une plaque mince, carrée, encastree sur un bord, de caractéristiques uniformes, pour laquelle on souhaite calculer les premiers

modes de vibrations transversales. La déformation due à l'effort tranchant est négligeable. La structure est en acier, de 1 m de côté et de 1 cm d'épaisseur. Le tableau suivant regroupe les cinq premières fréquences obtenues en fonction du maillage, exprimées en Hz. Pour l'analyse modale, il n'est pas indispensable de raffiner localement les maillages car seul le champ de déplacement est calculé : le maillage peut être régulier, de densité uniforme, et paraître relativement grossier. En statique, on calcule le champ de contrainte, discontinu d'un élément à l'autre, ce qui impose une densité de mailles importante là où il varie fortement.

MAILLAGE	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
3*3	8,655	21,023	54,645	66,873	75,813
5*5	8,665	21,153	53,612	67,333	76,630
10*10	8,669	21,209	53,322	67,667	77,012
20*20	8,672	21,241	53,186	67,892	77,247

## 16.7. ÉLÉMENTS DEFORMABLES À L'EFFORT TRANCHANT

Pour ce type d'éléments (poutres et coques), la rotation de section n'est pas égale à la dérivée du déplacement transversal. L'énergie cinétique en rotation des sections droites n'est plus négligeable devant l'énergie cinétique en translation transversale de ces sections, qui est la seule prise en compte dans le cas d'éléments non déformables à l'effort tranchant. En conséquence, pour des modes propres comparables, par exemple la première flexion dans le plan  $xOy$ , les fréquences propres sont plus basses pour les éléments déformables à l'effort tranchant et l'écart sur les fréquences entre les deux types d'éléments augmente d'autant plus que l'on avance dans le spectre des fréquences du système.

## 16.8. ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE MASSE

Il est réalisé comme l'assemblage de la matrice de raideur, par sommation des masses et inerties de tous les éléments connectés à un degré de liberté, après avoir effectué la projection des matrices de masse élémentaires dans le repère structural. La technique d'assemblage reste valable, que la masse soit cohérente ou diagonale sur chaque élément. En ce qui concerne les masses et inerties ponctuelles, il suffit de rajouter sur le degré de liberté concerné la masse ou l'inertie complémentaire, dans la matrice assemblée.

## 16.9. EXEMPLE

**Matrice de masse cohérente d'un élément de barre**

Le champ de déplacement dans une barre du premier degré non isoparamétrique peut s'écrire sous forme discrétisée :

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

où  $u_1$  et  $u_2$  sont les déplacements axiaux des deux extrémités de la barre dans son repère propre,  $N_1$  et  $N_2$  sont les deux fonctions de forme associées qui ont pour expression,  $L$  étant la longueur de la barre :

$$N_1(x) = 1 - x/L \quad \text{et} \quad N_2(x) = x/L$$

Si  $\rho$  est la masse volumique du matériau constitutif de la barre, la matrice de masse élémentaire cohérente a pour expression en repère propre :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = \rho S \int_0^L \begin{pmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x/L & x/L \end{pmatrix} dx \\ &= \rho S \int_0^L \begin{bmatrix} (1-x/L)^2 & (1-x/L)x/L \\ (1-x/L)x/L & x^2/L^2 \end{bmatrix} dx \\ \mathbf{M}_e &= \rho SL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m/3 & m/6 \\ m/6 & m/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La même relation et les mêmes calculs peuvent être faits pour les degrés de liberté  $v_1$  et  $v_2$  donnant finalement pour une barre dans le plan  $xOy$ , en rangeant les degrés de liberté dans l'ordre  $u_1, v_1, u_2, v_2$  :

$$\mathbf{M}_e = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \neq \quad \mathbf{M}_d = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ce résultat peut encore être étendu au cas d'une barre définie non plus dans un plan structural mais dans l'espace (matrice de masse de dimension 6. On vérifie que la matrice de masse est symétrique, et que son déterminant est non nul.

### **Degrés de liberté fixés en analyse modale.**

Le vecteur  $\mathbf{q}$  est partitionné en deux :  $\mathbf{q}_f$  contient tous les degrés de liberté fixés et  $\mathbf{q}_l$  contient tous les autres. L'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lf} \\ \mathbf{K}_{fl} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ll} & \mathbf{M}_{lf} \\ \mathbf{M}_{fl} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} = 0$$



On développe explicitement ce système puis on impose  $\mathbf{q}_f = 0$ .

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{ll}\mathbf{q}_l - \omega^2\mathbf{M}_{ll}\mathbf{q}_l = 0 \\ \mathbf{K}_{fl}\mathbf{q}_l - \omega^2\mathbf{M}_{fl}\mathbf{q}_l = 0 \end{cases}$$

Il reste deux équations en  $\mathbf{q}_l$  dans lesquelles les sous-matrices  $\mathbf{K}_{lf}$ ,  $\mathbf{K}_{ff}$ ,  $\mathbf{M}_{lf}$ , et  $\mathbf{M}_{ff}$  n'apparaissent pas : elles peuvent ne pas être déterminés et simplement remplacés par 0. En reprenant l'exemple du treillis de barres étudié dans le chapitre 7, on calcule les matrices de masse élémentaires puis la matrice assemblée. Pour les barres 1, 3, 4 et 5, de même raideur et dont une extrémité est encastrée, on a :

$$\mathbf{M}_e = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice de la barre 2, de dimension 4, et dont les deux nœuds sont libres, est donnée précédemment avec  $m = \rho SL$ . En rangeant les degrés de liberté dans l'ordre  $u_2, v_2, u_3, v_3$ , on obtient pour les degrés de liberté libres après assemblage

$$\mathbf{M} = \frac{\rho S}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

## 16.10. COMPLEMENTS

En analyse modale, il ne peut y avoir de chargement et tout doit être strictement linéaire (ni jeux ni contacts). Si un chargement initial ou les contraintes dues à l'assemblage de la structure sont tels qu'il en résulte une modification de sa matrice de raideur, l'analyse modale doit en tenir compte. Cela s'effectue par la succession de deux analyses, comme pour une précontrainte en statique (cf. chapitre 15). La première est statique : la structure est soumise au chargement, ou à la procédure d'assemblage qui y crée des contraintes initiales. On résout  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{q}$  qui fournit l'état de contrainte  $\sigma$ . On construit alors la matrice de raideur géométrique  $\mathbf{K}_\sigma$  à partir de cet état de contrainte puis on calcule les valeurs propres du système

$$[(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{q} = 0$$

Dans le cas de masses concentrées, le problème résolu s'écrit,  $\mathbf{M}_c$  étant la matrice associée aux degrés de liberté affectés par ces masses :

$$[\mathbf{K} - \omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{M}_c)]\mathbf{q} = 0$$

S'il faut tenir compte de la précontrainte et des masses concentrées, on résout

$$[(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) - \omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{M}_c)]\mathbf{q} = 0$$

Dans le cas d'une pièce pour laquelle une symétrie est exploitable, il est important d'en profiter dans le cas d'une analyse statique linéaire. Dans le cas d'une analyse modale, l'utilisation des conditions de symétrie ne permet d'accéder qu'à la moitié des fréquences : celle qui correspond aux modes propres présentant la symétrie. Il faut effectuer une seconde analyse modale avec cette fois-ci des conditions d'antisymétrie pour accéder à l'autre moitié des fréquences (celle qui correspond aux modes propres présentant l'antisymétrie), puis réunir les deux spectres partiels pour reconstituer la base modale et la suite ordonnée des fréquences propres. En pratique, les conditions de symétrie ne sont pas exploitées en dynamique et les calculs sont réalisés sur une structure complète (Figure 16.2). Le cas exceptionnel est par exemple celui d'une structure axisymétrique dont on étudie l'évolution du premier mode de vibration axisymétrique en fonction d'un apport de masse, de la température...

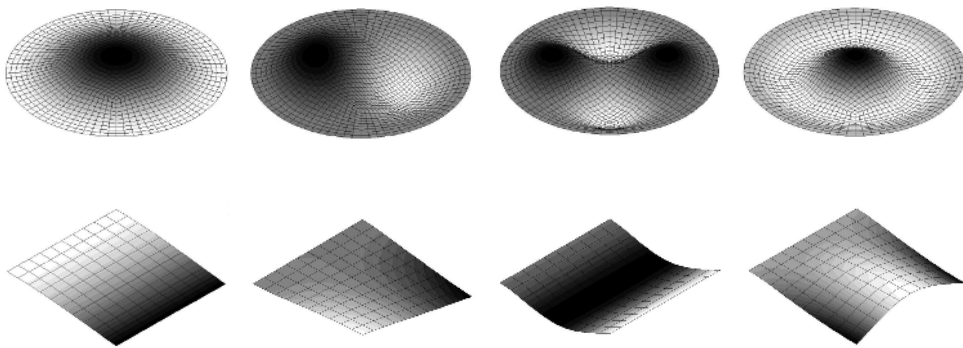


Figure 16.2 : Quatre premiers modes pour une plaque circulaire encastree sur toute sa periphery et une plaque carrée encastree sur un coté

En statique, quand il y a une erreur dans le système d'unité, comme on a généralement une idée de l'ordre de grandeur que l'on cherche, on trouve assez facilement d'où vient le facteur  $10^n$  observé dans les résultats. En dynamique, quand il y a une erreur dans le système d'unité, comme on n'a généralement pas d'idée de l'ordre de grandeur que l'on cherche, il est très difficile de trouver l'erreur, d'autant plus qu'un facteur 1000 sur un module se traduit par un facteur  $10\sqrt{10}$  sur les fréquences. Cela permet d'insister sur l'examen attentif du

fichier de résultat dans lequel on trouve la masse de la structure, la position de son centre d'inertie, la matrice d'inertie éventuellement exprimée dans plusieurs repères (structural centré à l'origine, principal centré au centre d'inertie). Si ces grandeurs n'ont pas la bonne valeur par rapport à des données globales ou par rapport à des évaluations faites en CAO, les fréquences calculées ne sont pas correctes. En mécanique, il n'y a que trois unités indépendantes. Si on choisit le mètre, le Newton et la seconde, l'unité de masse est le kilogramme et la masse volumique est en  $\text{kg/m}^3$ . Si on choisit le millimètre, le Newton et la seconde, l'unité de masse est la tonne et la masse volumique doit être exprimée en  $\text{t/mm}^3$ .

Le système d'unités peut avoir une influence sur le conditionnement numérique du problème modal, et donc sur les fréquences calculées. Pour une structure de grandes dimensions, les fréquences propres sont de l'ordre de quelques Hertz ou quelques dizaines de Hertz :  $\omega^2$  est « raisonnable »,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont presque du même ordre de grandeur quelque soit le système cohérent d'unité choisi. Dans le cas d'une structure de faibles dimensions (quelques millimètres) dont les cotes sont exprimées en mètres, les fréquences peuvent être de plusieurs centaines voire quelques milliers de Hertz (par exemple 1000 Hz) :  $\omega^2$  est très grand (environ  $4 \times 10^7$ ),  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  ont des ordres de grandeur différents : il y a risque de déconditionnement numérique. En utilisant le Newton, le millimètre et la seconde, et en gardant les masses volumiques en  $\text{kg/m}^3$  ce qui est incohérent du point de vue unités, les fréquences cherchées s'expriment en kHz donc les matrices sont du même ordre de grandeur et il n'y a plus le risque de déconditionnement.

La formule  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est applicable dans le cas de systèmes discrets masses-

ressorts. Quand on enlève de la masse, la raideur ne changeant pas, la fréquence augmente. Quand on accroît la raideur, la masse ne changeant pas, la fréquence augmente également. Dans le cas d'une structure continue, la formule précédente n'est pas applicable et elle ne permet donc pas de prévoir quel sera le sens de l'évolution des fréquences quand on enlève de la matière. Raideur et masse sont liées, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes masses-ressorts : il est difficile de prévoir si c'est le dénominateur ou le numérateur qui subit la plus forte évolution.

Soit une plaque cantilever, carrée de côté 1 m, de 1 cm d'épaisseur, en acier dont on calcule la première fréquence propre. On enlève ensuite une même quantité de matière en pratiquant deux perçages différents, de même surface. Selon la position du perçage, la première fréquence augmente ou diminue : on imagine aisément que pour certaines configurations, la fréquence ne change pas (Figure 16.3).

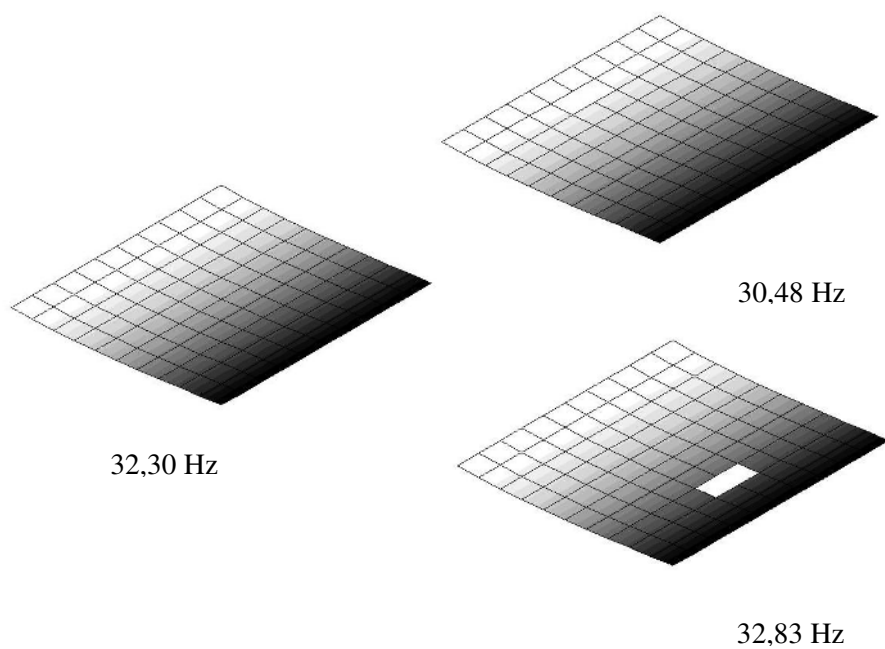


Figure 16.3 : Première fréquence propre pour diverses plaques cantilever



## Chapitre 17

### Résolution du problème aux valeurs propres

#### 17.1. PRESENTATION

Les pulsations propres d'une structure non dissipative sont les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \quad \text{ou encore} \quad (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{x} = 0$$

ce qui revient à trouver les valeurs de  $\lambda$  telles que le déterminant de la matrice  $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})$  soit nul. Cette matrice a pour dimension le nombre de degrés de liberté indépendants du modèle : plusieurs milliers voire centaines de milliers. Les techniques mathématiques classiques de calcul d'un déterminant ou de calcul des zéros du polynôme caractéristique ne sont pas applicables car nécessitent un nombre d'opérations et des ressources informatiques rédhibitoires. Un certain nombre de méthodes numériques ont été développées pour permettre la résolution de problèmes aux valeurs propres de grande taille. Certaines méthodes utilisent la totalité des degrés de liberté du système, d'autres supposent la réduction préalable de la taille du système, l'opération de condensation devant altérer le moins possible les fréquences cherchées. Les techniques de super-élément, objet d'un chapitre particulier, font partie des méthodes avec condensation. Aujourd'hui, les méthodes généralement utilisées dans les programmes d'analyse modale pour calculer les fréquences propres sont la méthode Lanczos et la méthode Lanczos par blocs, qui présentent de nombreux avantages par rapport aux méthodes plus classiques (puissance, itération sur le sous-espace...). Ces méthodes permettent de déterminer des valeurs propres proches ou confondues, sans limitation de taille autre que celle due à la machine : la condensation n'est pas nécessaire. Couplées à un sparse solver qui est une technique d'inversion de système linéaire indépendante de l'analyse modale, ces méthodes d'extraction de valeurs propres gagnent encore en efficacité : par rapport aux méthodes d'inversion classiques, il y a une réduction du temps CPU et des ressources informatiques nécessaires.

## 17.2. FORME SYMETRIQUE POUR LE PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

Si  $\mathbf{K}$  est inversible, ce qui est toujours le cas par le filtrage initial des modes rigides, alors  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x}$  est équivalent à

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega^2}\mathbf{x} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Le calcul des fréquences propres se ramène donc à la recherche des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{S} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$  appelée **matrice de flexibilité dynamique** ou **matrice d'itération**. En pratique, elle n'est pas mise en place de la sorte. Le produit de deux matrices est très coûteux surtout si elles sont de dimension importante, et le produit de deux matrices symétriques n'est pas une matrice symétrique. Cela impose le stockage de toute la matrice produit. Ce n'est donc pas intéressant. Lorsque la matrice de masse est inversible, on peut travailler de façon équivalente. Si la matrice de masse est diagonale, le calcul de son inverse puis le produit  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  sont peu coûteux, la matrice produit est diagonale. Mais en pratique, les matrices de masse sont cohérentes, ce qui ramène aux difficultés précédentes.

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Si on décompose la matrice de raideur selon la technique de Cholesky,  $\mathbf{L}$  étant une matrice triangulaire inférieure, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T &\Rightarrow \mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{x} \\ &\Rightarrow \mathbf{L}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{L}^T\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{L}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{y} = \omega^2\mathbf{y} \\ &\quad \mathbf{L}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L} \text{ symétrique} \quad \mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{aligned}$$

La méthode basée sur la factorisation de la matrice de raideur n'est utilisable que si cette matrice est définie positive, ce qui suppose qu'il n'y a pas de mode rigide ou qu'ils sont préalablement filtrés. Cela ne résout pas les problèmes rencontrés lorsque la matrice de masse est singulière (degré de liberté non alimenté en masse), ou lorsqu'il existe des contraintes linéaires entre degrés de liberté, traitées par des multiplicateurs de Lagrange (contraintes cinématiques, corps rigides, condition de planéité, collage de modèles ou de maillages...). Il existe alors des termes négatifs sur la diagonale de la matrice de raideur, qui ne peuvent pas être le carré du terme diagonal associé dans la matrice  $\mathbf{L}$ . En décomposant la matrice de masse  $\mathbf{M}$  sous la forme  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$  et en faisant le changement de variable  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$  on obtient :

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \frac{1}{\omega^2}\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{L}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \frac{1}{\omega^2}\mathbf{L}^T\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{S}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$$

La matrice **S** ainsi formée est une matrice d'itération symétrique, ce qui permet de n'en stocker qu'une partie. Les valeurs propres de ce nouveau système sont les inverses de celles du système initial. Le retour aux vecteurs propres **x** s'effectue sans problème car **L** est une matrice triangulaire. Les vecteurs propres **x** ne sont pas orthogonaux au sens classique, mais les vecteurs **y** le sont.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 0 \quad \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left( \frac{1}{\lambda} \mathbf{M} \mathbf{x} \right) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 0$$

Les méthodes utilisant cette technique de décomposition déterminent les valeurs propres par ordre décroissant  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$ , ce qui fournit les fréquences propres de la structure par ordre croissant.

Une grande différence entre l'analyse statique linéaire réalisée par une méthode directe (Gauss...) et l'analyse modale est que l'analyse statique linéaire est non itérative alors que l'analyse dynamique l'est. Pour un calcul statique linéaire, si la matrice de raideur est inversible, la solution au problème posé est :

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

Cette solution est mathématiquement exacte. Le déplacement **q** est obtenu par une triangularisation et une substitution inverse. En analyse modale, on utilise des méthodes numériques itératives qui convergent vers les valeurs propres et les vecteurs propres. Il faut des outils spécifiques pour contrôler la solution obtenue et arrêter le processus (calcul de bornes d'erreur, coefficient de mesure d'erreur...). Les calculs modaux sont donc plus longs que les calculs statiques, requièrent des ressources informatiques plus importantes, la précision demandée sur les valeurs propres ou les modes propres et leur nombre ayant une influence sensible sur le temps de calcul et l'espace disque nécessaire. Les méthodes d'analyse modale ne donnent que des solutions numériques approchées.

### 17.3. METHODE DE JACOBI

Cette méthode permet de calculer toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique quelconque, qu'elles soient positives, négatives ou nulles. Le problème aux valeurs propres initial est transformé en un problème symétrique de la forme  $\mathbf{S} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$ . Cette matrice **S** subit une succession en théorie infinie de transformations orthogonales pour la rendre diagonale, les termes diagonaux obtenus étant les valeurs propres cherchées. En pratique, on arrête les itérations lorsque les termes extra-diagonaux deviennent inférieurs à un seuil fixé. Malgré sa simplicité et sa stabilité, cette méthode nécessite un nombre d'itérations proportionnel au nombre de chiffres significatifs demandé et au carré de la taille de la matrice : en pratique on évite de l'utiliser au-delà de 50 degrés de liberté. Dans le cas de méthodes étagées, lorsque le problème initial est ramené à un



problème de faible taille par une technique de condensation ou de projection, la méthode de Jacobi est souvent utilisée. On construit une suite de matrices  $\mathbf{S}_k$  vérifiant la relation de récurrence suivante, les matrices  $\mathbf{R}_k$  étant orthogonales, le spectre des valeurs propres est invariant vis-à-vis de la transformation.

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k = \mathbf{I}$$

La matrice de rotation a une forme particulière : elle est orthogonale, l'élément extra-diagonal  $s_k^{pq}$  est annulé par la transformation,  $\mathbf{S}_{k+1}$  ne diffère de  $\mathbf{S}_k$  que par leurs lignes et leurs colonnes  $p$  et  $q$ . Géométriquement, la transformation  $\mathbf{R}_k$  correspond à une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan défini par les vecteurs unitaires  $e_p$  et  $e_q$ . La matrice de rotation doit être évaluée à chaque itération, la matrice de flexibilité aussi d'où le coût de cette méthode.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cos \theta & \sin \theta & \\ & & & 1 & \\ & & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tg}(2\theta) = \frac{2s_{pq}}{s_{qq} - s_{pp}}$$

La rotation d'angle  $\theta$  dans le plan défini par les vecteurs  $e_p$  et  $e_q$  a pour but d'annuler le terme extra-diagonal  $s_{qp}$ . Ce terme réapparaît par certaines des rotations ultérieures, mais sa valeur est plus petite que celle qu'il avait avant qu'on ne le fasse passer à zéro, d'où le caractère itératif de la méthode. Le processus est convergent et au bout d'un nombre infini de rotations, tous les termes extra-diagonaux tendent vers zéro. Les valeurs propres sont toutes déterminées simultanément, le processus ne peut pas être stoppé en cours de route. En pratique, elle est utilisée à deux niveaux dans certains codes de calcul : pour la diagonalisation du tenseur d'inertie et pour le calcul des contraintes principales dans un élément fini à partir de la matrice des contraintes car les matrices dont on cherche les valeurs propres sont de dimension 3 ou 6.

## 17.4. PUISSANCE ET MULTI-ITERATION

La **méthode de la puissance** est à la base de toutes les méthodes d'itération sur les vecteurs propres. Un des avantages par rapport à la méthode précédente est qu'on ne calcule que le nombre de valeurs propres désiré. La résolution du problème aux valeurs propres  $\mathbf{S}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$  est effectuée en construisant une suite de

vecteurs qui converge vers le mode cherché. La matrice de flexibilité dynamique est symétrique, et n'est pas réévaluée à chaque itération. On suppose toutes les valeurs propres du problème sont distinctes et rangées dans l'ordre décroissant :

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$$

A partir d'un vecteur arbitraire  $\mathbf{z}_0$ , on définit les **itérés** par la relation de récurrence suivante

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{S}\mathbf{z}_{p-1} = \mathbf{S}^p \mathbf{z}_0$$

Le vecteur  $\mathbf{z}_p$  tend vers le premier vecteur propre et la valeur propre est le rapport de n'importe quelle composante non nulle de deux itérés successifs. En effet, le vecteur  $\mathbf{z}_0$  peut toujours se décomposer dans la base des modes propres que l'on cherche.

$$\mathbf{z}_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j \text{ et } \mathbf{S}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{z}_1 = \mathbf{S}\mathbf{z}_0 = \mathbf{S}(\sum \alpha_j \mathbf{x}_j) = \sum \alpha_j \mathbf{S}\mathbf{x}_j = \sum \alpha_j \lambda_j \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{S}\mathbf{z}_1 = \mathbf{S} \sum \alpha_j \lambda_j \mathbf{x}_j = \sum \alpha_j \lambda_j^2 \mathbf{x}_j \Rightarrow \mathbf{z}_p = \lambda_1^p \left\{ \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^p \mathbf{x}_j \right\}$$

Toutes les valeurs étant distinctes et rangées dans l'ordre décroissant, lorsque le nombre d'itérations devient suffisamment grand, les rapports tendent vers 0. En pratique, le rapport entre la norme d'un itéré et la norme de son suivant se stabilise et tend vers la valeur propre  $\lambda_1$  qui correspond à la première fréquence propre de la structure. Le vecteur  $\mathbf{z}_p$  est alors colinéaire au vecteur propre cherché  $\mathbf{x}_1$ . Il existe plusieurs critères de convergence, dont l'un sur la valeur propre et l'autre sur la norme de l'écart entre deux itérés successifs.

$$\left| \frac{\lambda_{1,p+1}}{\lambda_{1,p}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \|\mathbf{z}_{p+1} - \mathbf{z}_p\| < \varepsilon$$

Si par hasard, la composante  $\alpha_1$  était nulle lors de la génération du vecteur aléatoire initial, on trouverait quand même la première valeur propre par apparition d'erreurs d'arrondi qui finiraient par injecter dans les itérés une composante non nulle sur le premier vecteur propre. On s'affranchit de la croissance ou de la décroissance des itérés successifs en normant le vecteur  $\mathbf{z}_p$  après chaque itération. On prend ensuite un autre vecteur de départ, orthogonal à celui qui vient d'être déterminé. On ne peut pas lui faire subir exactement la boucle précédente car, du fait des approximations numériques, on injecterait dans les itérés une composante non nulle sur le premier vecteur propre et on

retrouverait ce premier vecteur propre. On construit donc une autre matrice de flexibilité symétrique, de dimension  $n-1$ , de sorte qu'une éventuelle composante non nulle sur le vecteur  $\mathbf{x}_1$  soit systématiquement filtrée : on met en place un opérateur de projection. On applique ce processus pour maintenir les itérés successifs orthogonaux aux vecteurs propres déjà calculés.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{P}_1 \mathbf{S} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1} \right) \mathbf{S} & \mathbf{S}_2 &= \mathbf{P}_2 \mathbf{S} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1} \right) \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}_2^T \mathbf{M} \mathbf{x}_2} \right) \mathbf{S} \quad \dots \\ \mathbf{S}_1 \mathbf{x}_1 &= \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1} \right) \mathbf{S} \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1} \right) \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \left( \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1} \right) = \lambda_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1) = 0 \end{aligned}$$

Cette méthode est aujourd'hui peu utilisée car elle ne permet de déterminer qu'une seule fois les valeurs propres confondues (la base modale est donc incomplète pour la réponse dynamique), et converge très mal lorsque des valeurs propres sont proches l'une de l'autre. D'autre part, la matrice de flexibilité dynamique doit être explicitement reconstruite après calcul d'un vecteur propre pour trouver le suivant. Le nombre d'itérations pour déterminer un mode à une précision donnée ne dépend pas de la taille du problème mais seulement du rapport entre deux valeurs propres successives. Une variante de cette méthode est la **méthode de la puissance inverse** qui ne nécessite pas le calcul explicite de la matrice de flexibilité dynamique mais qui présente les autres inconvénients de la méthode de base.

La **méthode de multi-itération** (ou itération sur le sous-espace) est une méthode de la puissance inverse où, au lieu de travailler avec un vecteur, on travaille simultanément avec plusieurs vecteurs  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p$ ,  $p$  étant le nombre de valeurs propres cherchées. Après la génération de  $p$  vecteurs aléatoires, on les rend orthogonaux en utilisant par exemple la technique d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. On impose aux itérés successifs de rester orthogonaux entre eux et de vérifier la relation suivante

$$\mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i = \mathbf{I}$$

Si  $\mathbf{Y}_0 = [\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_2^0, \dots, \mathbf{y}_p^0]$  est la matrice contenant les  $p$  vecteurs aléatoires, la matrice des itérés  $\mathbf{Y}_i$  converge vers la matrice des premiers modes propres

$$\mathbf{K} \mathbf{Y}_i = \mathbf{M} \mathbf{Y}_i \mathbf{\Lambda}$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale des valeurs propres. Les  $p$  vecteurs de la matrice  $\mathbf{Y}_i$  sont proches des  $p$  vecteurs propres cherchés (matrice  $\mathbf{X}$ ), qui forment une base du sous-espace de dimension  $p$ . On peut donc écrire

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}_i \mathbf{Q}$$

où  $\mathbf{Q}$  est la matrice carrée d'ordre  $p$  contenant les coefficients des combinaisons linéaires : c'est le **problème d'interaction**. On obtient le nouveau système, de taille réduite par rapport au problème initial

$$\mathbf{K}\mathbf{Y}_i\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{Y}_i\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} \quad \text{soit} \quad \mathbf{K}^*\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$$

en prémultipliant par  $\mathbf{Y}_i^T$ . Les  $p$  premières valeurs propres du système complet sont les valeurs propres du système réduit. Cette méthode est très fiable, converge vite et sépare correctement les modes propres confondus ou proches. Elle nécessite cependant un espace mémoire important ce qui fait qu'elle est en général précédée d'une condensation de manière à restreindre la taille du problème initial, condensation qui altère la valeur des fréquences propres de la structure.

D'autre part, le taux de convergence est proportionnel au rapport  $\left( \frac{\omega_j}{\omega_{p+1}} \right)^2$ ,

caractérisé par la première valeur propre au-delà des fréquences propres cherché. On complète donc la matrice  $\mathbf{Y}_0$  de départ par un certain nombre de vecteurs tampons dont le rôle est d'améliorer la convergence.

## 17.5. METHODE DE LANCZOS ET DE LANCZOS PAR BLOC

C'est la variante de la méthode de la puissance la plus performante pour extraire un nombre donné de valeurs propres en un nombre minimum d'itérations. La loi d'itération est donnée par

$$\mathbf{x}_0 \text{ arbitraire} \quad \mathbf{y}_p = \mathbf{M}\mathbf{x}_p \quad \mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{y}_p$$

On impose aux itérés de vérifier la relation

$$\gamma_{p+1}\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_p - \alpha_p\mathbf{x}_p - \beta_{p-1}\mathbf{x}_{p-1}$$

tout en restant orthogonaux selon la loi

$$\mathbf{x}_{p+1}^T \mathbf{y}_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \leq p \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_p^T \mathbf{y}_p = \mathbf{x}_p^T \mathbf{M} \mathbf{x}_p = 1$$

Les coefficients  $\alpha_p$  et  $\beta_{p-1}$  se calculent par récurrence en imposant l'orthogonalité du vecteur  $\mathbf{x}_{p+1}$  par rapport aux vecteurs  $\mathbf{x}_p$  et  $\mathbf{x}_{p-1}$ . On forme ainsi une matrice tri-diagonale  $\mathbf{T}_p$ , c'est-à-dire ne comportant qu'un terme non nul au-dessus et un terme non nul en dessous de la diagonale, dont les valeurs propres sont celles du système initial. Profitant du fait que les coefficients  $\beta_{p-1}$  et  $\gamma_p$  sont égaux, la matrice tri-diagonale s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \gamma_p \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_p & \alpha_p \end{bmatrix}$$

Cette méthode, extrêmement performante, a une mise en œuvre délicate qui se traduit par une instabilité numérique du processus, et elle ne permet pas de détecter des valeurs propres multiples. Une amélioration de cette méthode consiste à la coupler à une méthode de multi-itération permettant ainsi de détecter les valeurs propres multiples et de limiter le saut éventuel de certaines solutions lors de la résolution, saut qui n'apparaît que lorsque les modes sont complètement découplés. Cette méthode est la méthode de Lanczos par blocs.  $\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_p$  est l'itéré de  $\mathbf{x}_p$ .

Le quotient de Rayleigh associé est défini par :  $\rho_0 = \frac{\mathbf{x}_p^T \mathbf{K} \mathbf{x}_p}{\mathbf{x}_p^T \mathbf{M} \mathbf{x}_p}$

Le quotient de Schwarz associé est défini par :  $\rho_1 = \frac{\mathbf{x}_p^T \mathbf{M} \mathbf{x}_p}{\mathbf{x}_p^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{p+1}}$

Le coefficient de mesure d'erreur  $\sigma$  est défini par :

$$\sigma^2 = \frac{\rho_0}{\rho_1} - 1$$

L'évaluation de ce coefficient permet de détecter et éventuellement de rejeter des solutions parasites, souvent liées à un mauvais conditionnement numérique des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

## 17.6. PIVOTS EN ANALYSE MODALE

En analyse modale, les structures peuvent être extérieurement hypostatiques : avion, fusée, satellite, pour ne citer que ces exemples. Les modes rigides peuvent être considérés comme des modes propres de fréquence nulle (donc de période infinie) : ces modes ont un sens physique. Numériquement, ils sont associés à des pivots nuls détectés lors de la construction de la matrice de flexibilité dynamique symétrique.

Des **pivots négatifs** peuvent apparaître lors de l'extraction des valeurs propres, dans deux cas bien identifiés. Lorsque le modèle comporte des corps rigides, chaque contrainte linéaire est associée à un multiplicateur de Lagrange qui

donne un pivot négatif. Il faut donc contrôler que le nombre de pivots négatifs est égal au nombre de multiplicateurs. Si le nombre de pivots négatifs est inférieur au nombre de multiplicateurs, des **pivots nuls** doivent être détectés lors de la résolution. Il faut contrôler que l'origine de ces pivots nuls n'est pas donnée par la formule du paragraphe 5.3.2, et que le nombre de ces pivots nuls ajouté au nombre de pivots négatifs est égal au nombre de contraintes linéaires. Cela signifie qu'il existe des contraintes redondantes ou satisfaites indépendamment des conditions de corps rigide. En analyse modale, quand on extrait les valeurs propres par la technique de la **translation spectrale**, on ne cherche pas les fréquences dans l'ordre croissant à partir de 0 Hz, mais autour d'une fréquence centrale  $\nu_0$  associée à la pulsation  $\omega_0$ . On résout le problème translaté en retranchant aux deux membres  $\omega_0^2 \mathbf{M} \mathbf{q}$  :

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = (\omega^2 - \omega_0^2) \mathbf{M} \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{K}^* \mathbf{q} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{q}$$

Le nombre de pivots négatifs de la matrice  $\mathbf{K}^*$  (s'il n'existe pas de contraintes linéaires qui introduisent également des pivots négatifs) est égal au nombre de fréquences inférieures à la fréquence centrale  $\nu_0$ . Cette technique n'est valable que pour extraire un petit nombre de fréquences autour de la porteuse, de manière à éviter le problème de la « confusion » de modes et leur mauvaise séparation. Pour les problèmes hypostatiques, la translation spectrale permet d'éliminer la singularité de la matrice de raideur.

## 17.7. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

La température a une influence sur les fréquences propres dont la valeur change, mais pas sur la forme des modes propres pour les structures constituées d'un seul matériau. Le module d'Young diminue quand la température augmente. La

formule  $\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}}$  qui n'a aucun sens car  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont des matrices, est

cependant utilisable pour estimer l'évolution de la fréquence en fonction de la température : puisque la masse ne change pas sous l'effet de la température, la fréquence est proportionnelle à la racine carrée du module d'Young que l'on peut mettre en facteur pour la matrice de raideur.

Par contre, le coefficient de dilatation thermique et la température de la structure par rapport à l'état thermiquement non contraint n'ont pas d'influence sur les fréquences. En effet, l'analogie de Duhamel (cf. paragraphe 14.3) consiste à introduire sur la structure isotherme des forces supplémentaires qui rendent compte des contraintes engendrées par la dilatation thermique. Or les charges ne sont pas prises en compte en analyse modale. Si besoin est, il faut faire une analyse statique à la température souhaitée, la charge étant la charge thermique. Puis on réalise une analyse modale avec précontrainte, la charge

thermique ayant pour conséquence une modification de la matrice de raideur, si l'effet de cette « précontrainte » est significatif. Pour les structures constituées de plusieurs matériaux, les modes peuvent se croiser car les variations de propriétés ne sont plus globales : elles dépendent du matériau de chaque élément fini du modèle, et tous les matériaux n'ont pas la même variation de propriétés avec la température.

## Chapitre 18

### Réponse dynamique

#### 18.1. GENERALITES

Il existe plusieurs types d'excitation et donc plusieurs types de réponses pour une structure mécanique : transitoire, harmonique, périodique, spectrale, aléatoire. Dans cet ouvrage, seules les réponses transitoires et harmoniques seront étudiées. Les autres sont détaillées dans des ouvrages de dynamique spécialisés. L'équation générale régissant le mouvement d'une structure amortie soumise à une excitation  $\mathbf{g}$  est

$$\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{F}_a + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}$$

Lorsque  $\mathbf{g}$  est une fonction du temps  $\mathbf{g}(t)$  et que l'on s'intéresse à la réponse du système au cours du temps, on réalise une **réponse transitoire**. La solution dépend alors des conditions initiales. Lorsque la variation temporelle de  $\mathbf{g}$  est une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et que l'on s'intéresse à la réponse en amplitude du système en fonction de  $\omega$ , on réalise une **réponse harmonique**. La solution est indépendante des conditions initiales.  $\mathbf{F}_a$  est le terme d'amortissement qui peut prendre plusieurs formes. La plus utilisée et qui correspond à un **amortissement visqueux**, est

$$\mathbf{F}_a = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$$

La réponse transitoire peut être traitée par intégration pas à pas des équations du mouvement (**intégration directe**) ou par projection dans la base modale et intégration du système d'équations modales (**superposition modale**). Dans le cas de la réponse harmonique, la résolution s'effectue généralement par **superposition modale**, mais elle peut également être menée par la **méthode directe**. La superposition modale est basée sur l'utilisation de combinaisons linéaires, ce qui implique que la réponse est linéaire. L'intégration directe est une méthode plus générale, qui permet de traiter des problèmes non linéaires et



des problèmes à haut contenu fréquentiel tels les chocs. Elle est relativement coûteuse et l'un de ses inconvénients est la détermination du choix judicieux du pas de temps pour l'intégration temporelle.

Dans le cas de structures faiblement amorties, quand l'amortissement est pris en compte et si le comportement mécanique reste strictement linéaire, la correction à apporter sur les fréquences propres et les vecteurs propres de la structure non amortie associée est souvent négligeable. On peut utiliser les modes  $\mathbf{x}_i$  et les pulsations propres  $\omega_i$  du système libre non amorti pour la réponse dynamique.

## 18.2. AMORTISSEMENT STRUCTURAL

Les mécanismes dissipatifs existent dans toutes les structures mécaniques mais leur répartition est en général mal connue. L'**amortissement visqueux** est principalement dû aux frottements internes et se met sous la forme.

$$\mathbf{F}_a = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$$

Il est proportionnel à la vitesse en transitoire, à la fréquence en harmonique car la vitesse s'écrit alors  $\dot{\mathbf{q}} = j\omega\mathbf{q}$ . Le **frottement sec**, ou **amortissement de Coulomb**, se produit lors du glissement d'un corps sur une surface sèche. Il peut prendre deux formes :

$$\mathbf{F}_a = -\text{signe}(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{F}_S \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_a = -\text{signe}(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{F}_D$$

Dans le premier cas, la force de frottement est constante (**frottement statique**  $\mathbf{F}_S$ ) ; dans le second cas, la force de frottement dépend de la réaction normale de contact  $\mathbf{R}$  (**frottement dynamique**  $\mathbf{F}_D$ ). Ce type d'amortissement pose un problème numérique car la force dépendant du signe de la vitesse et non de la vitesse, son expression est discontinue dans le temps. L'équation générale devient alors non linéaire mais peut être linéarisée par morceaux. Ici,  $\dot{\mathbf{q}}$  est la vitesse relative des degrés de liberté en contact sur lesquels le frottement agit et non la vitesse de tous les degrés de liberté de la structure. Il est extrêmement difficile de déterminer pour une structure réelle quelle est la part des différents amortissements qui interviennent dans sa réponse dynamique. On utilise souvent un amortissement visqueux qui englobe tous les mécanismes de dissipation et qu'il est facile de manipuler mathématiquement.

## 18.3. TRANSITOIRE PAR SUPERPOSITION MODALE

### 18.3.1. Equations normales

Les  $N$  vecteurs propres  $\mathbf{x}_i$  d'une structure non amortie, tous linéairement indépendants, forment une base de l'espace de dimension  $N$ . Tout vecteur  $\mathbf{q}$

peut donc s'exprimer, à chaque instant, comme une combinaison linéaire unique des vecteurs propres

$$\mathbf{q}(t) = \sum \eta_i(t) \mathbf{x}_i$$

La forme d'un mode propre  $\mathbf{x}_i$  ne dépend pas du temps, c'est son amplitude  $\eta_i$  appelée **intensité modale** qui en dépend. Il en découle

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum \dot{\eta}_i(t) \mathbf{x}_i \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \sum \ddot{\eta}_i(t) \mathbf{x}_i$$

Dans le cas de l'amortissement visqueux, on introduit les **coefficients d'amortissement généralisé**  $\beta_{ij}$  par la relation

$$\beta_{ij} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j$$

L'équation générale s'écrit alors, en utilisant cette décomposition

$$\mathbf{K}(\sum \eta_i(t) \mathbf{x}_i) + \mathbf{B}(\sum \dot{\eta}_i(t) \mathbf{x}_i) + \mathbf{M}(\sum \ddot{\eta}_i(t) \mathbf{x}_i) = \mathbf{g}(t)$$

En prémultipliant l'équation ci-dessus par  $\mathbf{x}_1^T$  puis par  $\mathbf{x}_2^T$ , jusqu'à  $\mathbf{x}_N^T$  et en utilisant les relations d'orthogonalité entre modes, on obtient un ensemble d'équations dites **équations normales**. Elles s'écrivent :

$$\gamma_{ij} \eta_i + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \dot{\eta}_i + \mu_{ij} \ddot{\eta}_i = \mathbf{x}_j^T \mathbf{g}(t)$$

Ces équations sont couplées via l'amortissement, elles doivent toutes être résolues simultanément. En projetant dans la base des modes propres, on n'a donc rien gagné par rapport au système de départ. C'est même encore pire car on travaille avec les  $N$  modes propres de la structure. On ne les connaît pas tous, et si on pouvait les calculer, seuls les premiers ont un sens physique, les autres sont dus à la discrétisation (règle des 10%). Mais dans l'hypothèse où une combinaison linéaire des quelques modes propres calculés est suffisante pour représenter la réponse temporelle de la structure, il est intéressant de travailler avec une **base modale réduite**. La décomposition est alors

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \mathbf{x}_i \quad \text{avec} \quad n \ll N$$

On passe d'un système de dimension  $N$  à un système de dimension  $n$ . Les problèmes liés à cette troncature sont abordés dans le paragraphe 18.3.5. Il y a  $n$  équations normales couplées et non  $N$ .

$$\gamma_{ij}\eta_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}\dot{\eta}_i + \mu_{ij}\ddot{\eta}_i = \mathbf{x}_j^T \mathbf{g}(t)$$

### 18.3.2. Hypothèse de Rayleigh

L'**hypothèse de Rayleigh** est une hypothèse simplificatrice, qui n'a aucun fondement physique et bien qu'on la trouve dans la plupart des programmes de calcul, son utilisation n'est pas recommandée. Si la matrice d'amortissement **B** est une combinaison linéaire des matrices masse et raideur, en utilisant les relations d'orthogonalité entre les modes propres, on a

$$\beta_{ij} = \mathbf{x}_j^T \mathbf{B} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j^T (\alpha \mathbf{K} + \delta \mathbf{M}) \mathbf{x}_i = (\alpha \gamma_i + \delta \mu_i) \delta_{ij}$$

Si  $i$  est différent de  $j$ , le coefficient  $\beta_{ij}$  est nul : les équations normales sont toutes découplées, c'est-à-dire indépendantes les unes des autres même lorsqu'il y a de l'amortissement. Cette hypothèse de proportionnalité simplifie considérablement la résolution du problème, les équations normales s'écrivent :

$$\ddot{\eta}_i + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{g}(t)}{\mu_i}$$

$\frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{g}(t)}{\mu_i}$  est le **facteur de participation** du mode  $\mathbf{x}_i$  dans la sollicitation, c'est la composante de la charge à un instant donné dans la base modale réduite.

$$\mathbf{g}(t) = \sum \xi_i \mathbf{x}_i \quad \text{avec} \quad \xi_i = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{g}(t)}{\mu_i}$$

L'**amortissement** est dit **visqueux proportionnel découplé**. **B** n'est pas une matrice diagonale, c'est la matrice qui contient les coefficients  $\beta_{ij}$  qui l'est. Les deux coefficients  $\alpha$  et  $\delta$  sont les coefficients de proportionnalité. On définit le **pourcentage d'amortissement critique** du mode  $i$ , noté  $\varepsilon_i$ , par la relation

$$\beta_i = 2\varepsilon_i \mu_i \omega_i \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_i + \frac{\delta}{\omega_i} \right)$$

Si  $\varepsilon_i$  est inférieur à 1, la réponse de l'oscillateur de fréquence  $\omega_i$  est pseudo-périodique ; si  $\varepsilon_i$  est supérieur à 1, la réponse de l'oscillateur de fréquence  $\omega_i$  est apériodique. Une structure est faiblement dissipative si le pourcentage d'amortissement critique de ses modes caractéristiques est inférieur à 0,1. Pour calculer les coefficients de proportionnalité  $\alpha$  et  $\delta$ , on se donne l'amortissement pour deux pulsations propres particulières et on résout le système

$$2\varepsilon_1 = \alpha\omega_1 + \frac{\delta}{\omega_1} \quad \text{et} \quad 2\varepsilon_2 = \alpha\omega_2 + \frac{\delta}{\omega_2}$$

L'hypothèse de Rayleigh impose une forme particulière à l'amortissement qui est sur ou sous-estimé selon la fréquence (Figure 18.1). Il est important de vérifier que le pourcentage d'amortissement critique du dernier mode retenu dans la base tronquée est inférieur à 1, car pour un mode propre, la réponse ne peut pas être aperiodique.

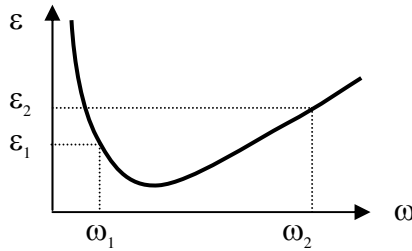


Figure 18.1 : Amortissement de Rayleigh

### 18.3.3. Hypothèse de Basile

Dans le cas de structures dissipatives, en supposant l'amortissement visqueux, l'équation d'équilibre dynamique est

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = 0$$

On note  $\mathbf{q} = \mathbf{z}e^{-\lambda t}$  le déplacement en présence d'amortissement. Les racines et les modes sont solutions de l'équation :

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{z}_i = 0$$

Le système étant faiblement dissipatif, on peut estimer que ses pulsations et ses modes diffèrent peu des pulsations propres et des modes propres :

$$\lambda = i\omega + \Delta\lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{z}$$

Par substitution de ces approximations dans l'équation d'équilibre et tenant compte des relations d'orthogonalité des modes propres, on obtient au premier ordre la relation :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Delta \mathbf{z} + i \omega_i (\mathbf{B} + 2 \Delta \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_i^T (\mathbf{B} + 2 \Delta \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \lambda = - \frac{\beta_{ii}}{2 \mu_i}$$

La correction à apporter sur la pulsation d'un mode conservatif est négative et elle ne fait intervenir que les termes diagonaux de l'amortissement. L'influence des termes non diagonaux ne peut donc être que du second ordre. Le mode amorti s'écrit :

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i + \sum_{j \neq i} i \omega_i \frac{\beta_{ij}}{\mu_j (\omega_i^2 - \omega_j^2)} \mathbf{x}_j$$

Si les fréquences propres sont suffisamment espacées, la correction à apporter sur la forme du mode propre  $\mathbf{x}_i$  pour passer à  $\mathbf{z}_i$  est du même ordre de grandeur que les termes extra-diagonaux  $\beta_{ij}$ , donc souvent négligeable. Il est donc cohérent de supposer, sous ces diverses conditions, que la matrice qui contient les coefficients  $\beta_{ij}$  est diagonale, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'hypothèse simplificatrice de Rayleigh. Ce type d'amortissement peut s'introduire de diverses façons, par exemple mode par mode, et permet une bonne identification des paramètres après des essais dynamiques. L'**amortissement** est **visqueux découplé non proportionnel**. Les équations normales s'écrivent :

$$\ddot{\eta}_i + 2 \varepsilon_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{g}(t)}{\mu_i}$$

Les pulsations  $\omega_i$  sont les pulsations du système non amorti, elles sont très peu différentes des pulsations du système amorti

$$\omega_i^* = \omega_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2} \cong \omega_i (1 - \varepsilon_i)$$

#### 18.3.4. Résolution des équations normales découplées

Les équations normales sont des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Pour chaque intensité modale, et en supposant pour tous les modes des pourcentages d'amortissement critique inférieurs à 1,

$$\eta_i(t) = e^{-\varepsilon_i \omega_i t} \left[ \cos(\omega_i^* t) + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{1 - \varepsilon_i^2}} \sin(\omega_i^* t) \right] \eta_i(0) + e^{-\varepsilon_i \omega_i t} \left[ \frac{\sin(\omega_i^* t)}{\sqrt{1 - \varepsilon_i^2}} \right] \dot{\eta}_i(0)$$

$$+ \int_0^t e^{\varepsilon_i \omega_i (t-\tau)} \frac{\sin(\omega_i^* (t-\tau))}{\omega_i^*} \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{g}(\tau)}{\mu_i} d\tau$$

$\eta_i(0)$  et  $\dot{\eta}_i(0)$  sont donnés par les conditions initiales, l'intégrale est évaluée analytiquement ou numériquement pour les fonctions d'excitation  $\mathbf{g}(t)$  prévues dans les programmes d'analyse. La solution complète, c'est à dire la forme de la structure à un instant donné, est obtenue à chaque instant par combinaison linéaire en utilisant la linéarité

$$\mathbf{q}(t) = \sum \eta_i(t) \mathbf{x}_i$$

### 18.3.5. Troncature de la base modale

Au lieu de travailler sur les  $N$  modes de la structure, on n'en prend que  $n$ , en espérant que cela permette néanmoins d'obtenir une solution numériquement satisfaisante. Or la troncature peut engendrer deux types d'erreurs : un contenu fréquentiel insuffisant dans la réponse dû à un nombre de modes retenus trop faible, une décomposition incomplète de la charge appliquée. Il est donc important, après le calcul, de vérifier la qualité des résultats.

Une structure excitée à une fréquence inférieure à sa première valeur propre a une réponse quasi-statique. Ce résultat permet d'affirmer que les modes au-delà du dernier retenu dans la base modale tronquée répondent statiquement à la sollicitation dynamique appliquée sur la structure. Pour améliorer la solution calculée en effectuant une combinaison linéaire sur les  $n$  premiers modes, on pourrait ajouter la contribution statique des modes supérieurs au  $n$ -ième, mais on ne les connaît pas. En pratique, on ajoute donc la contribution statique de tous les modes, et on retranche la contribution dynamique des  $n$  modes qui ont répondu dynamiquement. C'est la **méthode des accélérations modales**. La solution obtenue est statiquement exacte, les déplacements sont corrigés mais pas les vitesses ni les accélérations. Pour une structure non amortie, on a

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \mathbf{x}_i + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{g}(t) \mathbf{x}_i}{\mu_i \omega_i^2}$$

L'exemple suivant donne les courbes d'évolution temporelle du déplacement, de la vitesse et de l'accélération de l'extrémité libre d'une poutre cantilever sur laquelle on applique un échelon de force à  $t = 0,1$  s. On restreint la base modale aux vibrations de flexion dans le plan  $xOy$ . On compare les résultats obtenus avec une base modale tronquée de 4 modes et une base de 10 modes. La correction effectuée sur les déplacements permet d'obtenir ici de bons résultats. En effet, elle est d'autant plus efficace que les fréquences propres sont bien distinctes (Figure 18.2), ce qui est le cas dans cet exercice académique.

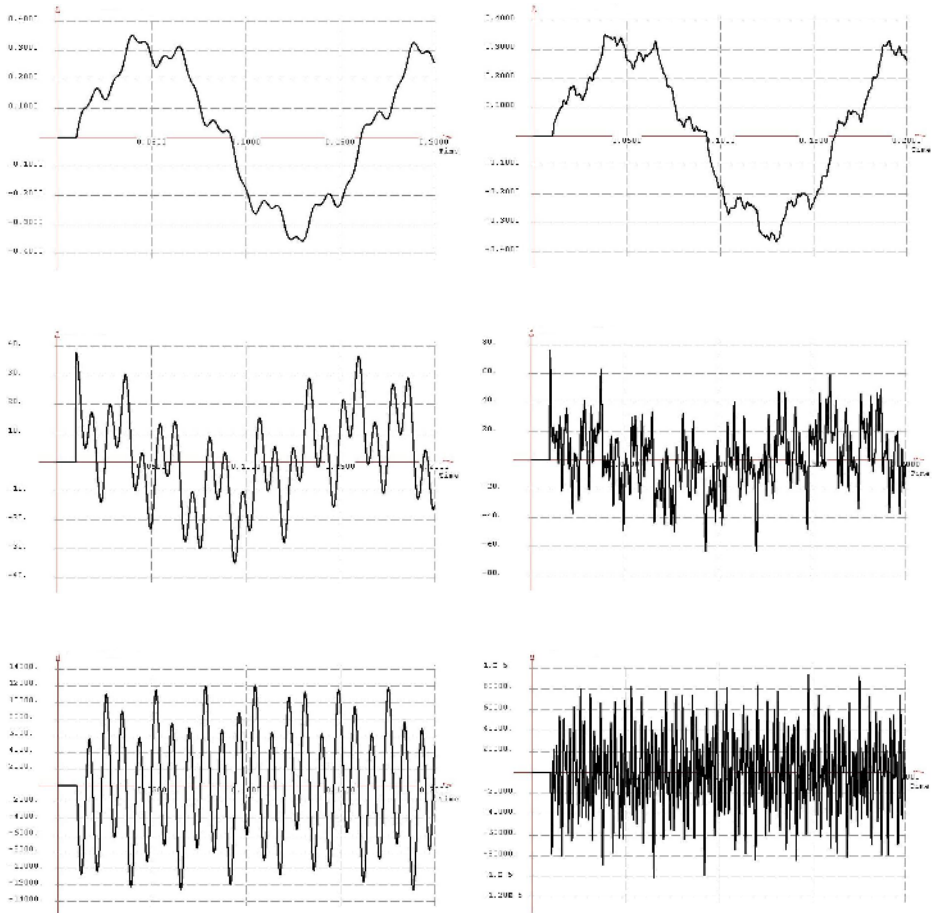


Figure 18.2 : Comparaison de la solution pour 4 et 10 modes, déplacement, vitesse et accélération du point sollicité

### 18.3.6. Choix du pas de temps

Ce choix est très important car il conditionne directement la qualité de la réponse du système. Il faut tout d'abord discrétiser correctement le signal appliqué sur la structure, ce qui donne le pas de temps  $h_1$ . Pour une sollicitation temporelle que l'on décompose en série de Fourier, la période  $T$  correspondant à la plus grande fréquence significative de l'excitation appliquée doit être échantillonnée en 10 ou 20 points environ :  $h_1 = T/10$  ou  $h_1 = T/20$ . On applique la même relation  $h = T/10$  ou  $T/20$  pour la période correspondant à la plus haute fréquence retenue dans la base modale tronquée, ce qui donne le pas de temps

$h_2$ . Il correspond physiquement à la fréquence de coupure du signal de sortie. Le pas de temps pour le calcul est le plus petit des pas  $h_1$  et  $h_2$ . Il faut vérifier qu'il ne conduit pas, sur l'intervalle d'observation souhaité pour la réponse, à un nombre prohibitif de calculs sinon, il faut trouver un compromis. La figure 18.3 donne un exemple de réponse transitoire par superposition modale.

On représente généralement un choc par un demi-sinus. Mais si la durée du choc est brève, le pas de temps  $h_1$  peut devenir trop petit et conduire à un nombre de calculs déraisonnable. On modélise alors le choc par une impulsion de Dirac, et  $h_1$  n'intervient plus explicitement.

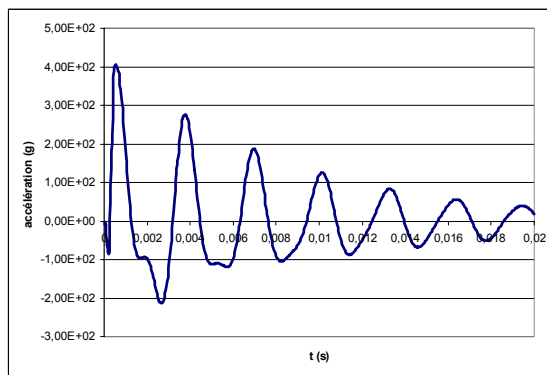


Figure 18.3 : Exemple de réponse transitoire

## 18.4. TRANSITOIRE PAR INTEGRATION DIRECTE

Les méthodes d'intégration directe, également appelées **schémas d'intégration**, ne sont pas limitées au cas des systèmes linéaires et elles peuvent prendre en compte les composantes de fréquence élevées sans que ces fréquences ne soient explicitement connues suite à un calcul modal préalable. Toutefois, leur utilisation nécessite un grand soin car les paramètres doivent être ajustés en fonction de la précision et de la stabilité de manière à contrôler l'amortissement numérique de la réponse. Les opérateurs d'intégration temporelle sont en général construits par différences finies dans le domaine temporel. Ils agissent comme un filtre sur la solution et le pas de temps (intervalle entre deux calculs) est un paramètre fondamental qui conditionne le signal de sortie. La taille du pas de temps doit non seulement tenir compte de l'excitation et du contenu fréquentiel du mouvement mais aussi de la discrétisation spatiale du système car il doit être cohérent avec la vitesse de propagation des ondes dans le modèle.



### 18.4.1. Principe et schémas d'intégration

L'état du système à un instant donné est caractérisé par un certain nombre de grandeurs qui peuvent regrouper dans ce qu'on appelle le **vecteur d'état**. En mécanique des structures, la partie temporelle de l'équation du mouvement est du second ordre, elle fait intervenir les dérivées première et seconde de la position. Le vecteur d'état contient la position et la vitesse de chaque degré de liberté du système :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_n \\ \dot{\mathbf{q}}_n \end{pmatrix}$$

On utilise une relation de récurrence pour calculer à l'instant  $t_{n+1}$  l'état du système, représenté par son vecteur d'état, en fonction de l'état du système à un certain nombre d'instants précédents  $t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-i}$ . Lorsque la relation de récurrence fait intervenir plusieurs instants précédant celui du calcul, le **schéma** est dit **multi-pas**. Pour la réponse dynamique des systèmes mécaniques, l'instant  $t_n$  permet généralement à lui seul de calculer l'instant suivant. Un tel **schéma** est dit **monopas**. On écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}(h) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_n \\ \dot{\mathbf{q}}_n \end{pmatrix} + \varepsilon_{n+1}$$

$h$  est le pas de temps,  $\mathbf{A}$  est l'opérateur d'intégration,  $\varepsilon$  l'erreur due à la troncature du développement en série. Cette technique de calcul est utilisable aussi bien en linéaire qu'en non-linéaire. Formellement, une grandeur telle que la vitesse  $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$  peut s'exprimer comme une fonction de  $\dot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$  ou seulement de  $\dot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_n$ .

Dans le premier cas, le **schéma** d'intégration est dit **implicite** car le vecteur d'état à l'instant  $t_{n+1}$  dépend de sa propre dérivée. Les équations doivent être remaniées avant d'être résolues. Pour calculer la solution à  $t_{n+1}$ , on utilise un instant intermédiaire  $t_\alpha$  compris entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  pour lequel on prédit la solution qui prend en compte une partie de la solution à trouver. On injecte la prédiction dans l'équation d'équilibre qui est généralement non satisfaite. Le résidu est la différence entre les forces internes et les forces externes. On corrige la prévision de manière à vérifier l'équation d'équilibre, c'est-à-dire à annuler le résidu. On parle aussi de schémas PECE (Prédicteur d'erreur-Correcteur d'erreur). Les méthodes implicites les plus connues sont celle du trapèze, celle de Houbolt (à trois pas), celle de Wilson, celle de Newmark et la méthode  $\alpha$ .

Dans le second cas, le **schéma** d'intégration est dit **explicite**. Pour ces schémas, on suppose que certaines grandeurs restent constantes sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . Ces méthodes sont utilisées dans le domaine de la dynamique rapide ou en thermique dans le cas de changements de phases, de chocs thermiques violents, d'ablation ou de pyrolyse. Elles ne sont utiles que pour des phénomènes fortement non-linéaires nécessitant de très petits pas de temps. Les méthodes d'intégration temporelles implicites et explicites utilisées en thermique sont analogues à celles utilisées en mécanique à ceci près que les équations différentielles sont du premier ordre et que la dérivée seconde de la température n'intervient pas dans la résolution. Les méthodes explicites les plus connues sont celles d'Euler, et celle de la différence centrée.

En synthèse, les méthodes implicites conduisent à résoudre un système linéaire ou non à chaque pas de temps selon le calcul, ce qui est très coûteux mais permet de grands pas de temps (peu de calculs chers). Les méthodes explicites conduisent à des systèmes linéaires, elles sont à chaque pas moins coûteuses et plus rapides mais nécessitent des pas de temps très petits pour que la stabilité du schéma soit garantie (beaucoup de calculs peu chers). On souhaite que les schémas d'intégration induisent une erreur de périodicité minimale ou nulle, car une modification du déphasage entre les différentes composantes d'un système à  $N$  degrés de liberté peut dénaturer complètement la solution temporelle. Au bout d'un « certain temps », à cause du déphasage relatif, chaque degré de liberté se déplace indépendamment des autres donnant l'illusion d'une structure à comportement chaotique. Un schéma est précis si la dérive de fréquence qu'il introduit est acceptable et si l'erreur d'amplitude est nulle ou faiblement négative (**amortissement numérique**), une erreur d'amplitude positive conduisant à une solution qui diverge au cours du temps. Un schéma d'intégration est stable s'il existe un pas d'intégration limite en dessous duquel toute perturbation finie du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  n'entraîne qu'une modification finie non croissante du vecteur d'état aux instants ultérieurs. La stabilité est inconditionnelle si le pas limite est infini.

#### 18.4.2. Schéma de Newmark

L'état du système en  $t_{n+1}$  ne dépend que de l'état du système en  $t_n$  : le schéma de Newmark fait partie de la famille des schémas d'intégration monopas. Il utilise deux paramètres indépendants  $\beta$  et  $\gamma$  pour écrire les développements en série de Taylor du déplacement et de la vitesse :

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}]$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2[(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}]$$

Cette méthode est une méthode implicite lorsque les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  ne sont pas simultanément nuls : pour calculer vitesse et déplacement en  $t_{n+1}$ , il faut connaître l'accélération à l'instant  $t_{n+1}$  que l'on ne connaît pas et que l'on cherche justement à déterminer. En reportant les expressions de la vitesse et du déplacement dans l'équation d'équilibre dynamique qui doit être vérifiée à tout instant et en particulier à l'instant  $t_{n+1}$ , on obtient en regroupant les termes

$$S\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}_n + (1-\gamma)h\ddot{\mathbf{q}}_n) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_n)$$

$$\text{avec } S = (\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{B} + h^2\beta\mathbf{K}) \Rightarrow S\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{B}\bar{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}}_{n+1}$$

Le second membre n'est connu que moyennant les hypothèses initiales sur le déplacement et la vitesse.  $\bar{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1}$  et  $\bar{\mathbf{q}}_{n+1}$  sont les prédictions des vitesses et déplacements et correspondent au début du développement de Taylor. La matrice d'itération  $S$  est connue et constante tant que le pas de temps l'est. Il peut être plus coûteux de changer le pas d'intégration car il faut réévaluer la matrice d'itération à chaque changement du pas de temps, que de garder le pas constant et d'augmenter le nombre d'instant de calcul. Les efforts appliqués sur la structure sont des données,  $\mathbf{g}_{n+1}$  est connu à tout instant y compris  $t_{n+1}$ . On peut alors calculer l'accélération par résolution du système linéaire puis corriger vitesses et déplacements par les relations

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \bar{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} + \gamma h \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_{n+1} = \bar{\mathbf{q}}_{n+1} + \beta h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$$

Moyennant les hypothèses sur le déplacement et la vitesse, l'accélération est exactement évaluée en  $t_{n+1}$  alors que le déplacement et la vitesse ne le sont pas.

### 18.4.3. Stabilité du schéma

Pour que le système soit stable, toutes les valeurs propres de l'opérateur d'intégration  $\mathbf{A}$  doivent être en module inférieures ou égales à 1. Cela conduit dans le cas du schéma de Newmark à 4 relations :

$$(1) \quad \gamma \geq 1/2$$

$$(2) \quad \rho = \sqrt{1 - (\gamma - \frac{1}{2})E} \quad \text{avec} \quad E = \frac{\omega^2 h^2}{1 + \beta \omega^2 h^2} > 0$$

$$(3) \quad (\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 h^2}$$

$$(4) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{12})\omega^2 h^2$$

$\omega$  est la pulsation associée au dernier mode représentatif de la réponse. La relation (1) garantit que la solution reste bornée en amplitude : le schéma d'intégration ne fait pas diverger numériquement la solution, c'est une condition nécessaire mais non suffisante. La relation (2) est le rapport d'amplitude d'un degré de liberté à deux instants consécutifs.  $\rho$  est l'erreur d'amplitude introduite par le schéma d'intégration : elle est nulle si  $\gamma = 1/2$ , elle est négative si  $\gamma$  est supérieur ou égal à  $1/2$ . Il y a alors un amortissement de la solution, introduit par le schéma d'intégration : c'est de l'**amortissement numérique**, sans signification physique, mais qui est en général bénéfique pour la solution car elle est toujours amortie dans la réalité. La relation (3) concerne la stabilité du schéma. Un schéma est dit stable si une perturbation finie du vecteur d'état en  $t_n$  n'entraîne qu'une modification finie du vecteur d'état à l'instant ultérieur. La **stabilité** est dite **inconditionnelle** car indépendante du pas de temps  $h$  choisi si

$$(\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta \leq 0$$

Si  $(\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta > 0$ , la **stabilité** est **conditionnelle**, elle n'est garantie que si

$$(\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 h^2}$$

Pour un schéma inconditionnellement stable sans amortissement numérique, on doit avoir  $\gamma = 0,5$  donc  $\beta = 0,25$ , ce qui correspond à utiliser la valeur moyenne de l'accélération sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . La relation (4) donne l'erreur de périodicité introduite par le schéma, qui doit rester inférieure à 5% environ pour que le déphasage entre les degrés de liberté ne perturbe pas trop la solution.

#### 18.4.4. Choix du pas de temps

Comme dans le cas de la superposition modale, la période  $T$  correspondant à la plus grande fréquence significative de l'excitation appliquée doit être échantillonnée en 10 ou 20 points environ :  $h_1 = T/10$  ou  $h_1 = T/20$ . Cette période est déduite de la décomposition en série de Fourier de la sollicitation temporelle. Cette sollicitation peut être une impulsion de Dirac ou un échelon, auquel cas  $h_1$  n'intervient plus dans le choix du pas de temps. En fonction du ou des points excités, de la forme de l'excitation, il faut déterminer quelles seront les fréquences significatives dans la réponse, ce qui donne le pas de temps  $h_2$ . En effet, pour les hautes fréquences, dont la période est inférieure à  $h_2$ , l'intégration temporelle donnera une composante d'amplitude presque nulle sur chaque intervalle temporel de durée  $h_2$  : le choix du pas de temps correspond au réglage de la bande passante du signal de sortie. On choisit en général un schéma inconditionnellement stable sans amortissement numérique : il faut

déterminer le pas  $h_3$  pour lequel l'erreur de périodicité reste admissible. Le pas de temps pour le calcul est le plus petit des pas  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ .

S'il est constant, il faut vérifier qu'il ne conduit pas, sur l'intervalle d'observation souhaité pour la réponse, à un nombre prohibitif de calculs. Si c'est le cas, on peut soit faire évoluer le pas de temps au cours de la réponse, soit trouver un compromis entre la bande passante, l'erreur de périodicité, le choix des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ , la discrétisation du signal d'entrée. Dans le cas où on change  $\beta$  pour diminuer l'erreur de périodicité, en changeant  $\gamma$  de telle sorte que le schéma reste inconditionnellement stable, on introduit un amortissement numérique qui peut s'avérer bénéfique pour la solution.

#### 18.4.5. Méthode $\alpha$

La **méthode  $\alpha$** , ou schéma de Hilber-Hughes-Taylor, est une méthode à un pas, implicite, qui conserve les propriétés du schéma de Newmark tout en accroissant l'amortissement numérique sur les composantes de plus hautes fréquences du signal. Ces composantes, qui sont en général numériques et non physiques, sont filtrées par le schéma. Il ne possède qu'un seul paramètre, noté  $\alpha$ , les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  étant alors calculés par les relations suivantes :

$$\beta = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}(1-2\alpha)$$

Les approximations du déplacement et de la vitesse à l'instant  $t_{n+1}$  sont les mêmes que pour le schéma de Newmark, l'équation d'équilibre modifiée étant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (1+\alpha)\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \alpha\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_n + (1+\alpha)\mathbf{K}\mathbf{q}_{n+1} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{q}_n = (1+\alpha)\mathbf{g}_{n+1} - \alpha\mathbf{g}_n$$

L'avantage de la méthode  $\alpha$  sur le schéma de Newmark amorti ( $\gamma > 0,5$ ) est de conserver une précision du second ordre tout en étant inconditionnellement stable. La méthode  $\alpha$  et le schéma de Newmark peuvent être utilisés pour des calculs de réponse dynamique non linéaire : la matrice de raideur est réévaluée à chaque pas de temps, l'amortissement n'est pas limité à une forme de type visqueux découplé.

Une des limites de ces méthodes d'intégration temporelle est informatique : la matrice d'itération a pour dimension le nombre de degrés de liberté de la structure, ce qui peut conduire à des calculs trop coûteux. D'autre part, il se peut que le pas de temps nécessaire soit très petit, engendrant un ou plusieurs pivots nuls dans la matrice d'itération qui est mal conditionnée ; si ces pivots disparaissent lorsque le pas de temps augmente, il faut recourir à des schémas d'intégration explicite.

Que la réponse soit calculée par superposition modale ou par intégration directe, les déplacements ont à chaque pas de temps une signification physique (alors que l'amplitude d'un mode propre n'en a pas). On peut donc évaluer à chaque pas de temps les contraintes dans la structure pour vérifier sa résistance. L'amplitude des déplacements calculés peut être assez différente de l'amplitude mesurée sur la structure réelle lors d'un essai si l'amortissement introduit dans les données n'est pas maîtrisé. Une réponse dynamique est toujours coûteuse par rapport à une analyse statique linéaire. Pour certains types de structures soumises à des sollicitations connues, des entreprises ont acquis une expertise : pour un signal d'entrée de 1 (N ou g), le niveau maximal atteint dans la structure lors de la réponse est de X. Les bureaux d'étude font des analyses statiques linéaires pour des chargements dont l'amplitude réelle est multipliée par X (**facteur de charge**), ce qui permet de prédimensionner à moindre coût pour des sollicitations dynamiques.

## 18.5. REPONSE HARMONIQUE

### 18.5.1. Généralités

C'est un type de sollicitation important car le comportement d'une structure en fonction de la fréquence d'excitation est ce que l'on peut le plus facilement identifier par voie expérimentale, et parce que le régime harmonique est représentatif de nombreux modes d'excitation observés. La structure est soit montée sur pot vibrant (excitation d'ensemble), soit est excitée localement par un ou plusieurs excitateurs, en phase ou non. On applique par la base ou localement une excitation sinusoïdale de la forme

$$\mathbf{g}(\omega) = \mathbf{a}(\omega)e^{j\omega t}$$

$\mathbf{a}$  est la distribution spatiale des charges,  $\omega$  est la pulsation de l'excitation appliquée. La sollicitation est une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , définie par son point d'application, son amplitude, sa fréquence et la phase à l'origine. Amplitude et phase peuvent dépendre de la fréquence. On effectue un balayage discret en fréquence et on suppose que l'on reste suffisamment longtemps calé sur chaque fréquence pour que le régime permanent soit atteint. La phase transitoire, sensible aux conditions initiales, a laissé la place à un mouvement sinusoïdal entretenu dont on se contente de mesurer l'amplitude et le déphasage éventuel par rapport à l'excitation en fonction de  $\omega$  : on réalise alors une **réponse harmonique**. La solution est indépendante des conditions initiales.

Dans le domaine fréquentiel, si l'amortissement est pris en compte, la réponse comporte une partie réelle et une partie imaginaire nécessitant des outils de post-traitement particuliers si on souhaite reconstruire le déplacement ou la

contrainte à un instant d'un cycle de pulsation  $\omega$ . Le plus souvent, on s'intéresse aux fonctions de transfert, rapport entre l'amplitude du signal d'entrée et celle d'un point particulier. Les modes d'excitation sont globalement au nombre de trois :

- forces extérieures connues, localement ou réparties
- accélération d'ensemble sur la structure
- accélération locale en certains points de la structure

Plus généralement, il est possible d'imposer un déplacement sinusoïdal ou une vitesse sinusoïdale, ce qui correspond physiquement à ce qui est réalisé sur pot vibrant où on retrouve en fonction de la fréquence soit un pilotage en déplacement, en vitesse ou en accélération. La course du pot vibrant est physiquement limitée par construction. Aux basses fréquences, on ne peut pas obtenir de grands niveaux d'accélération car il faudrait un pot vibrant dont la partie mobile a de très grands débattements :

$$\gamma = \omega^2 x \Rightarrow \gamma_{\max} = \omega^2 X$$

Aux hautes fréquences, on ne peut pas imposer n'importe quel déplacement car il faudrait une énergie considérable pour maintenir le niveau d'accélération. C'est l'accélération qui est limitée et l'amplitude varie donc de façon inversement proportionnelle au carré de la pulsation d'excitation. On cherche des solutions de la forme particulière

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(x)e^{j\omega t}$$

L'équation d'équilibre dynamique est, en supposant l'amortissement visqueux :

$$-\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{q} + j\omega \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{a}(\omega)$$

### 18.5.2. Méthode directe

L'équation précédente se met sous la forme  $\mathbf{S}(\omega)\mathbf{q} = \mathbf{a}(\omega)$  où  $\mathbf{S}$  est une matrice carrée de dimension  $N$ , complexe. Pour chaque fréquence d'excitation, on inverse ce système pour calculer l'amplitude du déplacement. C'est la **méthode directe**. Si l'amortissement est négligé, la matrice  $\mathbf{S}(\omega)$  est réelle. S'il est pris en compte, l'inversion de  $\mathbf{S}(\omega)$  est trop coûteuse pour des systèmes de grande taille. On résout alors par projection dans la base modale tronquée.

### 18.5.3. Superposition modale

On pose, comme pour la réponse transitoire par superposition modale, les modes propres formant une base :

$$\mathbf{q}(\omega) = \sum_1^n \eta_i(\omega) \mathbf{x}_i = \mathbf{X} \mathbf{b}(\omega)$$

Les  $\eta_i$  sont les intensités modales, coordonnées du vecteur  $\mathbf{q}$  dans la base des vecteurs propres.  $\mathbf{X}$  est la matrice colonne des vecteurs propres et  $\mathbf{b}$  est le vecteur colonne des intensités modales. En prémultipliant par  $\mathbf{X}^T$  l'équation d'équilibre dynamique et utilisant les relations d'orthogonalité entre les modes propres, on forme le système matriciel de dimension  $n$

$$\mathbf{S}(\omega) \mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{a}(\omega)$$

Par projection dans la base tronquée, le système linéaire a pour inconnues  $\mathbf{b}$  et non plus  $\mathbf{q}$  comme le système initial. On calcule le vecteur  $\mathbf{b}$  à chaque fréquence d'excitation en inversant  $\mathbf{S}(\omega)$  puis on calcule les déplacements dans la structure par la combinaison linéaire  $\mathbf{q} = \mathbf{X} \mathbf{b}$ . L'effet de la troncature est corrigé par la méthode des accélérations modales. Les coefficients de la matrice  $\mathbf{S}$  dépendent de la pulsation : la matrice doit être calculée et inversée pour chaque  $\omega$ , mais qu'elle soit diagonale ou non, réelle ou non, ne coûte pas cher vu sa taille. Les équations du mouvement sont du second ordre par rapport au temps dans les cas transitoires et harmoniques. En réponse transitoire, on résout un système différentiel du second ordre. Le fait de ne pas prendre explicitement en compte le temps en réponse harmonique conduit à un système linéaire.

#### 18.5.4. Base modale tronquée

Lorsque le logiciel le permet, la comparaison des déplacements obtenus sans et avec correction par la méthode des accélérations modales permet de savoir si la base tronquée qui a servi au calcul est assez riche, que ce soit en harmonique ou en transitoire. Mais cela suppose deux analyses successives.

Les résultats issus de l'analyse modale donnent déjà une bonne indication. Dans la direction de l'excitation, la masse effective cumulée pour le nombre de modes que l'on va utiliser doit être importante, typiquement supérieure à 80 ou 85% de la masse vibrante. Pour améliorer la convergence des  $p$  modes propres souhaités, les algorithmes en cherchent plus (cf. paragraphe 17.4). Si les fréquences qui suivent la dernière souhaitée sont affichées, le fait qu'elles puissent être très proches de la  $p$ -ième amène à se demander si les suivantes n'auraient pas dû elles aussi faire partie de la base tronquée.

Quand l'amortissement est faible ou qu'il est négligé, l'amplitude du déplacement est très grande au voisinage des fréquences propres. L'analyse linéaire donne des résultats aberrants, surtout aux basses fréquences. La connaissance des amortissements est très importante pour la réponse



harmonique. La figure 18.4 donne un exemple de réponse harmonique par superposition modale.

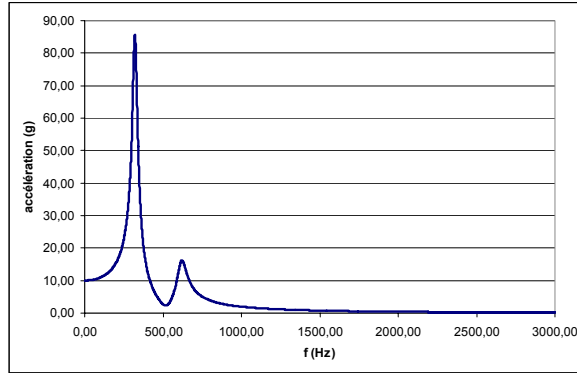


Figure 18.4 : Exemple de réponse harmonique

## 18.6 EXCITATION PAR LES SUPPORTS

Ce mode d'excitation est très souvent rencontré, que ce soit en réponse transitoire ou en réponse harmonique. Il peut être le même en tout point de la fondation (mouvement d'ensemble) ou différent d'un point à l'autre de la fondation (mouvement relatif).

### *Excitation locale par les supports*

Tous les degrés de liberté de la fondation sont sollicités mais pas de la même façon. Les degrés de liberté de la structure sont séparés en deux : les  $\mathbf{q}_2$  sont les degrés de la fondation, soumis à une excitation connue, les  $\mathbf{q}_1$  sont tous les autres degrés de liberté. On travaille dans un repère de référence immobile, détaché de la structure. Dans un premier temps, on calcule les vitesses et déplacements imposés par intégration à partir de la donnée de l'accélération des supports :

$$\dot{\mathbf{q}}_2(t) = \int_0^t \ddot{\mathbf{q}}_2(\tau) d\tau \quad \mathbf{q}_2(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}_2(\tau) d\tau$$

L'équation d'équilibre dynamique est alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(t) \\ \mathbf{r}_2(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{g}_1(t)$  représente les forces externes éventuellement imposées sur les degrés de liberté  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{r}_2(t)$  représente les réactions entre la structure et sa fondation. La première équation de ce système permet de calculer la réponse des degrés de liberté libres  $\mathbf{q}_1$  en reportant au second membre les forces d'inertie, de dissipation et de rappel associées au mouvement imposé :

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{B}_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1 = \mathbf{g}_1(t) - \mathbf{K}_{12}\mathbf{q}_2 - \mathbf{B}_{12}\dot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2$$

La seconde ligne permet quant à elle de calculer a posteriori les réactions entre la structure et la fondation.

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{B}_{21}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{B}_{22}\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{q}_2$$

On est donc ramené au calcul d'une structure encastree sur ses supports et soumise à une charge extérieure équivalente. Lorsque la réponse transitoire est résolue par intégration directe des équations du mouvement, la méthode générale décrite dans le paragraphe 18.4. est tout à fait applicable. Dans le cas où la technique de la superposition modale est utilisée, que ce soit en transitoire ou en harmonique, se pose le problème du nombre de modes à retenir dans la base tronquée. Or la base modale de la structure encastree sur ses supports ( $\mathbf{q}_2 = 0$  et  $\mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1 + \mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 = 0$ ) ne permet pas de représenter correctement les déplacements provoqués par le mouvement des supports même en prenant un grand nombre de modes, car  $\mathbf{q}_2 \neq 0$ . On utilise alors souvent la technique dite des masses additionnelles.

### Technique des masses additionnelles

C'est une technique approchée qui permet de résoudre le problème à partir de la connaissance des mouvements des supports. On montre que si la masse des supports  $\mathbf{M}_{22}$  est augmentée et remplacée par  $\mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_a$ , le problème initial est en pratique équivalent au problème suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_a$  doit être de plusieurs ordres de grandeur supérieur à  $\mathbf{M}_{22}$  et on doit remplacer l'accélération  $\ddot{\mathbf{q}}_2$  par une force égale à  $\mathbf{M}_a\ddot{\mathbf{q}}_2$  sur les degrés de liberté  $\mathbf{q}_2$ .

### Excitation d'ensemble

Tous les degrés de liberté de la fondation sont sollicités de la même façon et en phase : la fondation est soumise à un mouvement d'ensemble ou d'entraînement et n'a pas de mouvement relatif. Le partitionnement du paragraphe précédent est

encore utilisé. L'accélération absolue est la somme des accélérations relatives et d'entraînement :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \ddot{\phi}(t) \\ \mathbf{u}_2 \ddot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de déformation élastique ni de force dissipative liée au mouvement d'ensemble  $\mathbf{Ku} = 0$  et  $\mathbf{Bu} = 0$ , le système s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1^r + \mathbf{u}_1 \ddot{\phi} \\ \mathbf{u}_2 \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1^r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(t) \\ \mathbf{r}_2(t) \end{bmatrix}$$

Le calcul des déplacements  $\mathbf{q}_1(t)$  s'effectue à partir de la première équation de ce système. Les équations d'une structure soumise à un mouvement d'ensemble par sa fondation sont les mêmes que celles du même système encastré sur sa fondation et soumis à une charge extérieure équivalente

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}_1(t) - (\mathbf{M}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{M}_{12}\mathbf{u}_2)\ddot{\phi}$$

Que ce soit en réponse transitoire ou harmonique, par intégration directe ou superposition modale, le calcul d'une structure soumise à une excitation d'ensemble par sa fondation ne pose aucune difficulté particulière.

# Chapitre 19

## Super-éléments

### 19.1. INTRODUCTION

La **méthode des super-éléments** est une technique de sous-structuration qui est utilisable tant en analyse statique que dynamique. Elle consiste à diminuer temporairement la taille des problèmes traités puis à restituer la solution sur la structure complète. On procède toujours en trois étapes :

- la condensation,
- la résolution du problème condensé,
- la restitution.

Fabriquer un super-élément revient à calculer et stocker sur disque une matrice  $\mathbf{K}^*$ , un vecteur  $\mathbf{g}^*$  et éventuellement une matrice  $\mathbf{M}^*$  réduites que l'on se contente de relire à chaque utilisation, ce qui est beaucoup plus rapide que de les reconstruire. La ou les matrices stockées étant constantes, c'est-à-dire non réévaluées, un super-élément ne peut être utilisé que pour des analyses linéaires, ou pour des parties de structure restant dans le domaine linéaire lors d'un calcul non-linéaire. Par un traitement approprié, un super-élément peut subir de grandes rotations ou de grands déplacements mais reste dans le domaine linéaire dans un repère qui lui est attaché.

Cette méthode, malgré les manipulations de fichiers qu'elle suppose, présente un certain nombre d'avantages. Le premier est la possibilité de faire passer des calculs de très grosse taille sur des machines ne disposant pas des ressources suffisantes pour un calcul global. Elle permet l'analyse fractionnée des structures de grande taille, de garder un nombre suffisant de degrés de liberté pour les zones où c'est indispensable, de minimiser le temps de calcul dans le cas de structures comportant des parties répétitives mais ne présentant pas de symétrie cyclique... Dans le cas de structures pour lesquelles les conditions aux limites sont nombreuses et variables, le choix des cas dimensionnant est rapide

car la résolution n'est effectuée que sur le problème condensé et les restitutions sont en général très rapides. Quand dans une structure, un sous-ensemble est sujet à modification, le fait de ne recalculer que les matrices de ce sous-ensemble et de l'inclure dans un modèle super-élément du reste de la structure, permet un grand nombre de calculs à faible coût.

## 19.2. STATIQUE LINEAIRE

### 19.2.1. Création

On distingue dans la partie de structure dont on souhaite faire un super-élément deux types de degrés de liberté :

- les degrés de liberté qui définissent la frontière physique du super-élément avec le reste de la structure (constitué d'éléments finis ou d'autres super-éléments) ainsi que les degrés de liberté sur lesquels les fixations ou les charges sont susceptibles de change. Ces **degrés de liberté** sont **retenus** et sont rangés dans le vecteur  $\mathbf{q}_r$ . Par abus de langage, on parle de **nœuds retenus**.
- les degrés de liberté qui ne sont pas retenus. Ces **degrés de liberté** sont **condensés** et sont rangés dans le vecteur  $\mathbf{q}_c$ . Par abus de langage, on parle de **nœuds condensés**.

Pour fixer les idées, le maillage de la structure ci-dessous (Figure 19.1), constitué de 23431 éléments tétraédriques, comporte 5670 nœuds structuraux, c'est à dire attachés à des éléments finis, 256 nœuds associés aux conditions de contact entre le disque et le pied d'aube et des conditions de symétrie cyclique. Cela fait en tout 19202 degrés de liberté.

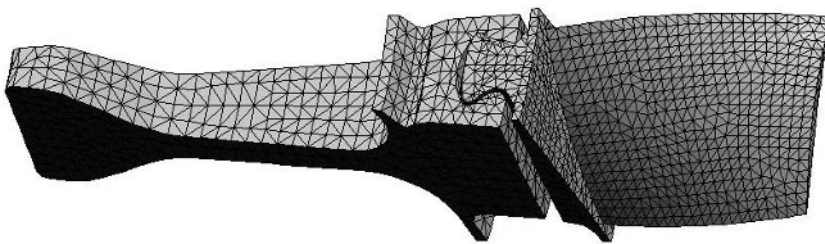


Figure 19.1 : Structure

On décompose la structure en deux : le disque dont la géométrie et le maillage ne dépendent pas de la géométrie de la pale qui va changer au fur et à mesure des itérations entre les calculs aérodynamiques, thermiques et mécaniques, et l'aube avec son pied (Figure 19.2). On construit un super-élément avec le disque qui comporte 2061 nœuds et 8426 éléments finis. Quand l'ensemble est

en rotation, le pied d'aube et le disque sont en contact sur les portées (cf. Figure 19.1). La zone de contact est la frontière du super-élément avec le reste du modèle. On retient donc les 256 nœuds (4 rangées de 32 nœuds sur chaque portée) de cette zone soit 768 degrés de liberté. Le choix des degrés de liberté retenus est physique, sans ambiguïté et ne pose en général aucun problème.

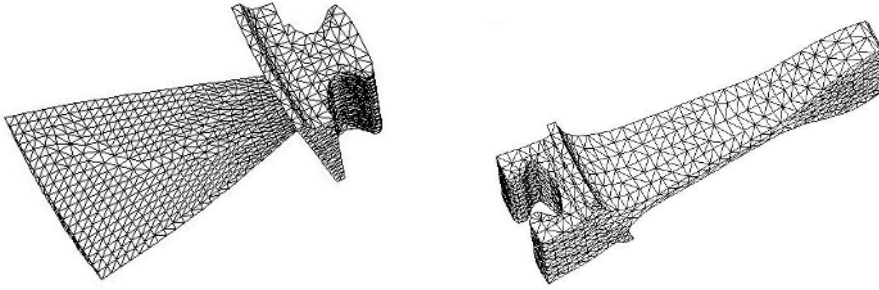


Figure 19.2 : Aube avec pied et disque

Le vecteur complet des degrés de liberté  $\mathbf{q}$  s'écrit :  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{pmatrix}$

On décompose en conséquence la matrice de raideur et le vecteur de charge.  $\mathbf{g}_r$  est le vecteur des charges nodales appliquées sur les degrés de liberté retenus,  $\mathbf{g}_c$  est le vecteur des charges nodales appliquées sur les degrés de liberté condensés.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rc} \\ \mathbf{K}_{cr} & \mathbf{K}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_r \\ \mathbf{g}_c \end{pmatrix}$$

Ce système matriciel est remplacé par deux sous-systèmes, la seconde ligne permettant d'exprimer  $\mathbf{q}_c$  en fonction de  $\mathbf{q}_r$  d'où on tire la relation connue sous le nom de **formule de Guyan** :

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1}(\mathbf{g}_c - \mathbf{K}_{cr}\mathbf{q}_r)$$

On peut injecter cette égalité dans la première ligne du système matriciel :

$$\mathbf{K}^* \mathbf{q}_r = \mathbf{g}^* \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cr} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{g}_r - \mathbf{K}_{rc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{g}_c$$

La matrice  $\mathbf{K}^*$  est la matrice de raideur du super-élément et le vecteur  $\mathbf{g}^*$  est le vecteur des charges du super-élément, leur dimension est égale au nombre de degrés de liberté retenus, qui est généralement petite par rapport au nombre de degrés de liberté du super-élément. Pour le disque, la matrice  $\mathbf{K}^*$  a pour dimension 768. Condenser ne signifie pas éliminer purement et simplement

certaines degrés de liberté, mais reporter sur ceux qui sont retenus la raideur de ceux qui ne le sont pas. Cette étape est la phase de **création du super-élément** qui n'est rien d'autre que la condensation statique de la structure ou partie de structure étudiée.

Pour un élément fini, on connaît la topologie (nombre et position des nœuds), les fonctions d'interpolation. On utilise cette information pour construire la matrice de raideur et le vecteur de charge nodale. Pour un super-élément, on ne connaît pas la topologie et le nombre de nœuds de frontière dépend du super-élément, on ne connaît évidemment pas les fonctions d'interpolation : la matrice de raideur et le vecteur de charge nodale sont issus de la phase de création.

### 19.2.2. Utilisation

Une partie de la structure peut être maillée lors de cette phase, le super-élément est alors relié à des éléments finis classiques ou à d'autres super-éléments par ses frontières. Le ou les super-éléments ne sont que des éléments finis un peu particuliers dont la matrice de raideur élémentaire n'a plus à être générée. La matrice de raideur structurale et le vecteur des charges sont construits par assemblage, en « additionnant » les matrices et vecteurs élémentaires. Le même super-élément peut être relu et utilisé plusieurs fois dans le modèle, ses différentes positions dans la matrice assemblée étant donnée par ses connexions au reste du modèle (maillage et/ou super-éléments). La matrice de raideur du super-élément, stockée en machine, est figée : inclus dans un modèle non linéaire, un super-élément a un comportement strictement linéaire.

On applique ensuite les conditions aux limites et les charges sur la structure puis on résout classiquement le problème lors de la phase d'**utilisation du super-élément**

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g}$$

Ayant calculé le vecteur  $\mathbf{q}$ , on peut en extraire, pour chaque super-élément, le sous-vecteur  $\mathbf{q}_r$ . A ce stade, le déplacement des nœuds retenus dans chaque super-élément est donc connu.

### 19.2.3. Restitution

Cette dernière étape a pour but le calcul des déplacements et des contraintes dans chacun des super-éléments du modèle. La formule de Guyan permet de calculer le déplacement des degrés de liberté condensés donc le déplacement dans tout le super-élément, à partir duquel on calcule les contraintes :

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1}(\mathbf{g}_c - \mathbf{K}_{cr}\mathbf{q}_r) \quad \text{d'où} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{pmatrix}$$

Dans le cas où une grande partie de la structure ne subit aucune modification pour les diverses analyses effectuées, en former un super-élément est très intéressant car la matrice réduite est stockée sur disque. Il n'est pas utile de générer et d'inverser la totalité du système linéaire à chaque modification. Les super-éléments peuvent, après assemblage lors de la phase d'utilisation, donner naissance à d'autres super-éléments (super-éléments multi-niveaux), la restitution s'effectuant alors de proche en proche pour chaque niveau. Aucune hypothèse de quelle nature que ce soit n'a été faite dans l'une de ces trois phases. Le calcul d'une structure comportant des super-éléments donne, pour des analyses statiques, la même solution que celle qui serait obtenue sur la structure complète.

### 19.3. ANALYSE MODALE

Le vecteur des degrés de liberté retenus contient non seulement les degrés de liberté de frontière permettant la connexion du super-élément au reste du modèle, mais également un certain nombre de degrés de liberté internes au super-élément de manière à représenter de la manière la plus précise possible l'énergie cinétique des modes basses fréquences. La condensation des degrés de liberté non retenus repose sur l'hypothèse que leur comportement vis-à-vis des degrés de liberté retenus est du type quasi-statique pour les basses fréquences. Il n'existe donc pas de méthode exacte pour la condensation dynamique, alors que la méthode de condensation de Guyan est exacte en statique.

#### 19.3.1. Méthode de Guyan

On effectue un partitionnement du vecteur des degrés de liberté  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{q}_c$ , degrés de liberté condensés, et  $\mathbf{q}_r$ , degrés de liberté retenus. La contribution des degrés de liberté condensés est reportée de manière statiquement équivalente sur les degrés de liberté retenus. Lorsque ces derniers sont bien choisis, la détérioration de la solution est faible ce qui se contrôle a posteriori par les bornes d'erreur. Le choix des degrés de liberté internes à retenir est délicat et a une grande influence sur la qualité des résultats, la validité de l'approximation étant liée au **problème aux valeurs propres internes**.

Le système s'écrit alors si  $\mathbf{F}$  est le vecteur des forces d'inerties

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rc} \\ \mathbf{K}_{cr} & \mathbf{K}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{rc} \\ \mathbf{M}_{cr} & \mathbf{M}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{F}_c \end{pmatrix}$$



La différence avec la statique est que le second membre était une donnée. En analyse modale, il dépend des pulsations propres que l'on cherche : il est donc lui aussi inconnu. Pour résoudre ce système de deux équations à trois inconnues ( $\mathbf{q}_c$ ,  $\mathbf{q}_r$  et  $\omega^2$ ), on est obligé d'introduire une hypothèse sur les forces d'inertie  $\mathbf{F}_c$ . On les suppose négligeables sur les degrés de liberté condensés, les degrés de liberté retenus étant choisis de manière à représenter à eux-seuls les forces d'inertie. La seconde ligne du système matriciel se met sous la forme

$$\mathbf{q}_c = -\mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cr} \mathbf{q}_r$$

Cette formule est la **formule de Guyan** dans le cas particulier où les forces exercées sur les degrés de liberté condensés sont nulles. Le déplacement des degrés de liberté condensés s'exprime en fonction du déplacement des degrés de liberté retenus. Si on omet de retenir un degré de liberté sur lequel les forces d'inertie ne sont pas négligeables, comme on lui associe une force d'inertie nulle, on change les fréquences et éventuellement la forme des modes.

On écrit les énergies de déformation et cinétique sous deux formes, la première en fonction de tous les degrés de liberté, la seconde en fonction des degrés de liberté retenus, on obtient

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}}_r \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_r^T \mathbf{K}^* \mathbf{q}_r$$

Par identification, on détermine les matrices réduites  $\mathbf{K}^*$  et  $\mathbf{M}^*$ , l'ensemble de ces deux matrices et du vecteur  $\mathbf{q}_r$  formant un **super-élément dynamique**. Lors de la phase d'utilisation du super-élément, on résout le problème

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0$$

Les matrices des super-éléments sont utilisées lors de l'assemblage pour former les matrices structurales  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ , dont la dimension est réduite par rapport à la taille du problème complet (sans super-élément). Comme en statique, la phase de restitution permet de déterminer la forme des modes propres dans le super-élément à partir des déplacements de ses nœuds retenus :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cr} \end{pmatrix} \mathbf{q}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{q}_r$$

$\mathbf{A}$  est la **matrice des modes contraints** du super-élément qui s'interprète comme la matrice des fonctions de forme du super-élément. On appelle **problème aux valeurs propres internes** le problème pour lequel tous les degrés de liberté retenus d'un super-élément sont fixés, tous les autres degrés de

liberté restant libres. La première pulsation propre de ce problème particulier est notée  $\Omega_1$ . La condensation n'altère pas les pulsations  $\omega$  cherchées tant que  $\omega$  reste petit devant  $\Omega_1$ . Il existe des algorithmes permettant de mesurer l'erreur produite par la condensation. Les plus utilisés sont dus à Krylov-Bogoliubov, et à Temple-Kato, selon que l'on ait ou non une estimation de la fréquence propre immédiatement supérieure à celle déterminée. Plus les bornes sur la solution sont espacées, plus la condensation a altéré la fréquence propre calculée. Toute condensation introduisant une contrainte entre les degrés de liberté via la relation de Guyan, il en résulte que les fréquences calculées sur le système condensé sont nécessairement supérieures aux fréquences calculées sur le système complet des degrés de liberté (théorème de Rayleigh).

En pratique, il est toujours délicat de choisir les degrés de liberté retenus, et ceci quel que soit le critère utilisé pour sélectionner les  $\mathbf{q}_r$  : un nœud du maillage peut être au voisinage d'un ventre de vibration pour un mode, mais au voisinage d'un nœud de vibration pour un autre mode, et réciproquement. La technique de condensation de Guyan n'est plus guère utilisée, sauf dans l'industrie spatiale pour un certain nombre de raisons historiques. La qualité du super-élément, créé sans aucune condition à la limite, est contrôlée par l'énergie de déformation de ses modes rigides qui doit rester inférieure à un certain seuil. En effet, la condensation altérant les fréquences et la forme des modes propres, un mode rigide ne vérifie pas exactement la relation

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} = 0$$

### 19.3.2. Méthode des modes composants

La méthode développée par Hurty et améliorée par **Craig et Bampton**, est la méthode à interfaces fixes. D'autres méthodes, à interfaces libres ou hybrides existent également, elles ne diffèrent de la précédente que par le choix des modes propres internes à chaque super-élément.

#### Création

On retient tous les degrés de liberté de frontières du super-élément,  $\mathbf{A}$  étant la matrice des modes contraints

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cr} \end{pmatrix} \mathbf{q}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{q}_f$$

A l'intérieur du super-élément, on résout le problème aux valeurs propres internes obtenu en fixant tous les degrés de liberté retenus. Les déplacements dans le super-élément peuvent toujours s'exprimer sous forme de combinaisons linéaires des modes propres internes du super-élément car ils en constituent une base soit  $\mathbf{q}_i = \mathbf{X}\mathbf{b}$ . Soit  $\mathbf{X}$  est la matrice colonne ( $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ ) des  $n$  premiers vecteurs propres internes, appelée matrice des **modes normaux** et où  $\mathbf{b}$  est le vecteur des **intensités modales** associées. On enrichit l'information contenue dans le super-élément en prenant comme degrés de liberté retenus non seulement les  $\mathbf{q}_r$  mais en y ajoutant les intensités  $\mathbf{b}$  : le déplacement dans le super-élément est une combinaison des modes contraints et des modes normaux.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q}_r$$

Les matrices  $\mathbf{K}^*$  et  $\mathbf{M}^*$  du super-élément sont générées par la même technique que précédemment mais elles sont différentes car le vecteur des degrés de liberté retenus est différent. On écrit les énergies de déformation et cinétique sous deux formes, la première en fonction de tous les degrés de liberté, la seconde en fonction des degrés de liberté retenus, on obtient

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}}_r \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_r^T \mathbf{K}^* \mathbf{q}_r$$

### Utilisation et restitution

Il n'y a aucune différence par rapport à ce qui a été décrit pour la méthode de Guyan. Une contrainte étant appliquée sur la structure (nullité des forces d'inertie sur les degrés de liberté condensés), les fréquences calculées en utilisant des super-éléments sont toujours supérieures à celles calculées sur la structure complète sans super éléments. La création d'un super-élément modes composants est plus longue que la création d'un super-élément de Guyan car il faut calculer les modes normaux mais la **méthode des modes composants** ne pose pas le problème du choix des degrés de liberté intérieurs à retenir, et elle fournit généralement une très bonne approximation de la solution. Le nombre de modes normaux à calculer ne dépend que de l'écart entre les fréquences de la structure et la première fréquence  $\Omega_1$  du problème aux valeurs propres internes. Cette règle est cependant non quantifiable et dépend de la physique du problème. Lorsqu'il est difficile d'estimer l'écart entre les fréquences cherchées et la première fréquence du problème aux valeurs propres internes, il suffit soit de retenir quelques degrés de liberté internes en plus des vrais degrés de liberté de frontière, soit de prendre un nombre plus important de modes internes ce qui a pour effet d'augmenter le temps de création mais d'améliorer la qualité du spectre calculé.

## Chapitre 20

# Structures en matériaux composites

### 20.1. MATERIAUX COMPOSITES

Un matériau est dit composite lorsqu'il est la combinaison macroscopique de plusieurs matériaux : torchis, béton armé... Le but de ce « mélange » est d'obtenir un matériau dont les performances sont meilleures que celles de chacun de ses composants, ou qu'aucun de ses composants n'a. Le matériau composite est constitué d'une ou plusieurs phases discontinues (**renforts**) noyés dans une phase continue (**matrice**). Cette dernière est habituellement la plus souple, elle sert essentiellement à maintenir la cohésion de l'ensemble renforts-matrice.

Les **composites à particules** ont des renforts de type particules, sans dimensions ni orientation privilégiées. Ces matériaux sont souvent considérés comme isotropes dans les modélisations macroscopiques, ils ne nécessitent pas de modélisation spécifique. Les **composites à fibres** ont des renforts de type fibres continues ou discontinues. Dans le premier cas, le matériau est macroscopiquement anisotrope. Dans le second cas, si les fibres courtes sont orientées (par exemple du fait de l'injection de la pièce), il y a anisotropie. Mais si les fibres courtes n'ont pas d'orientation particulière, là encore le matériau est considéré comme isotrope d'un point de vue macroscopique (**mat**).

Les **unidirectionnels** ou UD sont des nappes de fils plutôt continus, disposés dans un plan et tous orientés de la même manière. En pratique, il y a toujours une liaison latérale pour maintenir les mèches les unes par rapport aux autres avant l'immersion dans la matrice : les UD sont des tissus particuliers pour lesquels il y a une large prédominance de la chaîne. Les **tissus** sont des ensembles réalisés sur des métiers à tisser et constitués d'une chaîne (fils parallèles à la longueur) et d'une trame (fils perpendiculaires à la longueur et entrecroisant la chaîne). Les différentes appellations de tissus (toile, taffetas,

sergé, satin ...) proviennent des modes d'entrecroisement des fils, de leur type et de leur masse. Les tissus posent encore aujourd'hui un certain nombre de problèmes de modélisation dus principalement à l'entrelacement des fibres et aux mécanismes microscopiques qui s'y développent sous la charge, en particulier le contact avec frottement entre les fibres. Les UD et les tissus se prêtent assez bien au calcul de structures, moyennant quelques hypothèses simplificatrices développées dans ce chapitre. Les **pré-imprégnés** sont des produits vendus sous forme de tissus, UD ... imprégnés de résine partiellement polymérisée. Ils se présentent sous la forme de rouleaux ou de plaques. En ce qui concerne la modélisation, que les plis soient pré-imprégnés ou non n'engendre pas de différence. Le **drapage** des pièces est rendu plus facile, la manipulation des rouleaux est aisée, il y a moins de vapeurs toxiques. Lorsque les pré-imprégnés sont mis en place, il suffit généralement de chauffer pour réactiver la polymérisation de la résine et terminer ainsi la pièce. Le volume de fibres est élevé de manière à avoir de bonnes caractéristiques mécaniques. Un **stratifié** ou **laminé** est l'empilement de différents plis, de matériaux, d'épaisseur et d'orientation diverses, disposés de façon à obtenir la raideur et la résistance voulues (Figure 20.1). Les structures réalisées par RTM ou par infusion se calculent comme des stratifiés classiques, même si la stratification n'est pas effectuée de la même manière. On ne s'intéressera ici qu'aux structures stratifiées dont le **sandwich** est un cas particulier.

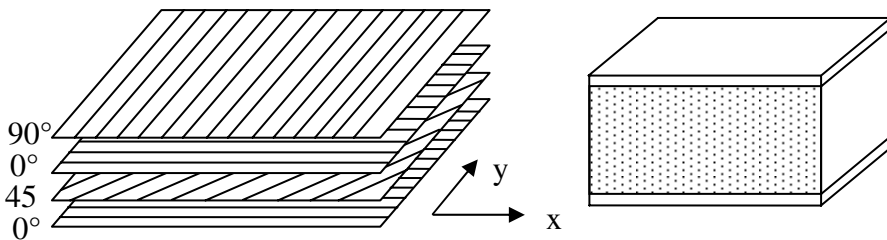


Figure 20.1 : Stratifié et sandwich

Par rapport aux métaux classiques, les matériaux composites à fibres ont une très grande résistance spécifique. Par contre, ils ont de faibles propriétés dans les directions transverses du fait des propriétés de la matrice. Il s'ensuit que les charges « secondaires » doivent être évaluées avec précision. On considère généralement pour le dimensionnement des structures que les matériaux composites n'ont pas de domaine plastique : ils sont fragiles et sont donc très sensibles aux concentrations de contraintes. Le calcul des structures en matériaux composites est sensiblement différent de celui réalisé pour une structure en matériaux isotropes. Du fait de l'anisotropie et de la stratification, le volume des données à introduire est conséquent et nécessite des outils de pré-

traitement adaptés à ce type de matériaux. Pour certains éléments, une phase d'**homogénéisation** est indispensable pour déterminer les caractéristiques anisotropes équivalentes globales de chaque **couche** (ou **pli**) constituée de renforts et de résine. Après un calcul de structure classique au cours duquel sont calculées les déplacements et les réactions, une phase de retour aux résultats pli par pli est indispensable car les contraintes moyennes intégrées sur l'élément n'apportent pas de renseignement suffisant pour estimer la tenue sous la charge d'un élément composite. L'objectif de ce chapitre est d'expliquer les techniques de calcul dans le domaine linéaire, et non d'étudier les mécanismes de dégradation et la ruine de la structure.

## 20.2. HYPOTHESES DE CALCUL

Les hypothèses suivantes, qui ne sont pas toujours bien en accord avec ce qui se passe lors de la fabrication (expliquant souvent les écarts entre le calcul et la mesure), sont à la base des théories utilisées dans les codes éléments finis pour les UD et les tissus.

- Les différentes couches sont reliées entre elles par la même matrice que celle qui maintient les renforts dans chaque couche.
- Les fils constituant un UD sont parfaitement alignés et parallèles entre eux dans l'UD. Les fils constituant la trame (chaîne) d'un tissu sont parfaitement alignés et parallèles entre eux dans la trame (chaîne).
- Le pli est un matériau homogène orthotrope ou isotrope transverse.
- Le pli est toujours en état plan de contrainte.
- Les liaisons inter-plis et renforts-matrices sont parfaites (pas de glissement inter-plis, ni de glissement des fibres par rapport à la résine).
- Le comportement du pli est élastique linéaire jusqu'à la rupture.

## 20.3. RELATION CONTRAINTE-DEFORMATION POUR UN PLI

Conventionnellement, pour chaque pli, l'axe des fibres est repéré par l'indice 1, l'axe perpendiculaire aux fibres dans le plan du pli par 2 et la direction transverse au plan du pli par 3. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, il existe une relation de proportionnalité entre les déformations et les contraintes. Les coefficients élastiques sont des constantes et on écrit avec le formalisme matriciel, les tenseurs déformations et contraintes étant ramenés à des vecteurs de 6 composantes par exploitation des symétries,

$$\sigma = H \varepsilon \quad \varepsilon = H^{-1} \sigma = C \sigma$$

**H** est la **loi de Hooke généralisée** (ou loi de comportement du matériau), **C** est son inverse dite **loi de compliance**. Un **matériau** est **orthotrope** lorsqu'il

possède trois plans de symétrie, deux à deux orthogonaux. Neuf coefficients indépendants caractérisent un matériau orthotrope : les trois modules de Young, les trois modules de cisaillement et trois coefficients de Poisson sachant que par symétrie de la loi de Hooke :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

Ce sont les coefficients du pli homogénéisé et non ceux des fils ou de la résine. Ils sont déterminés expérimentalement, en utilisant des modèles analytiques, ou par simulation numérique. Pour les matériaux orthotropes, dans les axes d'orthotropie, la matrice de compliance s'écrit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix}$$

La relation inverse fait apparaître les constantes de rigidité du matériau :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$$

Les UD sont en plus très souvent considérés comme **isotropes transverses**, c'est à dire qu'ils ont un comportement isotrope dans le plan perpendiculaire à la direction des fils. Il en résulte un certain nombre de relations entre les coefficients élastiques de la loi matérielle, exprimée dans le repère d'orthotropie. Un tel matériau est caractérisé par 5 coefficients élastiques :

$$E_1 \quad E_2 = E_3 \quad \nu_{12} = \nu_{13} \quad \nu_{23} \quad G_{12} = G_{13} \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$$

Pour un mat, cinq coefficients sont également nécessaires, mais l'isotropie est dans le plan 12 et non dans le plan 23 comme précédemment. Les coefficients sont alors :

$$E_1 = E_2 \quad E_3 \quad \nu_{12} \quad \nu_{13} = \nu_{23} \quad G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad G_{13} = G_{23}$$

Pour un tissu équilibré, c'est à dire comportant autant de fils de chaîne que de fils de trame, six coefficients sont nécessaires : ce n'est donc pas équivalent à superposer deux UD orientés à  $90^\circ$  l'un de l'autre (indépendamment de l'entrecroisement pour l'un et la superposition pour l'autre).

$$E_1 = E_2 \quad E_3 \quad \nu_{12} \quad \nu_{13} = \nu_{23} \quad G_{12} \quad G_{13} = G_{23}$$

La raideur obtenue avec un renfort tissé est inférieure à celle obtenue par superposition de deux UD dans des directions perpendiculaires. Ceci est dû à la procédure de tissage qui donne aux fibres une succession de courbures rendant le pli plus déformable. Les tissus épousent bien les formes gauches. Certains tissus sont obtenus par simple superposition d'UD, sans tissage des plis entre eux mais avec un tissage de fils de verre pour maintenir la position relative des deux UD.

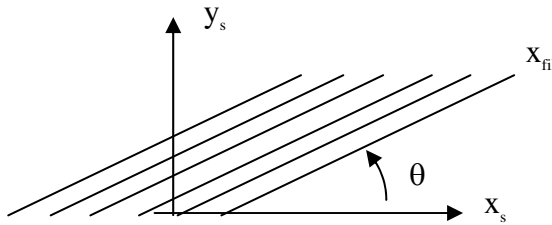


Figure 20.2 : Orientation d'un pli dans le repère du stratifié

Soit maintenant le repère du stratifié, référencé par l'indice  $s$ , dont le troisième axe est parallèle au troisième axe conventionnel des plis qui le constituent (Figure 20.2). La direction des fils du pli considéré fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $x$  du repère. Quand on donne l'orientation d'un pli,  $45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $-30^\circ$ , c'est par rapport à ce repère. Les relations suivantes permettent d'exprimer dans ce repère les déformations et les contraintes supposées connues dans le repère conventionnel attaché au pli considéré :

$$[\sigma]_{fil} = \mathbf{R} [\sigma]_s \mathbf{R}^T \quad [\sigma]_s = \mathbf{R}^T [\sigma]_{fil} \mathbf{R}$$

Cette relation est vraie sous forme tensorielle. Pour passer d'un repère à l'autre, il est nécessaire d'effectuer séquentiellement deux multiplications de matrices de dimension 3. En général, on utilise la notation ingénieur (on range dans un « vecteur » les composantes du tenseur) et on retranscrit cette relation sous



forme vectorielle en faisant apparaître les matrices de passage d'un repère à l'autre, pour les contraintes et pour les déformations. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \{\sigma\}_s = T'_\sigma \{\sigma\}_{fil}$$

Pour le comportement membranaire, le lien entre les contraintes et les déformations dans le repère du stratifié s'écrit, si  $\theta$  est l'angle que forme la direction 1 avec l'axe  $x$  du repère ( $s = \sin(\theta)$  et  $c = \cos(\theta)$ ) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{E_{11}} & \overline{E_{12}} & \overline{E_{16}} \\ \overline{E_{12}} & \overline{E_{22}} & \overline{E_{26}} \\ \overline{E_{16}} & \overline{E_{26}} & \overline{E_{66}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\overline{E_{11}} = c^4 C_{11} + s^4 C_{22} + 2s^2 c^2 C_{12} + 4s^2 c^2 C_{66}$$

$$\overline{E_{22}} = s^4 C_{11} + c^4 C_{22} + 2s^2 c^2 C_{12} + 4s^2 c^2 C_{66}$$

$$\overline{E_{66}} = c^2 s^2 C_{11} + c^2 s^2 C_{22} - 2c^2 s^2 C_{12} + (c^2 - s^2)^2 C_{66}$$

$$\overline{E_{12}} = c^2 s^2 C_{11} + c^2 s^2 C_{22} + (c^4 + s^4) C_{12} - 4c^2 s^2 C_{66}$$

$$\overline{E_{16}} = -sc^3 C_{11} + cs^3 C_{22} + cs(c^2 - s^2) C_{12} + 2sc(c^2 - s^2) C_{66}$$

$$\overline{E_{26}} = -cs^3 C_{11} + sc^3 C_{22} - cs(c^2 - s^2) C_{12} - 2sc(c^2 - s^2) C_{66}$$

## 20.4. CRITERE DE RUPTURE

On suppose que la limite d'élasticité s'identifie à la limite à la rupture. Il est nécessaire, du fait de l'orthotropie, de distinguer les différentes directions et les différentes limites. On note  $X_l$  la contrainte limite en traction dans le sens des fils,  $X_c$  la contrainte limite en compression dans le sens des fils,  $Y_l$  et  $Z_l$  les contraintes limites en traction dans les directions conventionnelles du pli 2 et 3,  $Y_c$  et  $Z_c$  celles en compression. On note également  $R$ ,  $S$  et  $T$  les contraintes de cisaillement limites, respectivement dans les plans 23, 31 et 12. Les limites axiales sont plutôt données par la résistance des fils, les limites transverses par la résistance de la résine. La dégradation de la résine se produit généralement pour des niveaux de contraintes relativement faibles, les contraintes transverses (comportant l'indice 3) peuvent causer le délaminage de l'empilement. Pour exploiter les résultats d'une analyse mettant en jeu des matériaux composites, il

faut disposer d'outils puissants pour le pré et pour le post-traitement : il n'y a pas un critère par maille mais pour chaque maille, un critère par pli. **Tous les critères font apparaître pour un pli les contraintes dans le repère conventionnel attaché aux fils et lui seul.** Quel que soit le critère, un calcul linéaire n'a de sens que si chaque pli de chaque maille est non dégradé. Pour les matériaux métalliques, on utilise essentiellement un critère multiaxial (Von Mises) pour vérifier que le matériau est dans son domaine élastique, les critères mono-axiaux n'étant en principe utilisés que pour des charges mono-axiales. En composites, les critères monoaxiaux sont très souvent employés car ils donnent des résultats satisfaisants dans la plupart des cas. Le **critère de la contrainte maximale**, mono-axial, suppose que la rupture apparaît lorsque dans le pli considéré, l'une des contraintes atteint sa limite, ce qui s'écrit :

$$\sigma_1 \geq X_t \text{ ou } |\sigma_1| \geq X_c \quad \sigma_2 \geq Y_t \text{ ou } |\sigma_2| \geq Y_c \quad \sigma_3 \geq Z_t \text{ ou } |\sigma_3| \geq Z_c$$

$$|\tau_{23}| \geq R \quad |\tau_{31}| \geq S \quad |\tau_{12}| \geq T$$

Le **critère de la déformation maximale**, mono-axial, suppose que la rupture apparaît lorsque dans le pli considéré, l'une des déformations atteint sa limite :

$$\varepsilon_1 \geq A_t \text{ ou } |\varepsilon_1| \geq A_c \quad \varepsilon_2 \geq B_t \text{ ou } |\varepsilon_2| \geq B_c \quad \varepsilon_3 \geq C_t \text{ ou } |\varepsilon_3| \geq C_c$$

$$|\gamma_{23}| \geq U \quad |\gamma_{31}| \geq V \quad |\gamma_{12}| \geq W$$

On définit pour ces deux critères des marges de sécurité par :

$$MS = \frac{\text{valeur admissible}}{\text{valeur calculée}} - 1$$

Si la marge est positive, le seuil de dégradation n'est pas atteint. Si la marge est nulle, le seuil est atteint. Si la marge est négative, le seuil est dépassé et le calcul linéaire réalisé n'a pas de sens car au moins un pli a commencé à se dégrader pour un niveau de charge inférieur au niveau appliqué.

Les critères multi-axiaux, essentiellement basés sur des résultats expérimentaux, définissent une enveloppe limite dans l'espace des contraintes principales, analogue à la surface de plasticité en élasto-plasticité. Certains critères font intervenir des coefficients d'interaction dont la détermination expérimentale peut s'avérer très délicate. Le **critère de Tsai-Hill** s'écrit dans le repère d'orthotropie, dans l'hypothèse d'un état plan de contrainte pour le pli :

$$TSH = \left( \frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \left( \frac{\tau_{12}}{T} \right)^2$$

En pratique, on le trouve sous une forme simplifiée, qui suppose que les contraintes limites soient les mêmes dans les deux directions transverses, que ce soit en traction ou en compression. Cela n'implique pas que le matériau soit isotrope transverse.

$$TSH2D = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{T}\right)^2$$

Ce critère est très utilisé, mais il ne donne pas d'information quant aux mécanismes de dégradation eux-mêmes : il indique « seulement » quels sont les plis dégradés dans un élément donné du maillage. On définit la marge de sécurité au sens du critère de Tsai-Hill par :

$$MS = \frac{1}{\sqrt{TSH2D}} - 1$$

En pratique, il suffit de vérifier la marge pour le pli le plus critique de chaque élément du maillage, d'où la notion de marge critique.

Le **critère de Hashin** est un multi-critère qui analyse quatre modes de rupture

- rupture due à la traction dans le sens des fils,
- rupture en compression dans le sens des fils
- rupture de la résine en traction
- rupture de la résine en compression

Il permet de savoir quelle est la cause du problème et donc d'y remédier en ajoutant au bon endroit les plis dans la direction nécessaire pour supporter la charge. Il s'applique essentiellement aux UD car il suppose a priori l'isotropie transverse du pli.

Les limites admissibles en contraintes ne peuvent pas être quelconques. Il arrive que l'utilisateur, ne connaissant pas une limite qui semble ne pas intervenir dans son calcul, rentre une valeur « arbitraire » pour la limite considérée et que le calcul s'arrête de façon plus ou moins inexplicable. Les limites doivent permettre de définir une surface de rupture convexe.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^2 Y^2} &> \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \right] & \frac{1}{Y^2 Z^2} &> \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right) \right] \\ \frac{1}{X^2 Z^2} &> \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \right) \right] \end{aligned}$$

## 20.5. ELEMENTS FINIS COMPOSITES

Outre les éléments axisymétriques non décrits ici et utilisés pour la modélisation des structures réalisées par enroulement filamentaire (structures bobinées), les bibliothèques d'éléments finis comportent des membranes, des coques et des volumes. Par rapport aux éléments « classiques », ils n'ont de particulier que la définition des matériaux constituant les plis et la séquence d'empilement des plis. Les fonctions de forme des éléments, les théories sur lesquelles ils sont basés, les règles d'utilisation ne dépendent pas des propriétés des matériaux constitutifs. Les coques étant géométriquement décrites par leur feuillet moyen, les plis sont conventionnellement superposés de  $-z$  vers  $+z$  dans le repère propre de l'élément d'où l'importance de vérifier l'orientation cohérente de tous les éléments sur lesquels un même laminé est déposé. Lorsque plusieurs laminés sont superposés, la même règle est utilisée pour leur position respective dans l'épaisseur des éléments. Une convention équivalente existe pour la stratification dans un élément de volume d'où la nécessité d'être vigilant quant à leur définition topologique.

## 20.6. HOMOGENEISATION DES COQUES

Lorsque la structure ou une de ses parties a une dimension sensiblement plus petite que les deux autres, il est intéressant de ne décrire que le feuillet moyen et d'utiliser des éléments de membrane ou de coque dans le modèle éléments finis. La théorie de l'homogénéisation des panneaux composites repose sur les hypothèses cinématiques classiques et sur les hypothèses de non-glissement inter-plis et intra-plis (Figure 20.3). L'indice 0 indiquant qu'il s'agit de grandeurs déterminées dans le feuillet moyen, le déplacement d'un point quelconque de cote  $z$  dans une section droite s'écrit sous la forme suivante pour une coque mince (hypothèse de Kirchhoff). On en déduit les trois déformations.

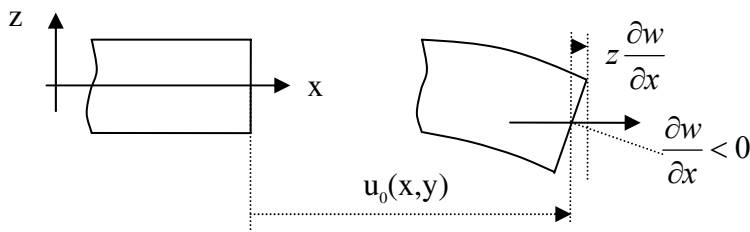


Figure 20.3 : Hypothèse cinématique

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

On met ensuite en place la relation liant les flux aux déformations et courbures du feuillet moyen. L'intégrale sur l'épaisseur se fait en effectuant la somme pour tous les plis qui constituent l'empilement, chaque pli  $k$  ayant son matériau dont les coefficients dans le repère du stratifié sont les  $\overline{E}_{ij}^k$  du paragraphe 3, son orientation  $\theta_k$  dans le stratifié, sa face inférieure à l'altitude  $z_{\text{inf},k}$ , sa face supérieure à l'altitude  $z_{\text{sup},k}$

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{xx} dz & N_{yy} &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{yy} dz & N_{xy} &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{xx} z dz & M_y &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{yy} z dz & M_{xy} &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{xy} z dz & \Gamma_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_1^N \overline{E}_{ij}^k e_k = \sum_1^N \overline{E}_{ij}^k (z_{\text{sup},k} - z_{\text{inf},k})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_1^N \overline{E}_{ij}^k (z_{\text{sup},k}^2 - z_{\text{inf},k}^2) \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_1^N \overline{E}_{ij}^k (z_{\text{sup},k}^3 - z_{\text{inf},k}^3)$$

**A** est la **matrice de membrane** du stratifié. Elle relie les flux membranaires aux déformations du feuillet moyen. **D** est la matrice de flexion qui relie les flux de moments aux courbures, **B** est la matrice de couplage. Les termes de **B** s'éliminent deux à deux et le couplage extension/flexion n'apparaît pas pour des empilements à **symétrie miroir**, c'est à dire lorsque les empilements de plis sont symétriques de part et d'autre du plan moyen. Pour un empilement à symétrie miroir, il peut y avoir un couplage entre la traction-compression et le cisaillement dans le plan du stratifié : une variation de longueur s'accompagne

d'une variation d'angle et réciproquement, ce qui n'est pas le cas pour un matériau isotrope. Ce couplage disparaît si le **stratifié** est **équilibré**, c'est à dire si, outre la symétrie miroir, il y a autant de pli à  $+\theta$  que de plis à  $-\theta$  dans l'empilement. Dans le cas d'un stratifié à symétrie miroir, même équilibré, il y a a priori un couplage entre la flexion et la torsion via les termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Si les plis sont orientés exclusivement à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  dans le repère du stratifié, ces termes de couplage sont nuls et il y a découplage entre la torsion et la flexion.

Pour les coques d'épaisseur modérée, c'est-à-dire les coques pour lesquelles la déformation à l'effort tranchant est prise en compte, la relation efforts-déformations s'écrit,  $\phi_0$  étant la rotation de section du feuillet moyen,  $\gamma_0$  la distorsion angulaire,  $\mathbf{F}$  la matrice de raideur transverse :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \phi_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $A_{ij}$  sont indépendants de l'ordre d'empilement des plis du stratifié alors que les coefficients  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  ne le sont pas. Changer la séquence d'empilement modifie le comportement flexionnel et les couplages dans la structure.

## 20.7. MATRICE DE RAIDEUR ET CALCUL

La relation matricielle précédente, qui relie les flux aux déformations et courbures du feuillet moyen, n'est en pratique utilisable que pour des panneaux rectangulaire, pleins (sans trous), soumis à des flux connus. En éléments finis, on relie les forces extérieures aux déplacements par la matrice de raideur, construite à partir des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  pour les éléments constitués de matériaux composites.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_S \int_e \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dz dS = \frac{1}{2} \int_S \left( \sum_1^N \int_{e_k} (\sigma_{xx}^k \varepsilon_{xx}^k + \sigma_{yy}^k \varepsilon_{yy}^k + \tau_{xy}^k \gamma_{xy}^k) \, dz^k \right) dS \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_S N_{xx} \varepsilon_{xx0} + M_{xx} \Gamma_{xx0} + N_{xy} \varepsilon_{xy0} + M_{yy} \Gamma_{yy0} + N_{yx} \Gamma_{xy0} + M_{xy} \Gamma_{xy0} \right) dS \\ &= \frac{1}{2} \int_S \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_C & \mathbf{B}_C \\ \mathbf{B}_C & \mathbf{D}_C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\Gamma}_0 \end{pmatrix} dS = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{K} = \int_S \hat{\mathbf{B}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_C & \mathbf{B}_C \\ \mathbf{B}_C & \mathbf{D}_C \end{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} \, dS \end{aligned}$$

Dans la relation ci-dessus,  $\mathbf{A}_C$ ,  $\mathbf{B}_C$  et  $\mathbf{D}_C$  sont les matrices caractéristiques de l'empilement après homogénéisation,  $\hat{\mathbf{B}}$  la matrice des déformations. La matrice

de raideur est déterminée en intégrant sur la surface de l'élément et non sur le volume comme pour un élément constitué d'un matériau isotrope, car les matrices  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$  et  $\mathbf{D}_c$  sont obtenues en intégrant selon l'épaisseur. Si deux plis ont toutes leurs caractéristiques identiques, on doit néanmoins leur affecter des numéros différents dans la séquence d'empilement pour que le programme puisse revenir aux déformations et aux contraintes dans tous les plis. Un pli est étalé sur une maille entière et ne peut en aucun cas ne couvrir qu'une portion de maille. Un programme ne gère pas un nombre de plis variable sur un élément.

Quel que soit l'élément fini choisi, la procédure de calcul est schématiquement la suivante, si les données nécessaires lui ont été fournies :

- définition des caractéristiques mécaniques et géométriques des plis
- définition de la stratification et de l'étalement
- calcul de la matrice de raideur élémentaire homogénéisée
- assemblage pour tous les éléments, inversion et calcul des déplacements
- calcul des déformations et des courbures du feuillet moyen
- calcul des déformations dans chaque pli dans le repère structural
- calcul des déformations dans chaque pli dans le repère conventionnel du pli
- calcul des contraintes dans le repère du pli
- calcul du ou des critères souhaités
- calcul de la marge la plus critique associée aux critères précédents.

## 20.8. MODELISATION

Un pli a une épaisseur constante, que ce soit un pré-imprégné ou non, que ce soit un mat, un UD ou un tissu. Ce n'est plus forcément le cas de l'empilement selon le procédé utilisé, l'épaisseur du pli pour le calcul éléments finis étant celle du pli après polymérisation. Dans le cas des structures non développables, de forme particulière (fermeture d'un cylindre) ou de dimensions telles qu'il faille plusieurs bandes de matériaux, il faut partiellement superposer les morceaux pour que la pièce ait sa cohésion : la résine ne lie pas correctement des plis mis bords à bords. Il peut être important de modéliser le recouvrement partiel des bandes. La modélisation des zones d'assemblage pose généralement des problèmes du fait des techniques utilisées et parce que l'on veut vérifier les marges de sécurité dans chaque pli.

La continuité physique d'une peau est souvent requise (performances aérodynamiques ou hydrodynamiques) alors que le nombre de plis est rarement constant sur une structure. Si la structure est maillée avec des éléments de coque, et s'il s'avère nécessaire de prendre en compte le décalage, on peut

réaliser un offset du feuillet moyen, ou définir un pli de matériau fictif ayant de très faibles caractéristiques mécaniques (Figure 20.4). Ce pli permet d'avoir la continuité du feuillet moyen et celle de la peau, mais il ne doit pas participer à la raideur de la structure et il ne doit pas être critique vis-à-vis des critères utilisés en post-traitement. Pour ce faire, il doit être constitué d'un matériau dont les coefficients élastiques sont de quelques ordres de grandeur plus faibles que ceux des vrais matériaux et dont les limites (en contraintes et/ou en déformations) sont de quelques ordres de grandeur plus grandes que celles des vrais matériaux.

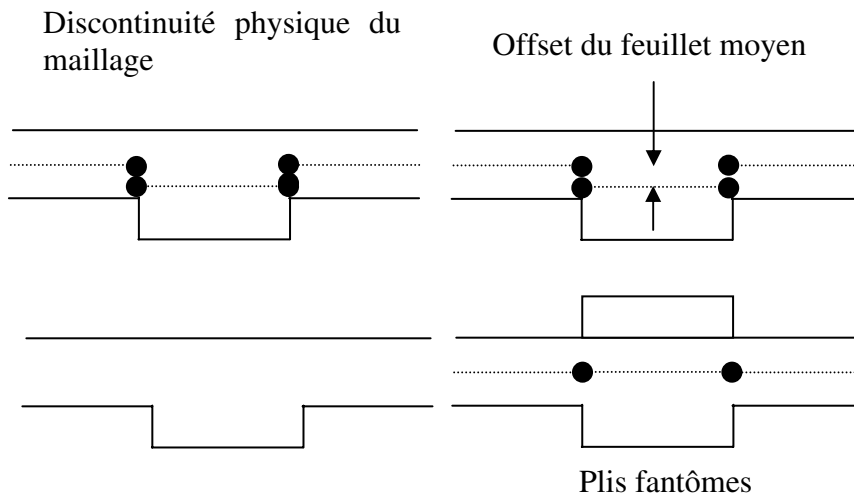


Figure 20.4 : Offset et pli fantôme

Quand les structures ont une géométrie non développable, l'orientation des fibres change et leur taux évolue sur la structure (calotte sphérique par exemple). La procédure d'étalement (drapage) physiquement réalisée doit être scrupuleusement décrite pour que le modèle numérique soit représentatif de la structure réelle.

## 20.9. SANDWICH

Une **structure sandwich** est une structure en matériau composite stratifié au sens classique du terme, mais les matériaux intervenant dans l'empilement ont des caractéristiques mécaniques très différentes. Deux **peaux**, plus ou moins minces, elles mêmes isotropes ou composites multicouches, sont séparées par un **cœur** (ou **âme**) de faible masse volumique et de faibles caractéristiques mécaniques dont le rôle est principalement de garder l'écartement entre les peaux et d'assurer ainsi une grande rigidité à la section tout en étant extrêmement léger. Les sandwiches s'endommagent assez facilement soit par



rupture (en traction), soit par poinçonnement (écrasement du cœur sous une charge transversale ponctuelle), soit par flambement local des peaux ou global entraînant un délaminage entre la peau et le cœur. Il s'ensuit une perte de propriétés mécaniques de la structure. Les peaux reprennent l'essentiel des contraintes normales dues aux efforts dans le plan du panneau ou aux moments qui lui sont appliqués. Le cœur reprend l'essentiel des contraintes de cisaillement transversal dues aux efforts tranchants, et transmet les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les modules de cisaillement sont généralement assez faibles d'où une déformation à l'effort tranchant souvent significative alors qu'elle est négligeable dans les structures isotropes de dimensions équivalentes.

Du fait de l'assemblage des divers constituants du panneau et de leurs caractéristiques, l'**élancement** géométrique n'est plus suffisant pour déterminer la déformabilité de la structure à l'effort tranchant. Elle est représentée par la quantité  $S$ , rapport des raideurs en flexion et en cisaillement :

$$S = \frac{E}{G} \left[ \frac{h}{L} \right]^2$$

$G$  est le module de cisaillement transversal de l'âme et  $E$  est le module de Young homogénéisé des peaux dans le sens où elles travaillent sous la charge appliquée. Pour un matériau isotrope, le rapport  $E/G$  est de l'ordre de 2 et l'élancement géométrique permet de choisir le type de modélisation.

*Si  $S$  est petit par rapport à 1*, la structure est faiblement déformable à l'effort tranchant et peut donc être modélisée par des coques minces ou des coques d'épaisseur modérée : l'âme n'est qu'un pli de caractéristiques différentes et les peaux sont constituées d'un ou de plusieurs plis.

*Si  $S$  est de l'ordre de 1*, la structure est déformable à l'effort tranchant et peut être modélisée par des coques d'épaisseur modérée ou par un volume : l'âme n'est qu'un pli de caractéristiques différentes et les peaux sont constituées d'un ou de plusieurs plis.

*Si  $S$  est grand par rapport à 1*, il faut superposer des éléments de coque pour les peaux à un ou plusieurs éléments de volume dans l'épaisseur du cœur, voire empiler des volumes sur toute l'épaisseur du panneau.

La superposition d'éléments de coques et de volumes pour la modélisation des panneaux sandwichs pose un certain nombre de problèmes. Si les peaux ne sont pas minces par rapport au cœur, et qu'elles sont modélisées par des coques, pour que l'inertie en flexion du panneau soit bien calculée, il faut augmenter l'épaisseur du volume pour que le feuillet moyen des peaux soit bien positionné

(Figure 20.5). Cette modification d'épaisseur du cœur doit être accompagnée d'une diminution de son module de cisaillement pour que sa raideur soit bien évaluée :

$$G^* = G \frac{H}{H^*}$$

Il n'est pas nécessaire de faire ces adaptations si les peaux sont suffisamment minces par rapport à l'âme.

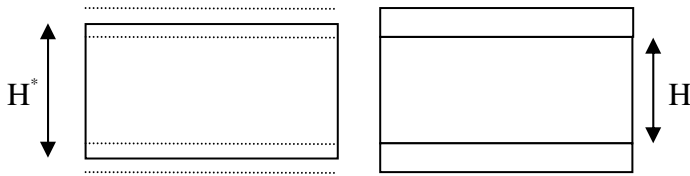


Figure 20.5 : Modifications des caractéristiques pour des assemblages coques-volume

D'autre part, les volumes et les coques n'ont pas les mêmes degrés de liberté : les moments de flexion dans la coque, transmis par les déplacements transversaux et les rotations, ne sont pas complètement repris par les éléments de volume. Il en résulte une dégradation des résultats qui augmente avec l'épaisseur relative des peaux par rapport à celle de l'âme. La superposition coque/volume/coque pour représenter l'assemblage peau/cœur/peau reste une modélisation délicate.

## 20.10. CONTRAINTES INTERLAMINAIRES

Les plis sont solidaires les uns des autres, leurs faces sont le siège de **contraintes interlaminaires** ou contraintes de cisaillement transverse qui peuvent être la cause de la rupture des structures composites par délaminage. Physiquement, elles traduisent le fait que les couches ne glissent pas les unes sur les autres. Elles sont dues à la différence des coefficients de Poisson dans les couches adjacentes de l'empilement. Ces contraintes interlaminaires ont une évolution parabolique dans l'épaisseur de chaque pli, sont continues à l'interface entre deux plis et sont nulles sur les peaux de l'élément de coque. Elles sont obtenues par vérification des équations d'équilibre local, à partir des contraintes planes dans chaque pli :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right)$$

En intégrant ces relations sur chacun des plis, on se ramène à la résolution d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues où  $n$  est le nombre de plis étalés sur l'élément, la relation a priori surabondante ( $n$  plis donc  $n+1$  interfaces) n'étant que l'équation d'équilibre restituant l'effort tranchant, déjà satisfaite par ailleurs. Les contraintes ainsi évaluées ne sont correctes que si les faces inférieure et supérieure de l'élément sont effectivement libres de contraintes. En particulier, dans le cas où les peaux d'un sandwich sont modélisées par des coques minces et l'âme par un ou plusieurs volumes, les contraintes de cisaillement transverse sont non nulles à l'interface coque/volume de sorte que la méthode de calcul exposée ci-dessus conduit à des résultats erronés.

## 20.11. DONNEES MATERIELLES

La modélisation des structures en matériaux composites dans le domaine linéaire ne pose pas de problème particulier. Des outils de pré-traitement et de post-traitement adaptés sont nécessaires pour la mise en données ainsi que pour le retour aux résultats pli par pli. En dimensionnement, quand une marge est négative, on rajoute des plis pour que la structure supporte la charge : on n'étudie pas le délaminage ou la rupture progressive des plis de la structure.

Il est relativement aisé de disposer du module d'élasticité et de la limite élastique d'un matériau métallique à température ambiante. Il n'en est pas de même pour les matériaux composites. En considérant qu'un pli est élastique jusqu'à rupture pour simplifier les choses, il n'en demeure pas moins que le module d'élasticité n'est généralement pas le même en traction et en compression, que la limite élastique en traction n'est pas la même que la limite élastique en compression. Si les diverses limites sont connues, le programme de calcul analyse le signe de la contrainte dans chaque direction d'un pli, de manière à estimer les critères avec la bonne limite. Si les limites en compression ne sont pas connues, les programmes utilisent en général les limites en traction quel que soit le signe de la contrainte.

Si le module de traction  $E_T$  est différent du module de compression  $E_C$ , un programme d'analyse linéaire n'est pas capable de prendre en compte le bon module dans une direction donnée. Pour ce faire, il faut partir d'une hypothèse (tous les plis sont en traction dans toutes les directions), calculer la matrice de raideur de chaque élément en utilisant le module en traction dans chaque direction, calculer les déplacements puis les contraintes. Si un pli est en traction dans une direction, son module est bien  $E_T$ , s'il est en compression, il aurait fallu prendre  $E_C$ . On reconstruit donc la matrice de raideur de chaque élément en fonction du signe de la contrainte dans chaque direction de chaque pli et on itère. Avec ces données, une compression dans une direction d'un pli peut devenir une traction et réciproquement. Le calcul est correct lorsque le signe de

la contrainte dans chaque direction de chaque pli est en accord avec le module qui a permis de la calculer. Cette procédure itérative ne peut être réalisée que lors d'analyses non linéaires car en mécanique linéaire, la matrice de raideur n'est évaluée qu'une seule fois. L'étude au-delà de la première dégradation partielle et l'utilisation de matériaux pour lesquels la loi de comportement est bilinéaire n'est donc pas possible avec ce type d'analyse. On se restreint donc à l'étude de matériaux ayant éventuellement des limites différentes en traction et en compression mais qui ont le même module d'élasticité en traction et en compression. Pour éviter le flambage des éprouvettes, on mène en général des essais de traction. Le module pris en compte dans le calcul linéaire ne traduit alors pas correctement le comportement de la structure (ce serait le même problème en calculant avec le module de compression) car il ne permet pas de bien déterminer le comportement des parties en compression.

Pour chaque pli (un pourcentage donné d'une fibre donnée et son complément d'une résine donnée), il faut connaître neuf coefficients élastiques, les neuf limites en contraintes (pour les critères en contrainte) et/ou les neuf limites en déformations (pour les critères en déformation). Dans le cas général, une partie de ces valeurs nécessaires pour le calcul de structures n'est pas connue et ne peut pas être mesurée facilement. Pour les UD et les tissus, on suppose que les limites et les coefficients manquants sont ceux de la résine seule, matériau isotrope pour lequel le module d'élasticité et la limite sont connus. On fait une analyse éléments finis avec ces valeurs, puis on les augmente de 10 voire 20%. Si les résultats de la nouvelle analyse sont équivalents à ceux de la première, c'est que la valeur de ces coefficients n'a pas d'influence et qu'il n'est pas nécessaire de la déterminer, le programme de calcul fonctionnant néanmoins parce qu'il a le nombre de données prévues.

Sur la Figure 20.6, sont représentés à titre d'exemple, en (a) la position et l'orientation d'un laminé sur l'antenne parabolique, en (b) les contraintes dans un pli, en (c) l'amplitude des déplacements sous charge et en (d) la marge la plus critique pour chaque élément du maillage.

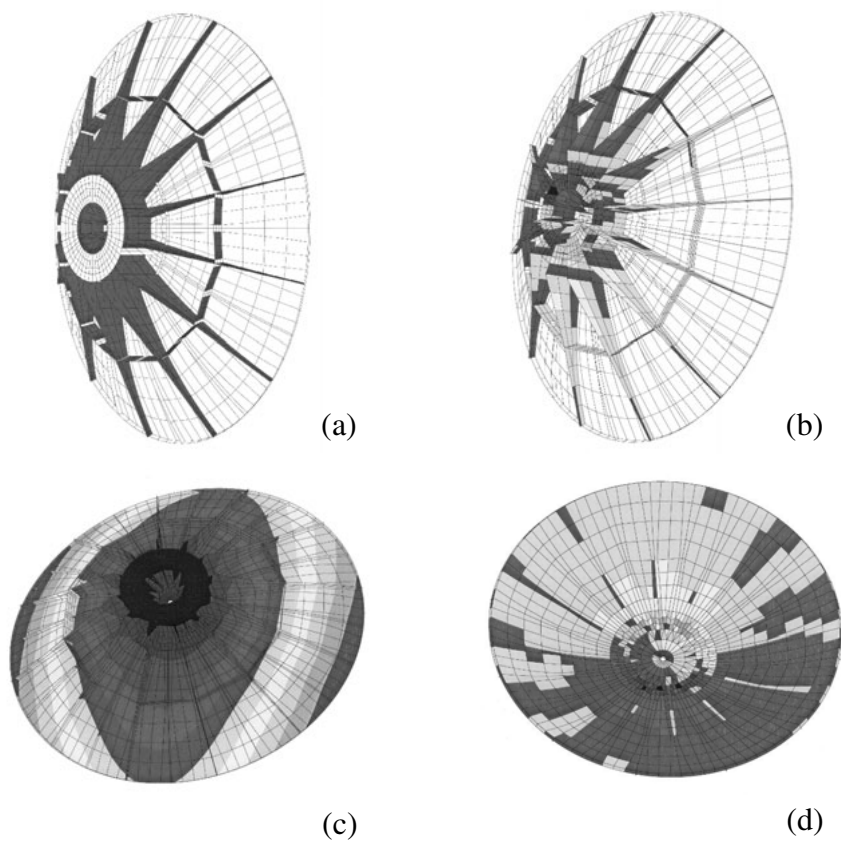


Figure 20.6 : Antenne parabolique

## Chapitre 21

### Plaque trouée

#### 21.1. TRIANGLES, QUADRANGLES

L'anneau mince utilisé dans le paragraphe 8.6 est maillé de façon structurée avec des T3, à partir d'un maillage quadrangulaire découpé de diverses façons (Figure 21.1) de manière à illustrer certaines notions importantes.

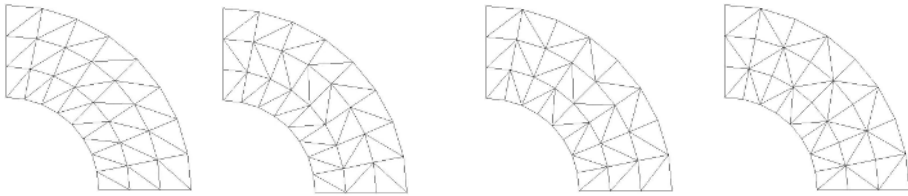


Figure 21.1 : Maillages triangulaires structurés

L'assemblage de deux T3 n'est pas équivalent à un Q4 bien qu'il y ait le même nombre de degrés de liberté : en schématisant par des ressorts les liens entre degrés de liberté d'un élément, on note bien la différence (Figure 21.2).

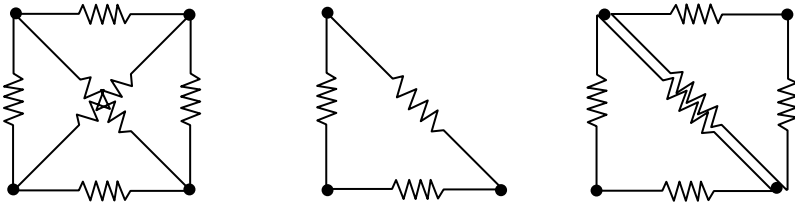
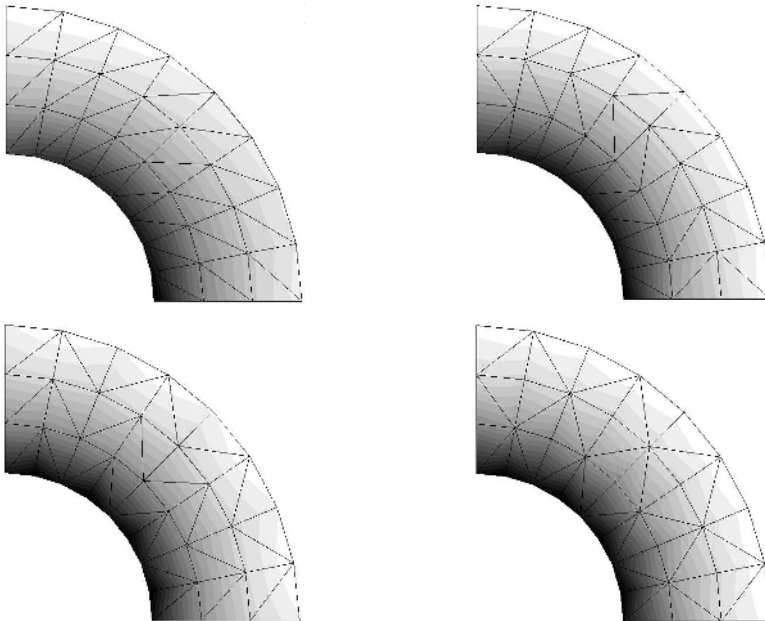


Figure 21.2 : Q4, T3 et assemblage de deux T3

Les quatre bords du quadrangle de référence jouent exactement le même rôle dans l'élément, mais dans le triangle de référence, l'hypoténuse n'est pas identique aux deux autres cotés. Il en résulte une dissymétrie de comportement, ce que l'on observe sur le déplacement (Figure 21.3). Cet effet est d'autant plus prononcé que le découpage favorise cette anisotropie apparente. Il n'apparaît pas lors de l'utilisation d'un outil de maillage automatique : les hypoténuses ont une orientation qui tend à être uniformément répartie, ce qui homogénéise l'assemblage et gomme le problème inhérent au triangle.



*Figure 21.3 : Amplitude des déplacements*

D'autre part, la contrainte est uniforme dans l'élément, puisque l'élément T3 n'a qu'un point d'intégration. Il n'est donc pas possible d'interpréter et de valider le champ de contrainte dans la structure (Figure 21.4). La contrainte équivalente évolue en  $1/r^2$  : le point d'intégration d'un triangle dont une arête borde l'intérieur de l'anneau est proche de cette arête et on y mesure une contrainte. Le point d'intégration d'un triangle tête-bêche, dont un sommet touche l'intérieur de l'anneau, est plus éloigné de cette arête et la contrainte que l'on y mesure est donc plus faible. C'est ce qui explique l'alternance observée, effet qui ne disparaît pas même en cas d'utilisation d'un outil de maillage automatique, mais qui diminue avec l'augmentation de la densité de maillage.

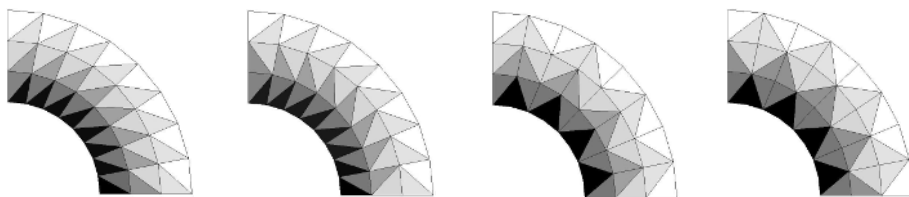


Figure 21.4 : Contraintes équivalentes

Dans le cas d'éléments de type T6, les problèmes détaillés précédemment sont moins aigus. L'assemblage de deux T6 a plus de degrés de liberté qu'un Q8, le T6 n'a pas une raideur excessive, les contraintes n'y sont pas uniformes (trois points d'intégration) et les contraintes extrapolées peuvent être analysées. Il n'en demeure pas moins qu'à qualité équivalente, le maillage en T6 comporte plus de degrés de liberté que celui en Q8 : les contraintes extrapolées aux nœuds des T6 ont naturellement de plus fortes discontinuités et le maillage doit être plus raffiné pour compenser ce problème.

## 21.2. RIDOIR

### 21.2.1. Présentation du problème

Ce problème est très classique, mais très présent dans le monde industriel. De nombreuses structures comportent des perçages dans lesquels seront placés des axes, des boulons, des rivets... On s'intéresse ici à une plaque rectangulaire de côté 15x22 mm, d'épaisseur uniforme 2 mm, percée en son centre d'un trou circulaire de rayon 3 mm. Elle est soumise à une traction uniforme agissant sur deux côtés opposés, d'intensité  $\sigma = 80 \text{ N/mm}^2$ . Cela correspond à l'étude de l'une des cellules du ridoir de la figure 21.5. La structure est en acier, le module de Young 210000 MPa, le coefficient de Poisson de 0,3 et la limite élastique de 350 MPa.



Figure 21.5 : Ridoir et modèle



« Plaque » doit être pris au sens commun et non au sens éléments finis car ce type d'élément fini ne peut être soumis qu'à des charges transversales, ce qui n'est pas le cas ici. La structure est plane, mince, à feuillet moyen continu et la résultante des charges dans l'épaisseur  $y$  est appliquée. La structure ayant une dimension bien plus petite que les deux autres, et ne souhaitant pas étudier ce qui se passe dans l'épaisseur, il n'y a pas à envisager une formulation complètement volumique. La charge de traction ne pouvant pas être à l'origine du flambement, le problème est mécaniquement 2D et peut être résolu avec des éléments de membrane ou éventuellement avec des éléments de coque.

### 21.2.2. Premier modèle

La structure présentant deux plans de symétrie pour la géométrie, le chargement et les conditions aux limites, la symétrie doit être exploitée. On ne modélise donc que le quart de la plaque avec des éléments de membrane, nécessairement définis dans le plan  $xOy$ . Les nœuds des membranes n'ont que deux translations dans le plan. Pour rendre compte de la symétrie, il faut bloquer pour tous les nœuds appartenant à un plan de symétrie la translation dans la direction orthogonale à ce plan, soit la composante sur  $y$  pour la ligne 1 et la composante sur  $x$  pour la ligne 4. Ces conditions aux limites éliminent les deux translations d'ensemble dans le plan  $xOy$ , ainsi que la rotation d'ensemble autour de l'axe  $Oz$ . La structure modélisée n'a pas de mode rigide. Il existe deux manières d'introduire le chargement : soit une charge linéique de valeur constante, dans la direction  $x$ , d'intensité  $\sigma e$  où  $e$  est l'épaisseur de la structure, soit une pression constante de valeur  $\sigma$  sur l'arête des mailles bordant les lignes 2 et 3. Le modèle et le maillage appelé Q1 sont représentés sur la figure 21.6.

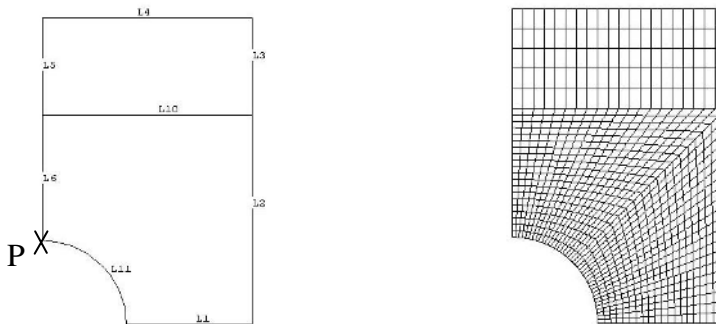


Figure 21.6 : Modèle et maillage Q1

Il existe pour ce problème une solution analytique. Si  $\theta$  est l'angle entre l'axe des  $x$  et le rayon vecteur au point considéré,  $b$  le rayon du cercle qui doit être

petit par rapport aux dimensions de la plaque, les contraintes radiales, circonférentielles et de cisaillement dans le plan ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left( \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{4b^2}{r^2} + \frac{3b^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \right) \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left( \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3b^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \right) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{2b^2}{r^2} - \frac{3b^4}{r^4} \right) \sin(2\theta) \end{array} \right.$$

En particulier, sur l'axe des  $y$ , au bord du cercle ( $r = b$ ), en un point géométrique caractéristique désigné par P, les contraintes ont pour valeur :

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = 3\sigma \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

Le coefficient de concentration de contrainte est donc de 3. La décroissance de la contrainte circonférentielle en fonction de sa distance au bord du trou est extrêmement rapide puisque pour  $r = 5b$ , l'écart par rapport à la contrainte uniforme n'est que de 2%. Le maillage utilisé a donc une très grande influence sur la solution numérique, surtout que l'on recherche ici une solution locale au bord du trou, en un point précis où la solution analytique est connue. L'état de contrainte étant pratiquement uniforme en dehors de la zone perturbée par le trou, en vertu du résultat de Saint-Venant, le maillage peut y être grossier et la topologie des éléments  $y$  est globalement sans importance (triangles, quadrangles,...). Par contre, il est très important de raffiner le maillage au bord du trou pour y calculer les contraintes. Si le diamètre du perçage n'est pas petit par rapport aux dimensions de la plaque, des abaques donnent la valeur du coefficient de concentration de contrainte qui est de 3,4 dans notre cas.

### 21.2.3. Résultats

Un premier calcul est réalisé avec le maillage réglé régulier du second degré  $Q_1$ , chaque segment de droite ayant 20 éléments, l'arc de cercle 40 éléments. L'amplitude maximale du déplacement est de 6 microns (Figure 21.7), ce qui valide l'hypothèse de linéarité géométrique. La contrainte équivalente de Von Mises extrapolée a une valeur maximale de 332 MPa, ce qui valide l'hypothèse de linéarité matérielle (Figure 21.8). Les croix de contraintes moyennes sont représentées sur la figure 21.9. Au point P, la première contrainte principale est une traction parallèle à l'axe des  $x$  et représentative de  $\sigma_\theta$  comme le prévoit la théorie. La contrainte équivalente dont la valeur théorique est de 272 MPa au point P, a une valeur moyenne de 300 MPa sur la maille qui touche le point P et une valeur extrapolée au point P de 332 MPa (Figures 21.10 et 21.11). Le gradient de contrainte est très élevé au bord du trou : la moyenne sur l'élément est sensiblement plus faible que la valeur extrapolée aux nœuds. Plus les points

d'intégration sont éloignés du point P parce que l'élément fini est grand, moins l'extrapolation est précise.

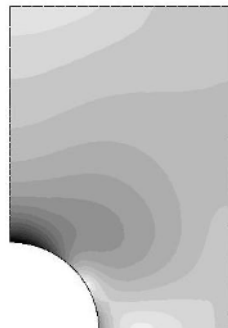
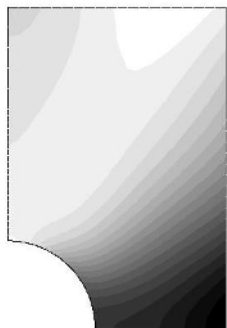


Figure 21.7 : Amplitude des déplacements      Figure 21.8 : Contraintes équivalentes

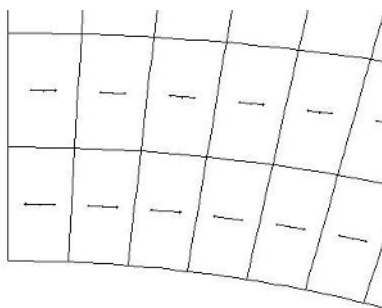


Figure 21.9 : Croix de contraintes

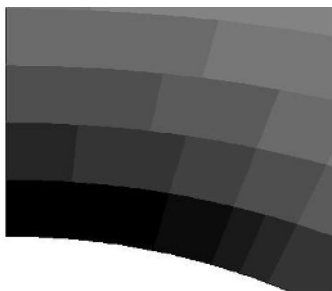


Figure 21.10 : Contrainte équivalente  
moyenne au voisinage de P

Figure 21.11 : Contrainte équivalente  
extrapolée au voisinage de P

Si les éléments du second degré sont numériquement sous-intégrés, l'extrapolation suit une loi bilinéaire alors que la variation de la contrainte est

hyperbolique. Selon la forme réelle du champ de contraintes, la valeur extrapolée aux nœuds peut être supérieure ou inférieure à la vraie contrainte, ce n'est pas nécessairement un majorant. L'absence de discontinuité de part et d'autre d'une arête permettent d'en apprécier la qualité. Quand on supprime l'affichage de la frontière des éléments, il n'est possible de savoir où se situent ces frontières (Figure 21.11) : si le modèle est représentatif de la réalité, la contrainte calculée est la contrainte dans la structure.

L'écart entre la théorie (272 MPa) et le calcul (330-335 MPa) provient du fait que la dimension de la structure dans le sens de la sollicitation n'est pas assez grande pour que l'état de contrainte dans le sens de la sollicitation soit uniforme (Saint-Venant). Formulaires et abaques ne sont pas complètement exploitables pour le ridoir, elles ne donnent qu'un ordre de grandeur. On suppose pour le montrer que la distance entre deux perçages est de 40 mm au lieu de 15 mm. Le maillage est représenté sur la figure 21.12. On limite à l'intervalle 79-81 le tracé de la première contrainte principale dans cette structure (Figure 21.13) : on constate qu'à une distance raisonnable du perçage, la contrainte est uniforme, ce qui constitue l'hypothèse de départ du calcul analytique. Au point P, la première contrainte principale extrapolée a pour valeur 264 MPa, ce qui est cohérent avec la valeur théorique (Figure 21.14).

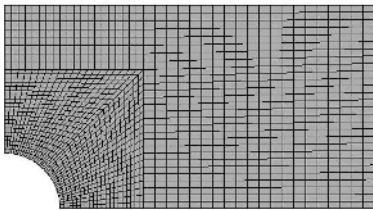


Figure 21.12 : Maillage étendu

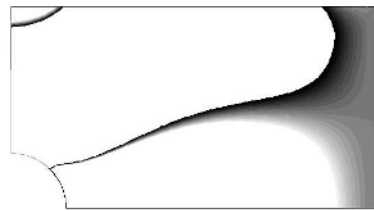


Figure 21.13 : Contrainte limitée



Figure 21.14 : 1<sup>ère</sup> contrainte principale et zoom au voisinage du point P

Quand on veut comparer un résultat de calcul à une solution analytique, il est très important de respecter dans la modélisation éléments finis toutes les hypothèses sur lesquelles sont basés les développements analytiques.

#### 21.2.4. Autres modèles

On reprend la structure initiale, sachant qu'il n'existe donc pas de référence analytique pour le coefficient de concentration de contrainte. Sans changer le nombre d'éléments, on modifie la répartition des nœuds sur les lignes 1 et 6 pour augmenter leur densité vers le bord du trou. Le maillage  $Q_2$  est représenté sur la figure 21.15, le maillage  $Q_3$  a une densité régulière d'éléments mais il est deux fois plus fin que le maillage  $Q_1$  : 40 éléments sur les lignes 1, 2, 4, 6 et 10 ; 80 sur la ligne 11. Un mailleur triangulaire à surface constante est utilisé en imposant comme pour le maillage  $Q_1$  20 éléments sur chaque segment de droite et 40 éléments sur l'arc de cercle, tous de même taille. Les éléments sont du second degré pour tous les modèles.

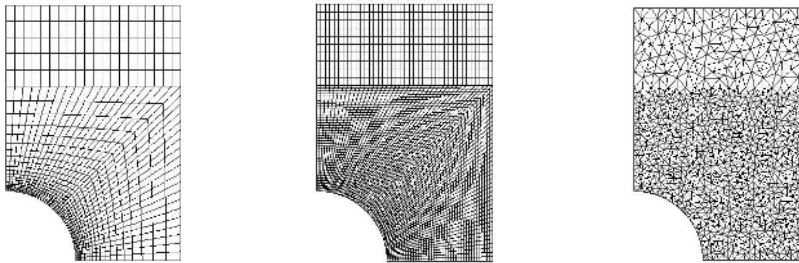


Figure 21.15 : Maillages  $Q_2$ ,  $Q_3$  et  $T_1$

C'est le maillage  $T_1$  pour lequel sont représentées les contraintes équivalentes moyennes et extrapolées (Figure 21.16 et 21.17). On remarque pour ce dernier maillage une très faible discontinuité des contraintes extrapolées aux nœuds : une densité adaptée de triangles du second degré permet d'obtenir une représentation satisfaisante du champ de contrainte. Une façon d'accéder à la contrainte au point P consiste à placer une barre sur les arêtes des éléments qui contiennent ce fameux point P. L'extrapolation réalisée est unidimensionnelle, alors qu'elle est bi-dimensionnelle pour les triangles et les quadrangles. La précision de la contrainte axiale dans les barres, qui jouent alors le rôle de jauges de déformations, dépend de leur taille vis-à-vis de l'évolution des contraintes. C'est le problème rencontré en instrumentation, la jauge ne mesurant qu'une valeur moyenne sur sa longueur, selon sa direction de collage. Pour qu'il y ait corrélation entre le calcul et la mesure, il faut que la longueur des éléments de barre soit égale à la longueur de la partie sensible de la jauge : l'instrumentation réalisée et le maillage éléments finis ne sont pas indépendants.

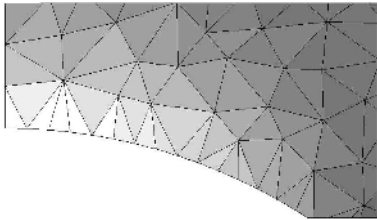


Figure 21.16 : Contrainte équivalente moyenne

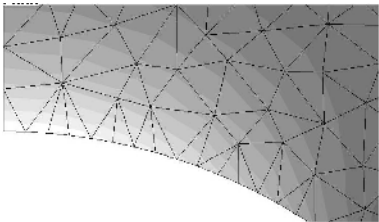


Figure 21.17 : Contrainte équivalente extrapolée

Le tableau suivant regroupe les résultats, tous donnés en MPa,  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  sont les contraintes principales,  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente de Von Mises, ddl est le nombre de degrés de liberté du modèle. Que ce soit les valeurs moyennes ou extrapolées, elles ne sont pas lissées dans le maillage. On retrouve le fait que la position des points d'intégration dans les éléments rend la contrainte moyenne relativement dépendante du maillage et de sa densité, alors que la contrainte extrapolée est plus « stable », même pour des éléments triangulaires du second degré.

Point P	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$T_3$
$\sigma_I$ moy.	305,7	327,9	319,2	315,0
$\sigma_{II}$ moy.	10,7	2,3	5,8	7,6
$\sigma_{eq}$ moy.	300,5	326,8	316,3	311,3
$\sigma_I$ ext.	332,5	333,9	333,5	334,2
$\sigma_{eq}$ ext.	332,1	334,0	333,3	334,0
ddl	5570	5570	21940	7714



## Chapitre 22

### Frettage

#### 22.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME ET MODÈLES

Deux tubes en acier d'un mètre de long sont assemblés par frettage, technique d'assemblage sans apport de matière. Le tube intérieur a un diamètre intérieur de 25 mm et un diamètre extérieur de 30 mm, le tube extérieur a un diamètre intérieur de 29,95 mm et un diamètre extérieur de 35 mm. La longueur d'emmanchement est de 30 mm. Le module d'élasticité est de 210000 MPa, le coefficient de Poisson de 0,3 et la limite élastique de 250 MPa. Le frottement n'est pas pris en compte dans le modèle.

Pour assembler les deux tubes, il faut chauffer le tube extérieur pour le dilater de sorte que son diamètre intérieur soit supérieur à 30 mm, ou refroidir le tube intérieur de sorte que son diamètre extérieur soit inférieur à 29,95 mm, les emmancher l'un dans l'autre, puis à les laisser revenir à température ambiante. Pour simuler le procédé d'assemblage, il faut réaliser un calcul thermomécanique transitoire. Quand on ne s'intéresse qu'à l'état final, une analyse statique est suffisante. Il n'est pas possible d'imposer des températures car l'assemblage est revenu à la température ambiante, il n'existe pas de force extérieure, la position d'équilibre n'est pas connue donc il n'est pas possible de travailler par déplacement imposé. A l'équilibre, les deux tubes sont en contact, la somme des actions qu'ils exercent l'un sur l'autre est nulle : ce sont des forces internes pour l'assemblage.

Dans la partie courante de l'assemblage, on peut utiliser un modèle Etat Plan de Déformation (EPD), axisymétrique ou non. Le modèle axisymétrique, non exploité ici, est constitué de deux lignes qui se chevauchent, le modèle non axisymétrique est composé de deux disques concentriques, avec interférence, dont l'épaisseur est conventionnellement unitaire. Pour déterminer l'état de contrainte dans l'assemblage et aux extrémités de l'emmanchement, la symétrie



de révolution du problème permet d'utiliser un modèle axisymétrique. Dans le plan méridien, chaque tube est modélisé par un rectangle, les deux tubes étant en interférence.

## 22.2. CONTACT

Les phénomènes de contact entre solides ou entre un solide et une fondation rigide sont très fréquents dans les assemblages mécaniques. Le problème posé est non-linéaire car les conditions aux limites sont unilatérales : changer le sens du chargement (c'est à dire le multiplier par -1) ne conduit à un changement de signe du déplacement, mais à une configuration d'équilibre différente. Si la seule non-linéarité d'un problème provient de la condition aux limites, la structure vérifiant par ailleurs les hypothèses de linéarité géométrique et matérielle, on peut résoudre ce problème dans certains programmes d'analyse linéaire. On traite localement et de façon non-linéaire le contact sur la partie limitée aux degrés de liberté susceptibles de rentrer en contact, puis on calcule classiquement le déplacement des autres degrés de liberté par restitution (cf. chapitre 19). Le **contact** est soit du type « **nœud sur nœud** » soit du type « **nœud sur surface** ». Quand il est nœud sur nœud, les paires de nœuds initialement en regard doivent encore l'être après la mise en charge du fait des hypothèses de linéarité. Il faut donc positionner correctement les paires de nœuds susceptibles de rentrer en contact, ce qui est une contrainte sur le maillage pour l'utilisateur. Quand le contact est nœud sur surface, la contrainte précédente sur le maillage disparaît mais le choix des faces maîtresses et des nœuds esclaves n'est pas quelconque : la partie maîtresse est celle qui est maillée le plus grossièrement. Cette technique présente l'avantage d'être utilisable en mécanique non linéaire. La **méthode de pénalité** est l'une des deux techniques employée pour résoudre les problèmes de contact, l'autre étant la **méthode des multiplicateurs de Lagrange**.

Avec la pénalité, tant que la distance de contact entre un nœud et la face associée est positive, le contact n'est pas établi pour ce nœud. La raideur de contact associée est nulle. Lorsque le contact est détecté, la raideur de contact devient grande pour repousser le nœud dont le déplacement a dépassé la borne, et limiter ainsi l'interpénétration. Cela revient schématiquement à activer un ressort entre le nœud et la face. A l'équilibre, la solution est approchée car il y a toujours interpénétration avec cette technique. Si la raideur de ce ressort est trop petite, l'interpénétration entre pièces est relativement importante à l'équilibre, ce qui ne décrit pas bien la physique du problème. Si la raideur de ce ressort est trop forte, il peut en résulter des oscillations et des problèmes de convergence. Dans les documentations des logiciels de calcul, on trouve souvent la dénomination « **éléments de contact** » ou « **gap element** ».

Avec les multiplicateurs de Lagrange, l'algorithme détecte le contact et non plus l'interpénétration comme avec la pénalité : le résultat est plus précis mais sensiblement plus coûteux car le système matriciel a une topologie qui évolue au fur et à mesure de l'activation ou de la désactivation des contacts. Lorsque le contact est détecté, on place le nœud sur la face associée et on cherche la position d'équilibre des autres nœuds, ce qui revient à imposer le déplacement relatif de chaque nœud en contact. A l'équilibre, la solution est exacte, il n'y a pas d'interpénétration.

Trois étapes sont donc nécessaires : mettre en relation les nœuds et les faces puis définir la direction et le sens de recherche du contact (ce qui n'est pas actualisé lors d'analyses linéaires), calculer la distance de contact, gérer le contact si la distance est négative ou nulle selon la technique de traitement. Les algorithmes de contact sont généralement utilisés pour détecter quand le contact se produit. Mais ils peuvent également déterminer une position d'équilibre satisfaisant les conditions de contact à partir d'une configuration qui viole ces conditions. Dans le cas du frettage, la projection du nœud B sur la normale extérieure à la face A est négative : il y a interpénétration initiale, que ce soit pour le modèle EPD, ou le modèle axisymétrique. L'algorithme de contact repousse donc A et B de manière à déterminer leur position commune (Figure 22.1). On adopte une stratégie avec lissage de la surface de projection.

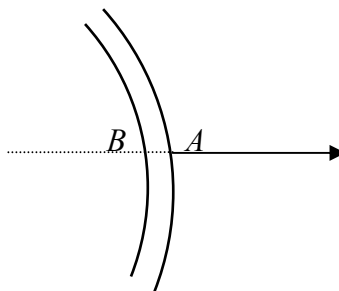


Figure 22.1 : Interférence entre parties de modèle

### 22.3. MODÈLE EPD

La structure est composée de deux parties indépendantes, chacune ayant trois modes rigides dans le plan car il n'y a pas de conditions aux limites. En exploitant la symétrie par rapport à deux plans orthogonaux, la structure n'a plus aucun mode rigide et les conditions aux limites sont aisées à mettre en place. En choisissant une ouverture angulaire quelconque, deux techniques

permettent d'imposer les conditions de symétrie. On peut définir sur tous les nœuds du plan de symétrie des axes locaux. Leur numérotation et leur sens sont arbitraires, les charges ou conditions aux limites introduits sur ces nœuds en dépendant. On peut imposer que tous les nœuds du plan de symétrie restent dans un plan fixe, en l'occurrence le plan de symétrie, en utilisant une condition de planéité, les contraintes entre degrés de liberté étant gérées par multiplicateurs de Lagrange (Figure 22.2).

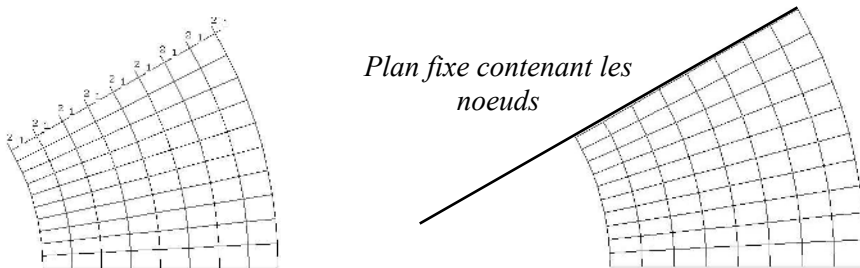


Figure 22.2 : Axes locaux et condition de planéité

Le maillage de chaque quart de disque est réglé, les éléments sont du second degré. On choisit pour la partie maîtresse l'extérieur du cylindre intérieur qui comporte donc moins d'éléments sur sa périphérie que le cylindre extérieur. En EPC, l'épaisseur est conventionnellement prise égale à 1. Le déplacement radial et les contraintes équivalentes extrapolées de Von Mises sont représentés sur la figure 22.3.

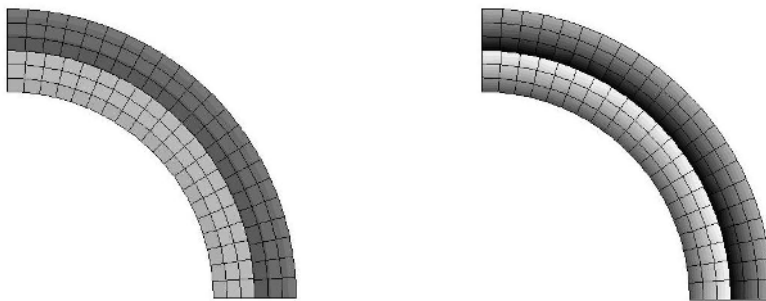


Figure 22.3 : Déplacement et contrainte équivalente dans l'assemblage

Les hypothèses de linéarité géométriques et matérielles sont satisfaites. Le rayon extérieur du cylindre intérieur diminue de 10,64 microns, le rayon intérieur du cylindre extérieur augmente de 14,36 microns. On retrouve les 25 microns de l'interférence radiale avant l'assemblage. La contrainte équivalente

extrapolée de l'ordre de 212 MPa. Les champs de déplacement et de contrainte présentent une parfaite symétrie axiale, bien que ce ne soit pas un modèle axisymétrique. Le jeu à rattraper sur un rayon n'est que de 0,025 mm, les contraintes engendrées sont fortes puisqu'elles sont de l'ordre de la limite élastique du matériau. La pression de contact, uniforme sur le cercle de contact, est de 30 MPa environ.

Quand on observe les contraintes principales, on voit que le cylindre intérieur est soumis à une compression radiale exercée par le cylindre extérieur. Sa diminution de rayon s'accompagne d'une diminution de périmètre, la contrainte circonférentielle est une compression (Figure 22.4Figure 22.). Le cylindre extérieur est soumis à une compression radiale exercée par le cylindre intérieur, l'augmentation de son rayon s'accompagne d'une augmentation de périmètre, la contrainte circonférentielle est une traction. La contrainte moyenne dans la structure est nulle puisqu'elle n'est soumise à aucune charge.

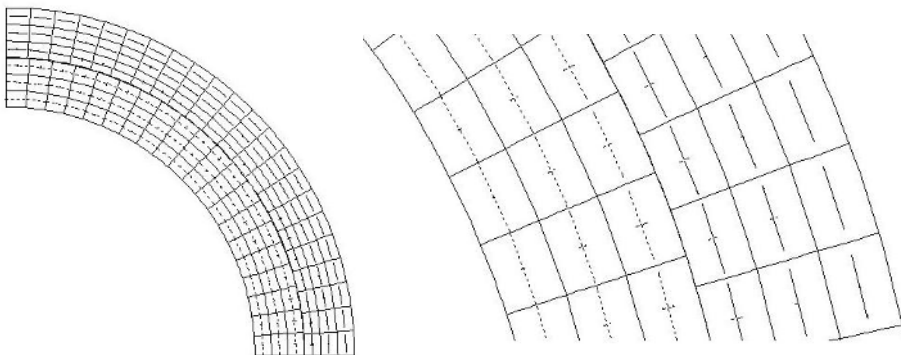
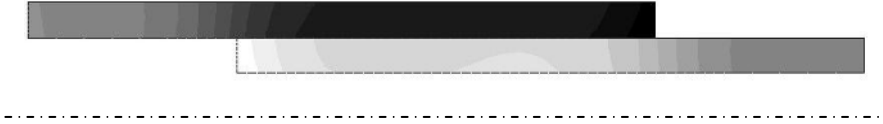


Figure 22.4 : Contraintes principales dans l'assemblage

## 22.4. MODÈLE AXISYMÉTRIQUE

Le maillage de chaque tube est composé de quadrangles axisymétriques du second degré. Il existe deux modes rigides, qu'il est nécessaire d'éliminer en fixant le déplacement axial d'un nœud de chaque tube. En choisissant comme partie maîtresse l'extérieur du cylindre intérieur, il comporte sur la longueur de l'interférence moins d'éléments que le cylindre extérieur. En zone courante, on retrouve les résultats du modèle EPD. L'apport du modèle volumique axisymétrique se mesure aux extrémités de l'emmanchement qui sont soumises à des efforts de contact radiaux, à des contraintes circonférentielles et aussi à des moments de flexion. Les déplacements sont représentés sur la figure 22.5 et

22.6. En partie courante, on retrouve les déplacements obtenus avec le modèle EPC. Le contact est établi sur toute la longueur de l'emmanchement, il n'y a pas de décollement local entre les deux tubes quand ils sont assemblés.

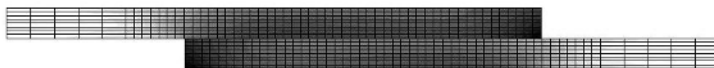


*Figure 22.5 : Déplacements radiaux de l'assemblage*



*Figure 22.6 : Amplitude de déplacement fortement amplifiée du tube intérieur*

Les contraintes équivalentes extrapolées ont une valeur maximale de 280 MPa environ, aux extrémités des tubes : il y a localement plastification du matériau, ce qui n'est pas pris en compte par cette analyse linéaire (Figure 22.7). Elles sont admissibles dans la quasi-totalité de l'assemblage, et identiques à celles obtenues en EPC dans la zone courante. La pression de contact a une valeur extrême de 122 MPa, localisée aux extrémités de l'emmanchement, et de 30 MPa en partie courante, ce qui est la valeur obtenue en EPC.



*Figure 22.7 : Contrainte équivalente dans l'assemblage*

## Chapitre 23

### Pédalier

#### 23.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Soit un pédalier en aluminium, d'épaisseur 5 mm, dont le diamètre en pied de denture est de 103 mm. C'est une structure plane et mince, soumise par la chaîne à des chargements dans son plan : le pédalier a un comportement membranaire. Il est supposé encastré au niveau des dix trous, un couple  $C$  de  $1000 \times 0,20$  N.m est exercé par l'intermédiaire de la chaîne. L'objectif de cet exemple n'étant pas de dimensionner la denture, on reporte l'action de la chaîne en pied de denture de rayon  $R$ . On suppose que la chaîne est en prise sur 90 degrés, que l'effort transmis  $f$  est purement tangentiel et constant sur ces 90° : il a pour valeur 12 N/mm (Figure 23.1).

$$C = \int f R ds = f R \int ds = f R \int_0^{\pi/2} R d\alpha = f R^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow f = \frac{2C}{\pi R^2}$$

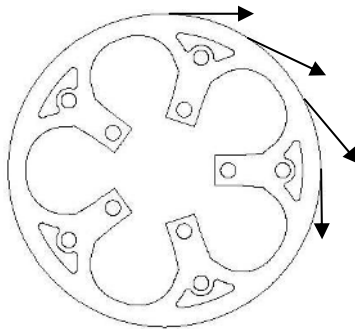


Figure 23.1 : Géométrie et chargement

## 23.2. MAILLAGES

Pour mailler le pédalier, on exploite les symétries : la structure est à symétrie cyclique (5 secteurs identiques), chaque secteur présente une symétrie miroir. Il suffit donc de travailler avec la géométrie d' $1/10^{\text{ème}}$  du pédalier pour faire le maillage, de symétriser le maillage puis de le copier 4 fois par rotation de  $72^\circ$ . On construit 4 maillages pour étudier leur influence sur les contraintes. Tous les éléments sont de degré 2. Le premier maillage est entièrement réalisé avec des éléments triangulaires (T), le second comporte essentiellement des quadrangles (Q), le troisième est issu du second, certaines mailles ont été modifiées le long des bords libres (M), le quatrième ne comporte que des quadrangles ayant des arêtes le long des bords libres (R) (Figure 23.2).

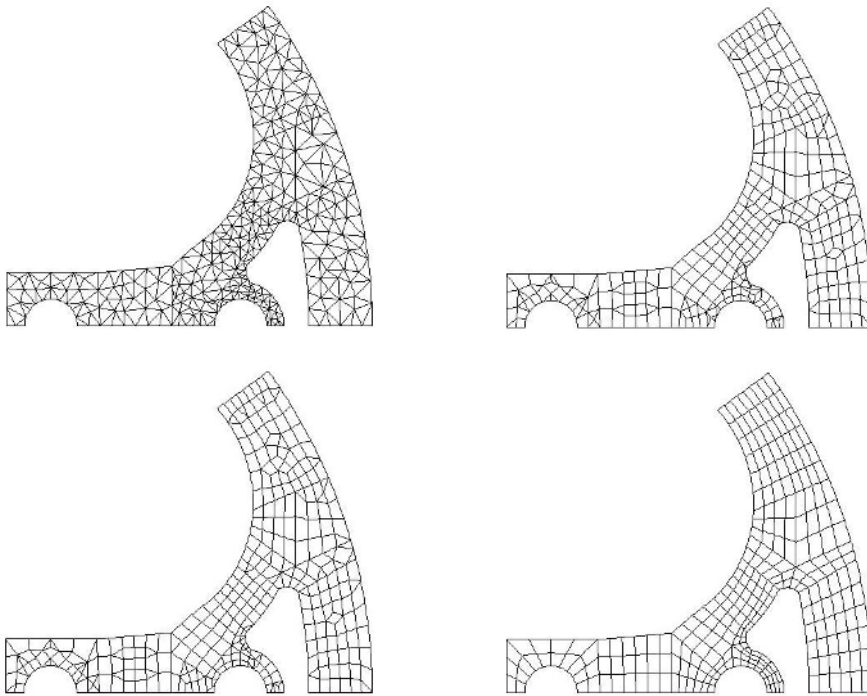


Figure 23.2 : Quatre maillages d'un dixième de structure

## 23.3. RÉSULTATS

L'allure du champ de déplacement et l'amplitude du déplacement sont les mêmes pour les quatre calculs (Figure 23.3). Elle est de l'ordre de  $26,8 \mu\text{m}$ , ce qui valide la linéarité géométrique. En ce qui concerne les contraintes

équivalentes, le tableau suivant regroupe leurs valeurs maximales non lissées exprimées en MPa. Les contraintes équivalentes extrapolées dans la partie entourée par le cercle sur la figure 23.3 sont représentées sur la figure 23.4 pour le maillage réglé R. C'est la zone la plus fortement contrainte pour ce cas de charge. Bien que les valeurs soient assez proches en valeur extrapolée, l'interprétation que l'on fait des résultats est différente selon les maillages.

	T	Q	M	R
$\sigma_{eq} \text{ moy.}$	70,9	70,7	58,5	57,9
$\sigma_{eq} \text{ ext.}$	102,9	102,3	99,8	97,9

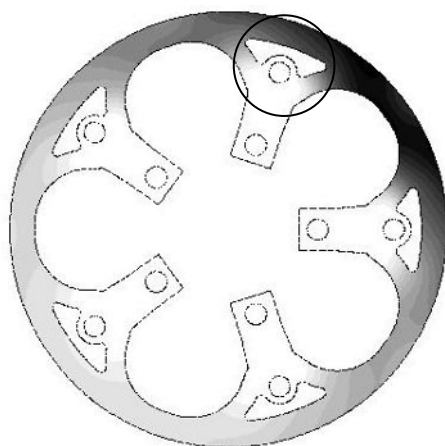


Figure 23.3 : Déplacements

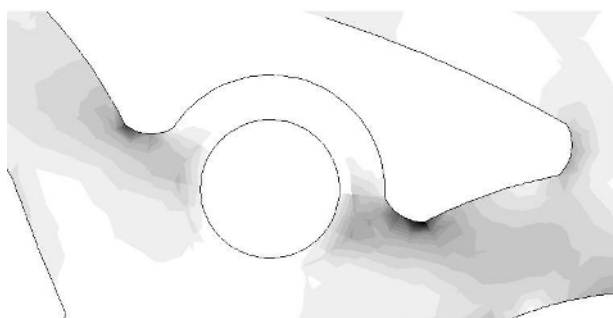


Figure 23.4 : Contraintes équivalentes extrapolées

Les contraintes extrapolées présentent une forte discontinuité dans la zone de contrainte maximale pour les maillages T, Q et M, d'où l'impossibilité de



conclure quant à leur valeur (Figures 23.5 et 23.6). Dans les zones de fortes contraintes, le maillage est inapproprié puisqu'il ne permet de déterminer le comportement de la structure.

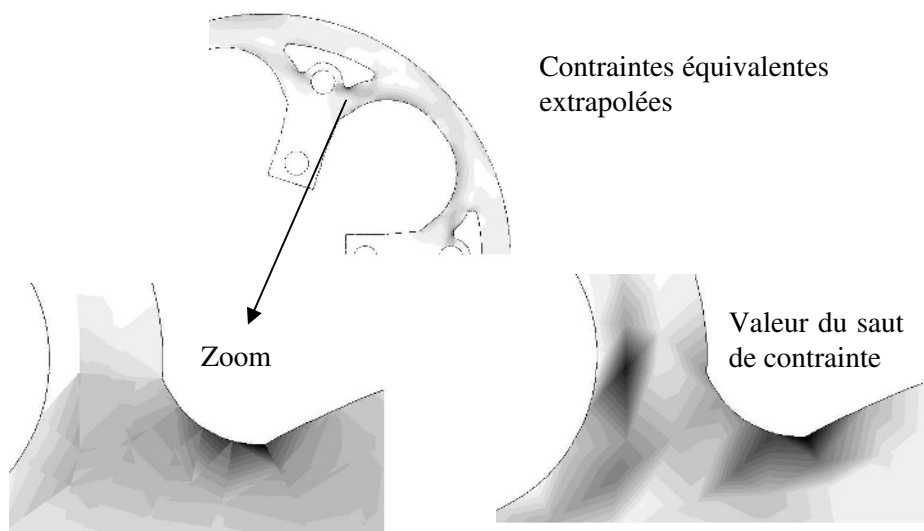


Figure 23.5 : Contraintes équivalentes extrapolées, maillage T

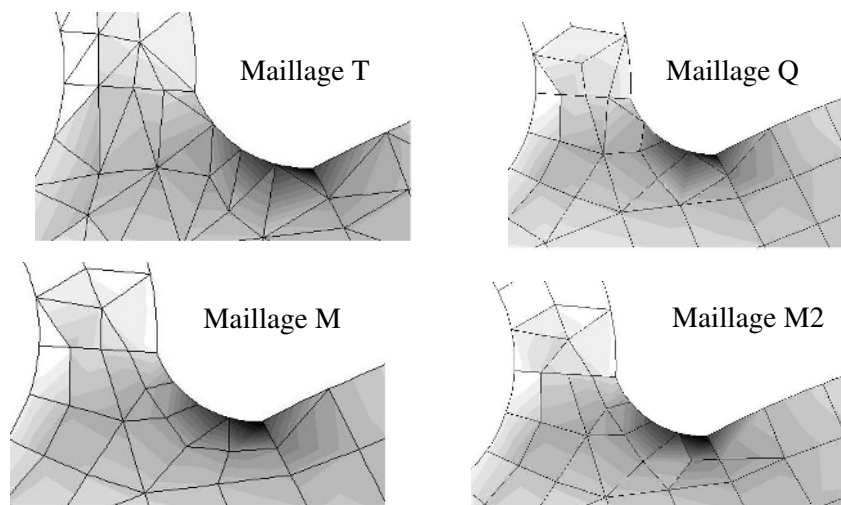


Figure 23.6 : Contraintes équivalentes extrapolées

Le problème est bien connu avec les éléments triangulaires, il n'y a pas de surprise. Avec le maillage Q, quelques éléments triangulaires sont situés dans les zones de fortes contraintes, ce qui suffit pour que celles-ci ne soient pas évaluées avec précision. Avec le maillage M, un élément triangulaire touche un élément quadrangulaire sur le bord libre du pédalier, près de la zone la plus sollicitée. Cela suffit pour qu'il y ait un saut de contrainte en ce nœud. Avec le maillage M2, issu du maillage M en modifiant localement quelques éléments, il n'y a plus que des éléments quadrangulaires sur le bord libre (Figure 23.6). Tous les éléments ont une arête sur le bord, sauf un qui n'a qu'un nœud sommet sur le bord : cela suffit pour qu'en ce nœud, il y ait un saut de contrainte qui empêche de conclure quant à la valeur de la contrainte maximale. Avec le maillage réglé, ou un maillage ne comportant que des quadrangles ayant une arête le long du bord, la contrainte extrapolée ne présente pas de saut de part et d'autre d'une arête commune à deux éléments : elle est suffisamment continue pour être utilisée en dimensionnement (Figure 23.7).

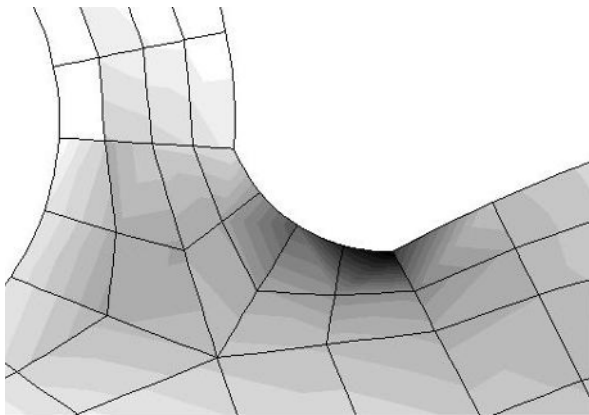


Figure 23.7 : Contrainte extrapolée, maillage R

En conclusion, bien que les valeurs soient quasi-identiques, il n'est pas possible de savoir quelle est la valeur maximale avec les maillages T, Q, M et M2, alors qu'il est possible de conclure pour le maillage R.



## Chapitre 24

### Bielle

#### 24.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

La structure représentée sur la figure 24.1 est schématiquement une bielle de géométrie simplifiée, en acier (module de Young 210000 MPa, coefficient de Poisson 0,3, limite élastique 300 MPa). L'axe passant dans l'alésage droit est fixe, l'axe passant dans l'alésage gauche est sollicité par un effort de traction agissant selon l'axe de la bielle, de valeur 10000 N. Le jeu est de 0,1 mm au niveau de chaque axe, réalisé en acier. Les têtes de bielle ont une épaisseur de 12 mm, le corps de 6 mm. La structure réelle est réalisée par moulage, elle comporte des dépouilles et des congés de raccordement, négligés en première approximation. Puisque la résultante des efforts agit dans le plan situé à mi-épaisseur et que la bielle est élancée, un calcul membranaire permet d'avoir une bonne estimation des déplacements et contraintes sous charge. Plusieurs modélisations peuvent être envisagées pour étudier le comportement de cette structure, en faisant a priori l'hypothèse de la linéarité.

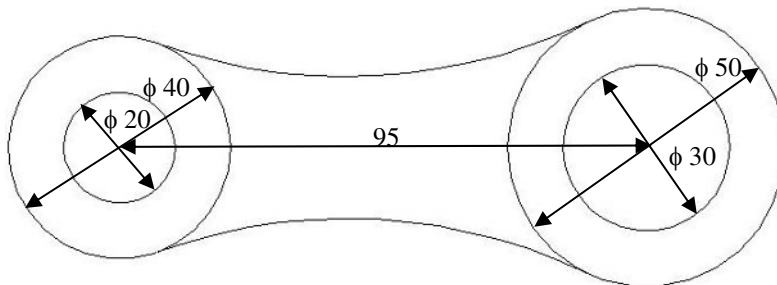
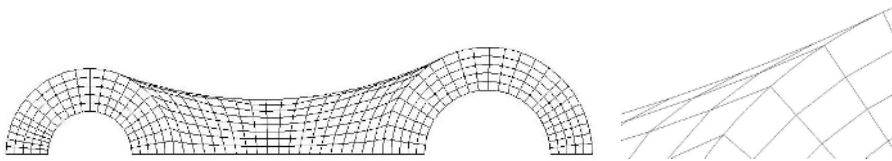


Figure 24.1 : Bielle

## 24.2. CONTACT

La géométrie nécessaire est donc simple. Le problème a un plan de symétrie qu'il faut exploiter. La charge à appliquer est de 5000 N. La structure est constituée de trois pièces en interaction qui sont maillées : la bielle et les deux axes. Elle a donc a priori neuf modes rigides. Les conditions de symétrie (blocage du déplacement de tous les nœuds situés dans le plan de symétrie dans la direction orthogonale à ce plan) en éliminent six : la translation dans la direction  $y$  et la rotation dans le plan pour chacune des parties en présence. L'axe de droite a son centre fixe : deux modes rigides subsistent, à savoir la translation d'ensemble sur  $x$  de l'axe de gauche et celle de la bielle. Selon la manière dont est géré le contact, le calcul peut s'arrêter du fait des modes rigides, ou donner la solution, les modes rigides ne se développant pas dès lors que le contact est détecté. Une manière de lever le problème éventuel est de coller le nœud de l'axe et le nœud de la bielle qui sont en contact, du côté gauche et du côté droit. Il n'y a alors plus trois pièces mais une seule. Pour le maillage, on crée plusieurs domaines de manière à aider le mailleur automatique à générer des éléments de bonne qualité. Les têtes sont maillées en réglé (cf. chapitre 23), mais pas le corps car la géométrie du raccord tête-corps conduit à des éléments fortement distordus (Figure 24.2).



*Figure 24.2 : Maillage réglé du corps de la bielle*

Les contraintes maximales ne se produisant a priori pas dans le corps, le maillage réalisé semble tout à fait adapté. On ne s'intéresse pas au comportement des axes : on a seulement besoin de leur géométrie et d'une bonne représentation de leur raideur.

Le maillage triangulaire des axes est correct eu égard à l'objectif. Le maillage pose une difficulté car certains éléments sont très élancés dans la zone de raccord tête-corps (Figure 24.3). Selon le logiciel de calcul utilisé, ces éléments peuvent être correctement générés ou conduire à un arrêt du programme dû à un problème de matrice jacobienne. Si c'est le cas, il faut réaliser une petite adaptation en supprimant l'élément et en redéfinissant manuellement un triangle du second degré (Figure 24.4). La charge est appliquée sur le nœud qui est au centre de l'axe de gauche.

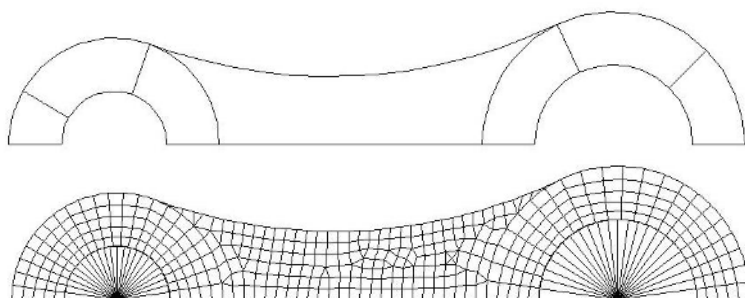


Figure 24.3 : Bielle, axes et collage ponctuel

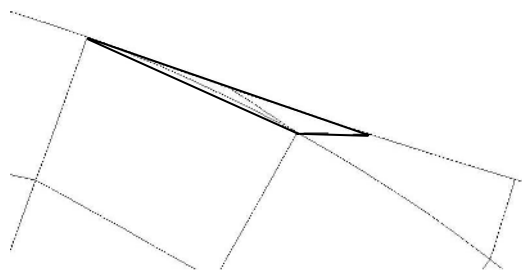


Figure 24.4 : Adaptation locale éventuelle du maillage

Le déplacement a une amplitude maximale d'environ 80 microns, ce qui valide l'hypothèse de linéarité géométrique (Figure 24.5).

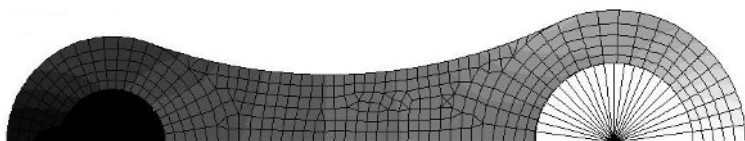


Figure 24.5 : Amplitude des déplacements

Il est normal que la contrainte équivalente extrapolée présente un saut important sur toutes les arêtes qui marquent la transition entre deux zones d'épaisseur différente. Le post-traitement par valeurs lissées donne là une représentation absurde de la contrainte car il lisse une contrainte qui est physiquement discontinue... Dans les têtes et le corps, la contrainte équivalente extrapolée est relativement continue, sa valeur maximale est de 203 MPa (Figure 24.6), ce qui valide l'hypothèse de linéarité matérielle.

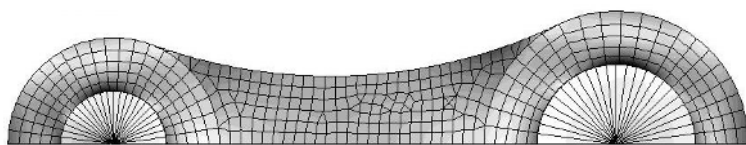


Figure 24.6 : Amplitude des déplacements et contrainte équivalente extrapolée

L'analyse de la pression de contact entre la bielle et les axes montre que l'interaction se fait sur une ouverture angulaire d'environ  $\theta_0 = 30^\circ$  pour l'axe gauche et  $\theta_1 = 45^\circ$  pour l'axe droit de plus grand diamètre. Elle dépend du jeu, des diamètres et du rapport des modules d'élasticité pour les deux matériaux en contact (Figure 24.7). Cette pression n'est pas constante sur la zone de contact : elle est nulle au point de décollement, maximale sur l'axe de symétrie. Les points ayant été collés pour ne pas avoir de modes rigides (qui bloquent le calcul car la matrice de raideur assemblée est non inversible), le programme ne calcule pas la pression de contact dans le plan de symétrie car il n'y a pas de condition de contact dans ce plan.

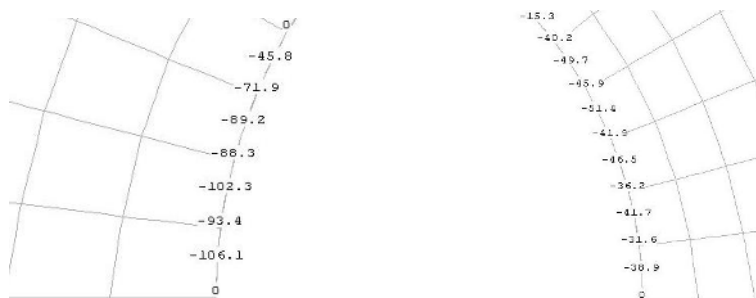


Figure 24.7 : Pressions de contact

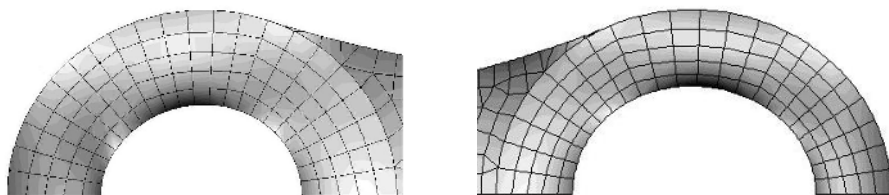


Figure 24.8 : Ovalisation et zone de contrainte maximale

Ce n'est pas sur l'axe de symétrie ou au point de décollement que la contrainte équivalente est la plus forte. C'est là où la flexion dans le plan est la plus importante, là où la tension est maximale sur le bord de l'alésage qui s'ovalise sous la charge (forte amplification graphique des déplacements sur la figure 24.8).

### 24.3. CHARGE ET FIXATIONS

Plutôt que de gérer le contact, on peut en rendre compte. Les axes ne sont plus maillés, seule la bielle l'est. Les axes sont donc implicitement supposés indéformables. Du côté droit, l'axe joue le rôle d'une condition à la limite. Il a pour effet de bloquer le déplacement radial de tous les nœuds en contact : le demi-cercle est découpé en deux arcs dont l'un a pour ouverture  $\theta_1$ . En supposant le coefficient de frottement négligeable, le déplacement tangentiel de ces nœuds est libre (Figure 24.9).

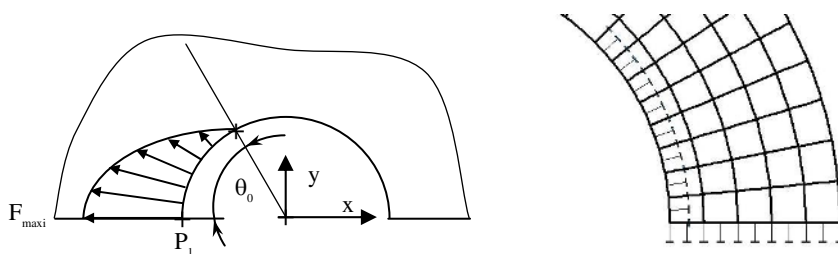


Figure 24.9 : Chargement et conditions aux limites

Du côté gauche, l'axe répartit les efforts appliqués à la bielle. Ce n'est pas une pression linéairement variable qui est introduite dans les données, mais une charge linéique. Le contact étant supposé sans frottement, les efforts agissent orthogonalement à la ligne de contact. Le demi-cercle est découpé en deux arcs dont l'un a pour ouverture  $\theta_0$ . Cette ligne ayant une direction variable dans le repère structural, il est nécessaire de mettre en place une série d'axes locaux. Il convient d'être prudent et de faire en sorte qu'il n'y ait pas de conflit avec les conditions aux limites, en particulier celles de symétrie. En effet, le point  $P_1$  faisant partie du plan de symétrie, son déplacement dans la direction structurale  $y$  a été fixé. Mais comme il fait également partie de la portion d'arc chargée sur laquelle des axes locaux sont définis, la direction radiale ne peut être que le premier axe local, la direction tangente à l'arc étant alors la seconde direction locale. Connaissant la charge totale  $F_T$  transmise par le demi-axe à la demi-bielle (5000 N), l'intensité de la charge linéique  $F_{Maxi}$  au point  $P_1$  a pour expression,  $r$  étant le rayon de l'alésage et  $\theta_0$  l'angle de contact :



$$F_T = \frac{F_{Maxi}}{\theta_0} r (1 - \cos(\theta_0))$$

Les déplacements ont une amplitude compatible avec l'hypothèse de linéarité géométrique, un peu différente de l'amplitude obtenue avec le modèle précédent (62  $\mu\text{m}$  au lieu de 80). Le trou chargé s'ovalise librement, le modèle n'introduit aucune contrainte sur la forme du champ de déplacement du coté gauche. Rien dans les résultats ne permet de dire si les données que sont l'angle de contact et la répartition de la charge sont correctes. Il en est de même pour l'autre partie de la bielle sur laquelle des fixations ont été imposées. Mais on distingue nettement l'influence de la condition à la limite, la courbure n'est pas continue. Les contraintes équivalentes extrapolées aux nœuds font apparaître une zone de fortes contraintes dans la tête droite de bielle (Figure 24.10). La valeur maximale est de 315 MPa (200 pour le modèle précédent).

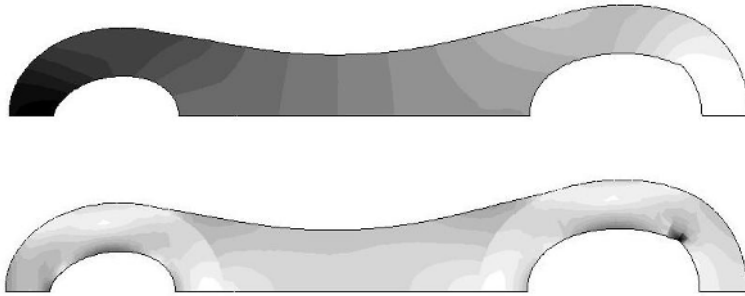


Figure 24.10 : Amplitude des déplacements (fortement amplifiée) et contraintes équivalentes extrapolées aux nœuds

La contrainte est discontinue et présente un maximum sur le dernier nœud de la ligne dont le déplacement radial est bloqué. L'axe n'étant pas indéformable, lors du contact, le déplacement radial n'est pas fixé mais limité, la flexion induite par le chargement passe continûment par la tête. Ici, la flexion passe localement entre le dernier nœud fixé et le premier nœud libre, d'où la sur-contrainte calculée (Figure 24.11) dont le caractère local est mis en évidence en limitant à 200 MPa la représentation des contraintes. La contrainte maximale est due au modèle et ne reflète pas le comportement physique de la bielle. Pour s'affranchir de la gestion du contact, on a une mise en données plus complexe, qui repose sur des hypothèses plus ou moins réalistes et valables (axes indéformables, interaction sur une ouverture de  $\theta_0$  d'un coté et  $\theta_1$  de l'autre). Le champ de contrainte est plus difficile à interpréter du fait de la singularité induite par les conditions aux limites censées représenter l'action de l'axe.

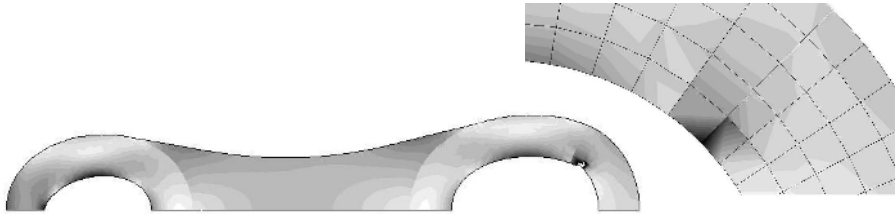


Figure 24.11 : Adaptation de l'échelle graphique et zoom sur les contraintes équivalentes extrapolées

## 24.4. CORPS RIGIDES

Une modélisation nécessitant une mise en données intermédiaires peut être envisagée à titre pédagogique. Il s'agit de remplacer chaque axe par un **corps rigide**, ce qui évite ainsi son maillage mais suppose son indéformabilité, et de lier chaque corps rigide aux nœuds supposés en contact (Figure 24.12). Le nœud maître du corps rigide de droite est encastré, la charge (5000 N) est appliquée sur le nœud maître du corps rigide de gauche.

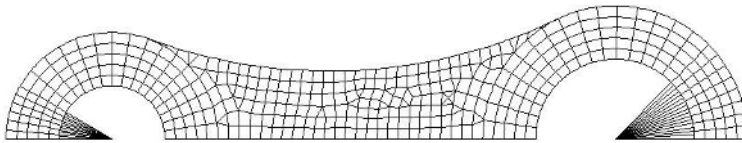


Figure 24.12 : Maillage et corps rigides

Pour modéliser une partie de modèle supposée indéformable, il y a deux techniques. La première consiste à faire un maillage de cette partie et à donner aux éléments finis qui la constituent une très grande raideur. Mais si la raideur des éléments « indéformables » n'est malgré tout pas suffisante, l'élément absorbe une partie de l'énergie de déformation alors qu'il ne devrait pas, ce qui a une influence sur la solution. Si la raideur des éléments « indéformables » est trop forte, le système numérique est mal conditionné, la solution calculée n'est pas la bonne. Dans un assemblage d'éléments divers (coques, volumes, poutres), modéliser une partie rigide par un ensemble de poutres de grande raideur est toujours hasardeux car il est difficile de dimensionner à coup sûr ces poutres. Pour donner un ordre de grandeur, la rigidité flexionnelle  $EI$  d'une poutre de diamètre  $10D$  est 10000 fois plus importante que celle d'une poutre de

diamètre  $D$  (proportionnelle à la puissance quatrième de  $D$ ) : l'une est donc pratiquement indéformable par rapport à l'autre.

La seconde technique consiste à introduire des relations cinématiques entre les degrés de liberté. L'avantage principal est que cela n'influe aucunement sur le conditionnement des matrices. En effet, si des points  $P_i$  sont reliés à un point maître  $M$  de telle sorte qu'ils forment un solide indéformable, les équations de mécanique du solide régissent le mouvement de cet ensemble de points.

$$\vec{\Omega}(P_i) = \vec{\Omega}(M) \quad \text{et} \quad \vec{u}(P_i) = \vec{u}(M) + \vec{\Omega} \wedge \vec{MP}_i$$

Ce sont des liaisons entre degrés de liberté ou des contraintes linéaires entre degrés de liberté, indépendantes de la raideur supposée infinie entre les points. Les raideurs « infinies » ne sont pas modélisées, ce qui n'introduit donc aucun effet numérique parasite : le déplacement relatif des points formant un corps rigide est imposé indépendamment de ce qui les relie. Les contraintes linéaires ne sont pas générées explicitement par l'utilisateur, mais elles sont mises en œuvre par l'intermédiaire de la macro-commande « Corps Rigide » (Rigid Body Element, ou Multi-Constraint Point). Lorsque ces contraintes sont gérées par des multiplicateurs de Lagrange, des pivots négatifs apparaissent lors de la décomposition de la matrice de raideur. Le corps rigide est en soi un modèle dans le modèle éléments finis, rien n'est indéformable.

L'amplitude maximale du déplacement est de 55 microns : la structure n'a pas changé de raideur (c'est le même maillage) mais les conditions aux limites la bloque encore plus. Il y a ovalisation des alésages, mais la cassure de la courbure est encore plus nette que précédemment quand les déplacements sont amplifiés (Figure 24.13).

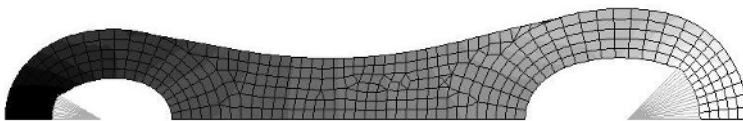
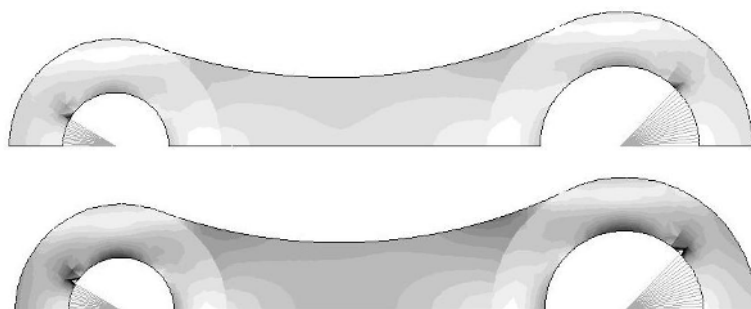


Figure 24.13 : Amplitude des déplacements

La contrainte est discontinue et présente un maximum sur le dernier nœud de la ligne dont le déplacement est fixé. Puisque le nœud maître est encastré, il en est de même pour tous les nœuds qui lui sont associés par le corps rigide. La contrainte équivalente a une valeur de 400 MPa (200 dans le modèle avec contact). Le caractère local de ce fort niveau de contrainte est mis en évidence

en limitant à 200 MPa l'échelle graphique pour la représentation des contraintes (Figure 24.14). La linéarité matérielle est satisfaite, contrairement à ce que peut laisser croire le champ de contrainte calculé. Les vraies contraintes maximales apparaissent aux mêmes endroits que précédemment (sur les deux têtes, à  $90^\circ$  de l'axe de la bielle), ont la même valeur que précédemment, mais il faut interpréter les résultats pour mener correctement l'analyse des résultats.



*Figure 24.14 : Contraintes équivalentes extrapolées, et contraintes avec limitation de l'échelle graphique à 220 MPa*



## Chapitre 25

### Rambarde

#### 25.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

La structure représentée sur la figure 25.1 est présente dans un grand nombre de gares SNCF. Elle est en acier (module de Young 210000 MPa, coefficient de Poisson 0,3, limite élastique 200 MPa). Elle est constituée de trois parties : des poteaux, des goussets soudés sur les pieds sur une hauteur de 70 mm, et un tube de section circulaire soudé sur toute la longueur des goussets. On suppose qu'une personne de 80 kg est assise à mi-distance de deux poteaux. On veut déterminer la flèche et l'état de contrainte dans la structure. Plusieurs modélisations vont être comparées, en faisant a priori l'hypothèse de la linéarité. La distance entre deux poteaux est de 1,36 m.



*Figure 25.1 : Rambarde*

Le tube a pour diamètre moyen 50 mm, et pour épaisseur 2 mm. Son axe est à 880 mm du sol, décalé de 127 mm vers l'avant par rapport au plan qui passe par l'arrière des trois poteaux verticaux. Les pieds ont une hauteur totale de

825 mm, une largeur de 70 mm, une épaisseur de 12 mm. Dans leur partie haute, une partie rectangulaire a une hauteur de 70 mm et une avancée de 52 mm. Les goussets ont une épaisseur de 10 mm. Le gousset central est symétrique, les autres ne le sont pas mais sont symétriques l'un de l'autre (Figure 25.2). Les soudures ne sont pas modélisées, leur effet est directement pris en compte au niveau du maillage par les nœuds communs à deux parties (pied et gousset, gousset et tube) qui, autour d'un axe, ont une rotation commune à tous les éléments qui y sont connectés.

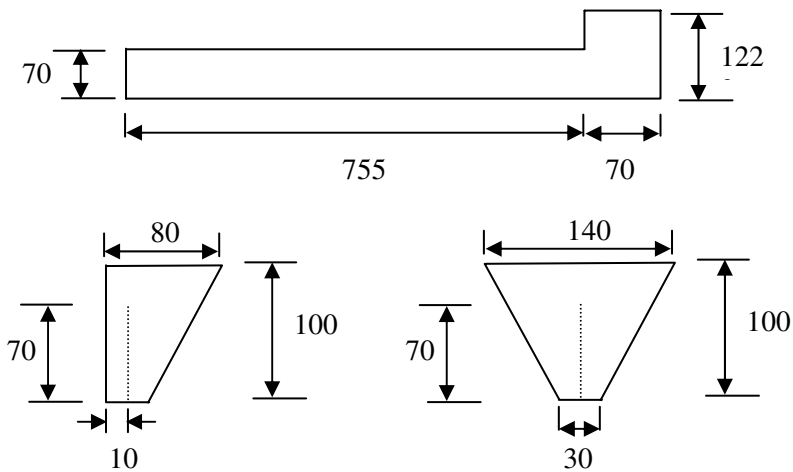


Figure 25.2 : Dimensions

## 25.2. COQUES

Les trois parties ont une de leurs dimensions petite par rapport aux autres. La modélisation avec des éléments de coque est possible. Il faut donc définir les feuillets moyens des différentes parties, puis les lier pour le calcul. De petites adaptations sont donc nécessaires car le feuillet d'un pied et celui d'un gousset n'ont pas de frontière commune, le feuillet d'un gousset et celui du tube n'ont pas non plus de frontière commune (Figure 25.3). On choisit ici d'agrandir un peu le retour horizontal du pied (extension de 5 mm) et le gousset (extension de 1 mm) pour que des nœuds soient communs aux différentes parties. Bien que la structure soit symétrique, du fait du chargement, il est nécessaire de la modéliser complètement. Selon les outils de pré-traitement, il est possible de mailler la section du tube, un pied et un gousset, puis d'utiliser l'extrusion, les symétries et les copies de maillage réaliser le maillage de l'ensemble. Le maillage des différentes parties est représenté sur la figure 25.4.

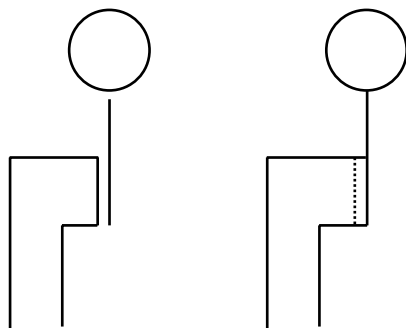


Figure 25.3 : Feuilletes moyens et adaptations

On fait l'hypothèse que la charge est linéique, et qu'elle agit sur 40 cm, ce qui correspond à une charge linéique d'intensité  $2 \text{ N/mm}$  dirigée vers le sol. Le maillage du tube doit prendre en compte cette dimension pour que le chargement puisse être appliqué là où on le souhaite. Tous les nœuds situés au niveau du sol sont encastres (4 pour chacun des pieds pour le maillage ci-dessous), la structure n'a aucun mode rigide.

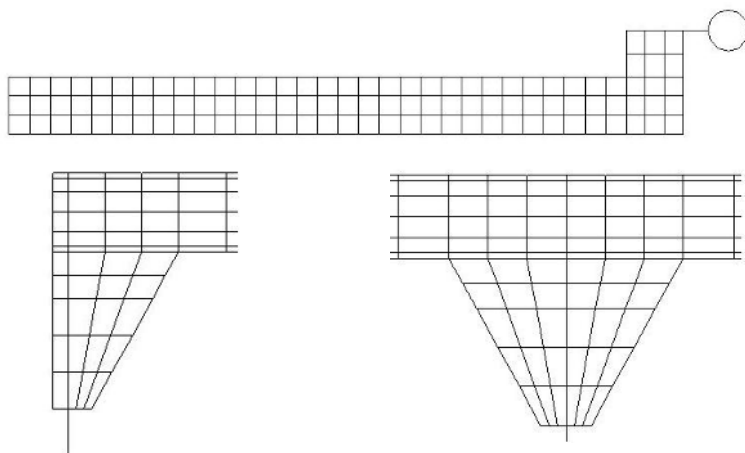


Figure 25.4 : Maillages (pied, goussets)

La masse calculée de la structure est de  $25,8 \text{ kg}$ . Les déplacements, fortement amplifiés, sont représentés sur la figure 25.5. L'amplitude maximale du déplacement est de  $1,38 \text{ mm}$ , ce qui est compatible avec l'hypothèse de linéarité géométrique. La charge n'agissant pas dans le plan vertical qui contient le centre de gravité ni dans le plan de symétrie, l'effort appliqué crée un couple, et il en résulte pour cette structure des déplacements dans les trois directions de l'espace. La zone chargée se déplace de  $0,25 \text{ mm}$  vers l'avant, de  $0,26 \text{ mm}$  vers



la droite, de 1,33 mm vers le bas. Sous la charge appliquée, le tube s'écrase légèrement et s'ovalise : la différence de déplacement transversal est de l'ordre de 0,015 mm dans les sections chargées.

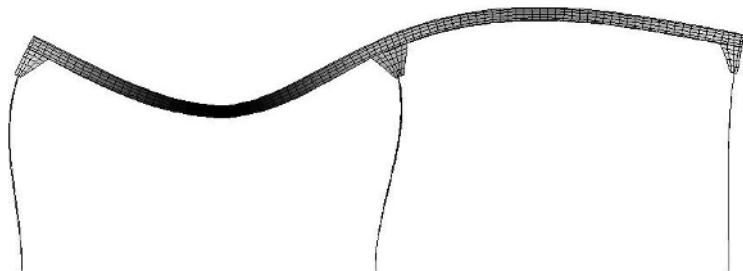


Figure 25.5 : Déplacements sous charge

Les contraintes sont localisées dans la zone de chargement (le tube est en flexion) et au raccord gousset-tube. La contrainte équivalente extrapolée maximale est de l'ordre de 84 MPa dans une peau, de 63 MPa dans l'autre (Figure 25.6). Cela valide l'hypothèse de linéarité matérielle. Il n'y a pas de problème au niveau des encastremements, ni au niveau des raccords entre parties : les soudures ne posent a priori pas de difficulté particulière.

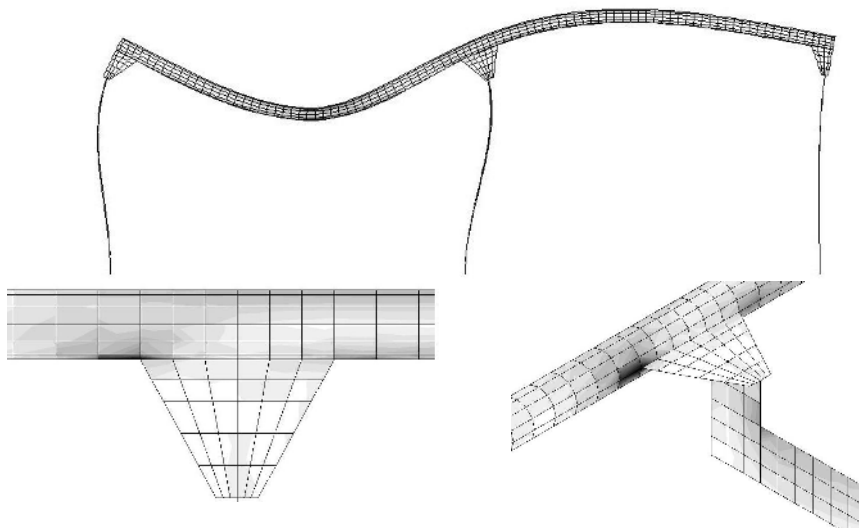


Figure 25.6 : Contraintes équivalentes extrapolées, zoom sur le raccord

Les contraintes au niveau du raccord sont physiquement plus faibles que celles calculées, du fait de la présence du cordon de soudure. Une étude tri-dimensionnelle permettrait, si besoin était, de déterminer plus précisément les contraintes dans cette zone.

### 25.3. POUTRES

Les pieds et le tube ont deux de leurs dimensions bien plus petites que la troisième : l'élément de poutre peut être utilisé pour leur modélisation. Les poutres ne sont décrites que par leur fibre neutre. Les sections des poutres sont classiques : il suffit de donner la direction des axes principaux d'inertie et les dimensions de ces sections, les programmes de calcul évaluant toutes les propriétés équivalentes de ces sections.

Les goussets trapézoïdaux posent un réel problème : autant leur modélisation par des coques paraissait légitime, autant leur modélisation par des poutres paraît inadaptée. Trois modèles peuvent être étudiés. Dans le premier, les goussets ne sont pas représentés, mais leur effet est traduit par des corps rigides reliant le tube au retour horizontal des pieds, sur la largeur des goussets. L'axe du tube est correctement positionné dans l'espace par rapport aux deux poutres qui définissent un pied (partie verticale et retour horizontal). Dans le second, les goussets sont explicitement maillés et raccordés aux poutres, moyennant quelques adaptations pour que les nœuds des différentes parties soient communs au niveau des raccords. Dans le troisième, les goussets ne sont pas modélisés, la fibre neutre du tube est directement liée à l'extrémité des retours horizontaux, un offset étant affecté aux éléments matérialisant le tube pour que leur inertie soit correcte (Figure 25.7). En ce qui concerne les conditions aux limites, il faut encastrer les trois nœuds (6 composantes par nœud pour une poutre) qui sont aux extrémités basses des pieds. Tous les modes rigides sont bloqués.

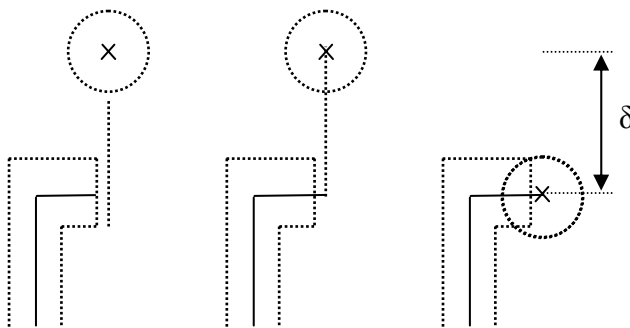


Figure 25.7 : Fibres neutres et adaptations possibles

### 25.3.1. Corps rigides

La géométrie de l'ensemble est très simple, le tube doit comporter plusieurs tronçons de manière à pouvoir appliquer la charge répartie traduisant l'effet de la personne assise sur la rambarde (Figure 25.8). La poutre est un élément exact en statique, un tronçon au sens de la RDM peut être modélisé par un seul élément fini de poutre. De manière à mieux représenter les courbures sous charge et à disposer de plus d'informations en post-traitement, chaque tronçon est décomposé en plusieurs éléments finis. Chaque gousset est représenté par un corps rigide qui relie le nœud commun au retour horizontal d'un pied aux nœuds du tube, sur la longueur de soudure du gousset. Il est donc supposé indéformable par rapport aux autres parties de l'ensemble.

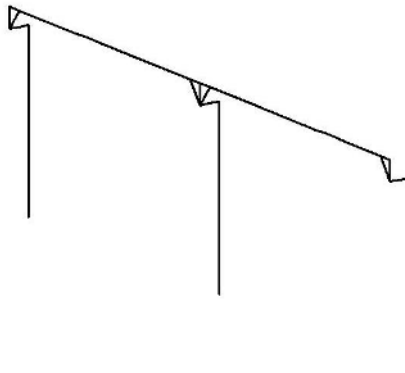


Figure 25.8 : Corps rigides

Les **corps rigides** n'ont pas de masse : la masse de la structure est de 24 kg car les goussets ne sont donc pas pris en compte dans le bilan de masse et le tube ne déborde pas de part et d'autre des pieds extrêmes. Les déplacements, fortement amplifiés, sont représentés sur la figure 25.9. L'amplitude maximale du déplacement est de 1,26 mm, ce qui est compatible avec l'hypothèse de linéarité géométrique et avec le fait que le gousset étant indéformable, l'amplitude des déplacements soit plus faible que précédemment.

La zone chargée se déplace de 0,25 mm vers l'avant, de 0,26 mm vers la droite, de 1,21 mm vers le bas. On retrouve les résultats du modèle coque précédent pour les déplacements, l'écart n'est que de 8% sur la flèche. En ce qui concerne les contraintes, l'écart paraît plus important puisque les contraintes maximales sont de 40,8 MPa pour la compression et de 40,6 MPa pour la traction. Mais quand on analyse les contraintes axiales au-dessus et en dessous du tube dans la zone chargée, on a respectivement -40 et +44 MPa, ce qui est équivalent à ce que donne le modèle poutre. La section du tube s'ovalise, le champ de

contrainte est à la fois axial et circonférentiel dans le modèle coque. La section est par hypothèse indéformable, le champ de contrainte est axial dans le modèle poutre. Le raccord gousset-tube n'est pas correctement décrit par ce modèle, il n'est donc pas possible d'y retrouver la contrainte locale. On a seulement une contrainte due à la flexion du tube. Le comportement global de la structure est donc bien représenté par ce modèle associant poutres et corps rigides.

En ce qui concerne les contraintes dans les poutres, plusieurs points de calcul sont généralement répartis conventionnellement dans la section des profils disponibles en bibliothèque des codes éléments finis. Lors du post-traitement, connaissant l'orientation du profil, il faut regarder le point de contrainte maximale et non le premier proposé par le programme, car il peut être dans le plan neutre selon la sollicitation.

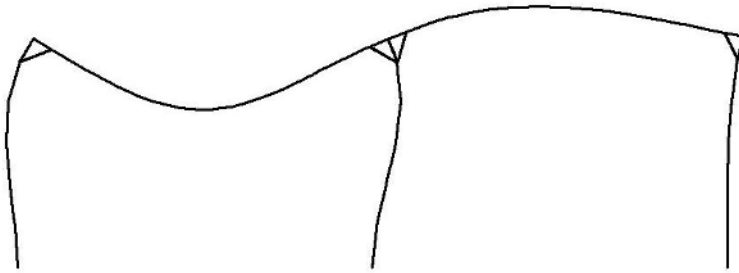


Figure 25.9 : Déplacements sous charge

### 25.3.2. Goussets

Un autre modèle consiste à modéliser les pieds et le tube par des poutres, le gousset par des éléments de coque d'épaisseur 10 mm. Les goussets, pour des questions de simplicité, ont une forme modifiée par rapport au premier modèle (Figure 25.10).

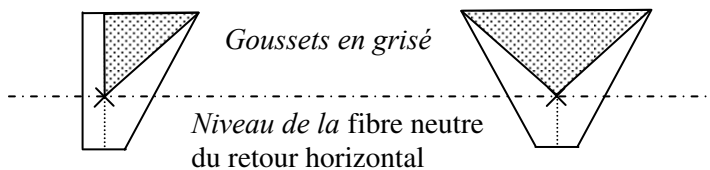


Figure 25.10 : Goussets modifiés

La liaison entre le gousset et le tube ne pose pas de difficulté particulière, la connexion est établie sur une arête. Mais la liaison entre le gousset et le retour

horizontal du pied doit être étudiée car une poutre est connectée orthogonalement à une coque. La rotation de la poutre autour de l'axe orthogonal au gousset (drilling DOF) n'est pas connectée, point abordé dans le chapitre « Raccord d'éléments ». Cela n'engendre pas de modes rigides car même si le gousset est libre en rotation autour de l'axe horizontal au point de connexion, il est lié au tube qui est lui-même lié aux autres goussets : l'ensemble ne peut pas pivoter librement autour d'un axe horizontal. Pour éviter ce problème (même s'il paraît sans conséquence sur le calcul car l'amatrice est inversible), on peut intégrer dans le modèle un corps rigide sur une partie de la hauteur de du gousset, ce qui matérialise le cordon de soudure (Figure 25.11). La transmission des rotations est réalisée par cet artifice. La masse de la structure est de 25 kg (goussets modifiés et pas de débordement de part et d'autre des pieds extrêmes). L'amplitude du déplacement est de 1,23 mm, ce qui est cohérent avec les résultats des modèles précédents. Le champ de contrainte est similaire à celui obtenu avec le modèle précédent comportant des corps rigides pour représenter les goussets. Les contraintes sont maximales dans la zone chargée qui est en flexion, elles varient de -40 à 44 MPa dans la section la plus sollicitée. Au vu du modèle, la liaison entre le tube et le gousset ne permet pas voir la contrainte locale au niveau de leur raccord.

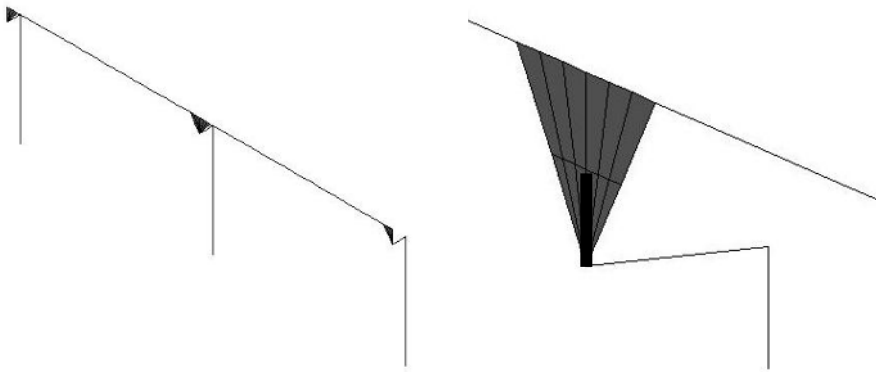


Figure 25.11 : Maillage mixte poutres – coques

### 25.3.3. Offsets

Le modèle est encore plus simple car le tube est géométriquement ramené sur l'extrémité des retours horizontaux. Un **offset** de 90 mm vers le haut permet d'avoir la bonne inertie en flexion des sections du tube autour d'un axe horizontal malgré le « mauvais » positionnement de la fibre neutre dans l'espace (Figure 25.12). La masse de la structure est de 24 kg, aucun gousset n'est modélisé ni représenté par une modélisation appropriée. L'amplitude du déplacement est de 1,32 mm, ce qui est cohérent avec les valeurs données par

les autres modèles. La raideur locale apportée par les goussets n'est pas prise en compte, d'où le résultat compris entre celui du modèle coque et celui dans lequel les goussets sont modélisés par des corps rigides (Figure 25.13). Les contraintes sont maximales dans la zone chargée qui est en flexion, elles varient de -42 à 42 MPa dans la section la plus sollicitée, ce qui est cohérent avec les valeurs précédentes. La liaison entre le tube et le gousset n'étant pas modélisée, il est normal de ne pas voir la contrainte locale au niveau du raccord gousset-tube.

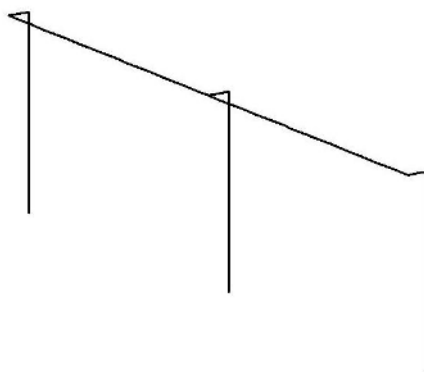


Figure 25.12 : Nœuds confondus et offset du tube

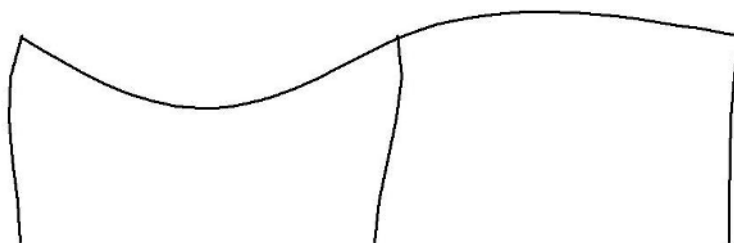


Figure 25.13 : Déplacements sous charge

Le nœud commun aux trois éléments a une rotation autour de l'axe  $z$  orthogonal au plan de la figure 25.14. La rotation est donc localement la même pour les trois éléments qui y sont connectés. Si on place des goussets dans les angles, goussets dont les dimensions ne sont pas petites par rapport aux dimensions des parties de structure qui y sont reliées, le gousset a une influence physique sur le comportement de la structure, il prolonge la distance sur laquelle l'angle se conserve entre les parties reliées (Figure 25.15). Le prendre en compte ou non dans le modèle change la solution. Si on place de petits goussets dans les angles, ils ont plus un rôle de positionnement que de liaison mécanique : ils ne

changent pas la cinématique et n'ont pas véritablement de zone d'influence (Figure 25.16). Il est inutile de les modéliser, sauf pour une étude locale en contrainte mais dans ce cas, ce ne sont pas des éléments de poutre qu'il faut. Ceci explique que le dernier modèle présenté donne de bons résultats.

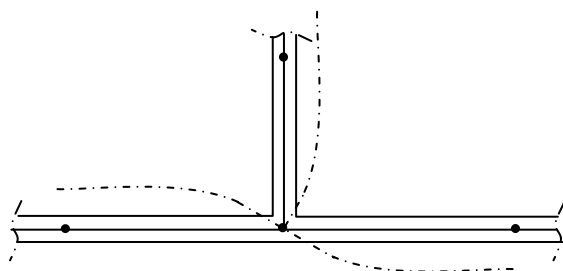


Figure 25.14 : Raccord d'éléments

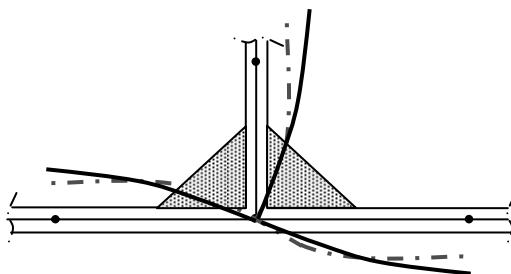


Figure 25.15 : Influence d'un gros gousset

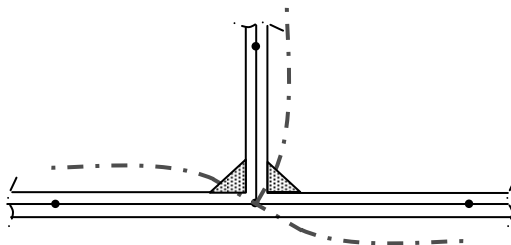


Figure 25.16 : Influence d'un petit gousset

## Chapitre 26

### Cuve

#### 26.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Pour arrêter les particules émises lors d'une expérience de physique, on utilise un ensemble de six cuves identiques qui forment un anneau cylindrique. Chacune de ces cuves, de hauteur totale 4 m, est faite en acier. Le module d'élasticité du matériau est de 215000 MPa, le coefficient de Poisson de 0,3 et la limite élastique de 250 MPa. Toutes les tôles qui la constituent, d'épaisseur 5 mm, sont soudées entre elles. Le rayon intérieur est de 1800 mm, le rayon extérieur de 2100 mm. Le fond de la cuve est à 155 mm du sol sur lequel elle est posée. Le haut de la cuve comporte des ouvertures et des renforts (Figure 26.1). La cuve contient de l'eau jusqu'à 10 cm de son sommet. On souhaite vérifier que le comportement de la structure est linéaire lorsqu'elle est remplie.

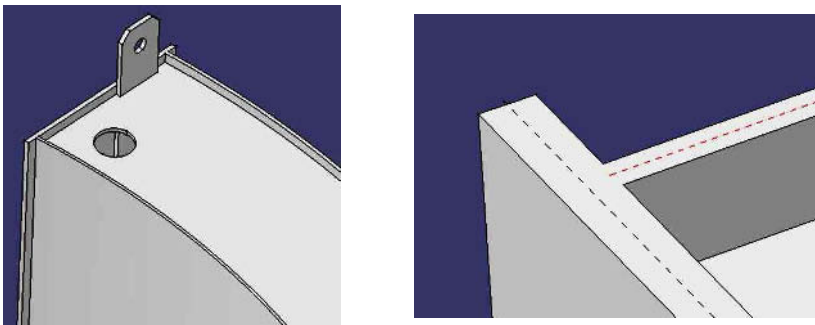


Figure 26.1 : Détails de la partie haute de la cuve



## 26.2. HYPOTHÈSES ET MODÈLES

L'influence des perçages et des renforts de la partie supérieure est négligeable sur le comportement global de la structure. Les dimensions des tôles sont compatibles avec un modèle comportant des éléments de coque. La cuve présente un plan de symétrie vertical, qui est également un plan de symétrie pour les conditions aux limites et le chargement. La moitié d'une cuve est donc modélisée. Si le plan de symétrie est le plan  $\theta = 30^\circ$ , pour introduire les conditions de symétrie, il faut pour tous les nœuds qui y sont situés définir des axes locaux ou définir des conditions de planéité (gérées par multiplicateurs de Lagrange). Si le plan de symétrie est le plan  $\theta = 0^\circ$ , il suffit de bloquer la translation dans la direction  $y$  ainsi que la rotation autour des axes  $x$  et  $z$  sur tous les nœuds qui y sont situés, ce qui est plus simple. C'est ce qui est choisi pour le modèle.

Les conditions aux limites sont l'appui des trois lignes inférieures. Cela implique le blocage de la translation sur  $z$  et le blocage de la rotation adéquate pour chacun des nœuds. Ces conditions aux limites imposent la définition d'axes locaux sur les trois lignes inférieures, car les rotations doivent être bloquées autour d'axes dont la direction n'est pas un axe structural.

Le chargement est la **pression hydrostatique** due au fluide qui agit orthogonalement aux parois de la cuve baignées par le fluide. Si on suppose que la cuve est remplie jusqu'en haut, il n'est pas nécessaire de décomposer chaque tôle verticale en deux surfaces pour séparer la partie sèche de la partie mouillée. On fait ici cette hypothèse : la hauteur de surface libre est à 4 m du sol, la charge est surestimée. La pression hydrostatique a pour expression,  $\rho$  étant la masse volumique du fluide agissant sur la structure,  $h$  l'altitude du point considéré par rapport à la surface libre du fluide, et  $g$  l'accélération de la pesanteur

$$p = \rho gh$$

Si les dimensions sont exprimées en mètres, les forces en newton, alors la masse volumique est en  $\text{kg/m}^3$  et l'accélération de la pesanteur est de  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Si les dimensions sont exprimées en millimètres, les forces en newton, alors la masse volumique est en  $\text{t/mm}^3$  et l'accélération de la pesanteur est de  $9810 \text{ mm/s}^2$ . Il est important de contrôler le sens d'action de la pression, qui agit de l'intérieur vers l'extérieur de la cuve sur chacune de ses parois. Le maillage est entièrement réglé, il est constitué de 658 éléments de coques quadrangulaires (2080 nœuds et 3930 degrés de liberté).

## 26.3. RÉSULTATS

Un premier calcul est réalisé en ne bloquant que la composante verticale de tous les nœuds en appui, ce qui ne traduit pas correctement l'appui avec des éléments de coque mais que l'on voit fréquemment dans les modèles. Ces conditions aux limites et les conditions de symétrie n'éliminent que 5 des 6 modes rigides : la structure a un mouvement d'ensemble et la matrice de raideur structurale n'est pas inversible. Pour bloquer la translation d'ensemble dans la direction  $x$  du repère structural, il suffit de fixer ce déplacement pour un nœud. Le déplacement de la cuve dans le repère structural dépend du nœud arbitrairement choisi, mais les déplacements relatifs n'en dépendent pas. Les parois se déplacent dans des sens opposés, elles s'écartent d'environ 13,66 mm l'une de l'autre. L'analyse du sens des réactions montre que la cuve a tendance à se décoller. Puisque les conditions aux limites sont mal représentées, il n'est pas possible de conclure quant au décollement.

Outre les conditions de symétrie et l'élimination du mode rigide restant, on introduit les conditions aux limites explicitées dans le paragraphe précédent (blocage de la translation sur  $z$  et le blocage de la rotation adéquate pour chacun des nœuds en appui sur la fondation). Les parois se déplacent dans des sens opposés, elles s'écartent d'environ 14,80 mm l'une de l'autre (Figure 26.2a). Mais l'analyse du sens des réactions montre que la cuve a tendance à se décoller. Il faut donc introduire des conditions de contact entre la fondation et le bas de la cuve, c'est à dire des conditions aux limites unilatérales.

Avec les conditions aux limites précédentes et les conditions de contact, sur les 47 nœuds du bas de la cuve, seuls 26 sont en contact lorsque la cuve est pleine d'eau, les autres ont un déplacement dans la direction structurale  $z$ . Les parois se déplacent dans des sens opposés, elles s'écartent d'environ 21,15 mm l'une de l'autre (Figure 26.2b). La forme du champ de déplacement est différente de celle obtenue précédemment. Chaque paroi, dont l'épaisseur est de 5 mm, se déplace transversalement de 10 mm environ, ce qui est compatible avec l'hypothèse de linéarité géométrique. Les nœuds qui ne restent pas en contact avec la fondation ont un déplacement vertical qui est inférieur à 1 mm. En pratique, le sol n'est jamais parfaitement plan, il n'est pas indéformable et il est tout à fait raisonnable de supposer que la cuve est en appui sur toute sa base.

Les parois ne sont pas uniquement soumises à de la flexion. Elles sont également sollicitées en traction-compression, la contrainte équivalente n'est pas nulle dans leur feuillet moyen. La contrainte équivalente extrapolée aux nœuds a pour valeur maximale 220 MPa dans une peau et 245 MPa dans l'autre (Figure 26.3).

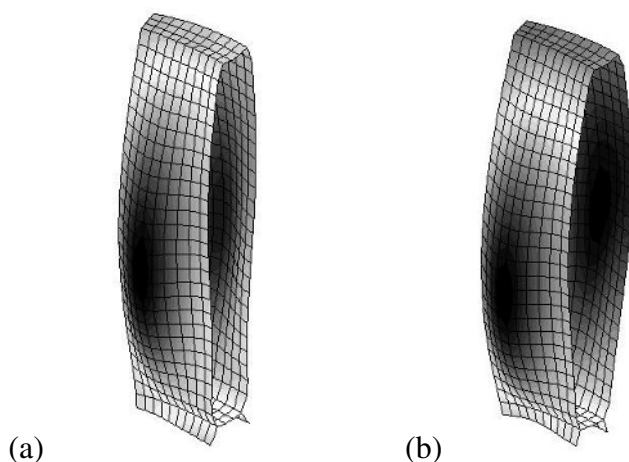


Figure 26.2 : Amplitude des déplacements de la cuve (même amplification pour la représentation graphique)

Ces valeurs sont cohérentes avec l'hypothèse de linéarité matérielle, mais aucun coefficient de sécurité n'est pris en compte. Les contraintes maximales sont localisées au niveau des raccords entre la paroi intérieure, le fond et la paroi radiale. Du fait de l'assemblage des tôles par soudage, et donc de la surépaisseur locale au niveau du raccord, les contraintes ont en fait une valeur inférieure à celle qui a été calculée. Dans le modèle qui ne comporte pas les conditions de contact, les contraintes équivalentes extrapolées ont une valeur maximale de 210 MPa.

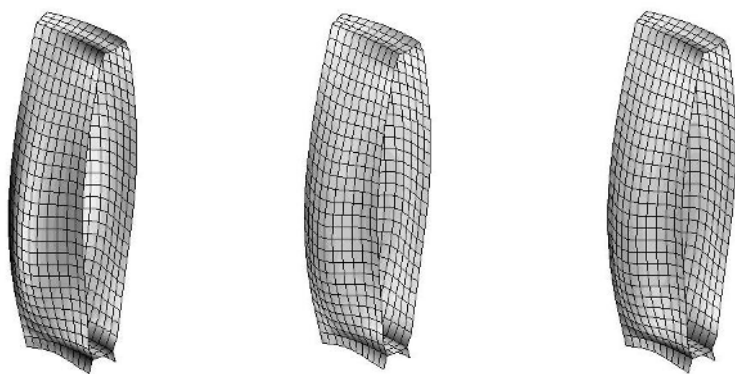


Figure 26.3 : Contraintes équivalentes extrapolées dans le feuillet moyen, la peau inférieure et la peau supérieure

Bien qu'il y ait a priori linéarité géométrique et linéarité matérielle, il n'est pas encore possible de conclure quant à la tenue de la cuve. Le feuillet moyen de la paroi externe est soumis à de la traction : au fur et à mesure de l'augmentation de la charge, c'est à dire du remplissage de la cuve, il se raidit. Mais le feuillet moyen de la paroi interne est soumis à de la compression : il risque de flamber. L'analyse linéaire ne peut donc pas être validée car le flambement peut se produire lors du remplissage, avant que l'eau n'ait atteint le niveau maximal. Il faut donc estimer la charge critique pour savoir si le comportement de la cuve est véritablement linéaire.

## 26.4. STABILITÉ LINÉAIRE

Avec cette approche, on suppose que le problème reste strictement linéaire jusqu'à la charge critique. En particulier, les déplacements restent suffisamment petits pour qu'en première approximation, on puisse confondre la structure non déformée et la structure déformée. Sous ces hypothèses, la matrice de raideur d'une structure dépend du point d'équilibre atteint pour un niveau de charge donné (Figure 26.4) :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma$$

$\mathbf{K}_T$  est la **matrice de raideur tangente** (ou raideur apparente).  $\mathbf{K}_0$  est la **matrice de raideur initiale**, utilisée lors d'une analyse linéaire. Elle est semi définie positive.  $\mathbf{K}_\sigma$  est la **matrice de raideur géométrique**, elle représente l'évolution de la matrice de raideur en fonction des contraintes qui se développent dans la structure au fur et à mesure de son chargement. Par abus de langage, on peut dire que cette matrice a le signe de la contrainte.

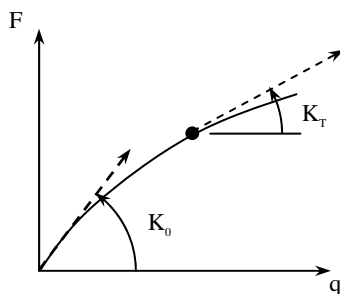


Figure 26.4 : Matrice tangente pour un problème à 1 degré de liberté

Si la structure est soumise à de la compression, pour un certain niveau de charge, les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_\sigma$  se compensent, la raideur apparente est nulle, la structure flambe. Si la structure est soumise à de la compression, la raideur apparente augmente sans cesse, il ne peut pas y avoir de flambage.

Pour déterminer le niveau de charge qui correspond au flambage (charge critique), on procède de la manière suivante en mécanique linéaire. On applique sur la structure la charge  $F_0$  qui est généralement la charge de service. Charge est au sens large, il peut s'agir d'une pression. Il en résulte un champ de déplacement  $q_0$  et un champ de contrainte  $\sigma_0$ . La matrice de raideur géométrique est alors  $\mathbf{K}_{\sigma_0}$ . Si on appliquait la charge  $\lambda F_0$ , il en résulterait un champ de déplacement  $\lambda q_0$ , un champ de contrainte  $\lambda \sigma_0$  et une matrice de raideur géométrique qui, du fait de la linéarité, pourrait s'écrire :

$$\mathbf{K}_{\lambda \sigma_0} = \lambda \mathbf{K}_{\sigma_0}$$

Déterminer la **charge critique** au sens **d'Euler**, c'est chercher pour quelle valeur de  $\lambda$  la matrice de raideur tangente devient singulière :

$$\mathbf{K}_T \mathbf{q} = 0 \Rightarrow (\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_{\sigma_0}) \mathbf{q} = 0$$

$\lambda$  est le **coefficient de charge critique**, c'est la valeur par laquelle il faut multiplier la charge initiale pour que la structure flambe.  $\lambda F_0$  est la **charge critique** d'Euler (ou pression critique). Le vecteur  $q$  associé à un coefficient de charge critique est appelé **mode critique**. Son amplitude est indéterminée en mécanique linéaire : si  $\mathbf{q}$  est un mode critique, quel que soit le scalaire non nul,  $\mathbf{q}$  est également un mode critique pour le même facteur de charge. Formellement, cette équation est analogue à  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0$ . Les algorithmes de recherche des coefficients de charge critique sont les mêmes que les algorithmes de recherche des valeurs propres (cf. chapitre 17).

Si  $\lambda$  est négatif, il faut appliquer le chargement dans le sens opposé à celui introduit pour qu'il y ait flambage. Il y a danger potentiel pour certaines structures car le chargement est susceptible d'agir dans les deux sens, pas pour d'autres. Si  $\lambda$  est compris entre 0 et 1, la charge critique est inférieure à  $F_0$  donc l'analyse statique linéaire précédente est fautive. Si  $\lambda$  est supérieur à 1, la charge critique sera théoriquement de  $\lambda F_0$ . Pour valider l'approche linéaire, il reste à vérifier que le déplacement  $\lambda q_0$  respecte l'hypothèse de linéarité géométrique et que la contrainte  $\lambda \sigma_0$  est inférieure à la limite élastique. Si ce n'est pas le cas, il faut une analyse non linéaire pour étudier le comportement de la structure.

Une charge critique supérieure à la charge de service ne suffit pas pour valider les résultats obtenus avec l'approche linéaire, à moins qu'elle ne soit vraiment très supérieure à la charge de service. En effet, l'approche linéaire de la stabilité suppose entre autres que les déplacements restent petits. En d'autres termes, la matrice  $\mathbf{K}_u$  qui traduit l'évolution de la matrice tangente avec les déplacements qui augmentent avec le niveau de chargement n'est pas prise en compte. Cette matrice  $\mathbf{K}_u$  est composée de trois termes, deux qui sont des fonctions linéaires

des déplacements, et que l'on peut regrouper pour former la matrice  $\mathbf{K}_u^*$ , un qui est une fonction quadratique des déplacements. L'**approche de Dupuis** pour la stabilité consiste à calculer le facteur de charge critique en prenant en compte cette matrice  $\mathbf{K}_u^*$

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda[\mathbf{K}_{\sigma 0} + \mathbf{K}_u^*])\mathbf{q} = 0$$

Si la charge critique au sens de Dupuis et la charge critique au sens d'Euler sont relativement différentes, l'approche linéaire n'est pas valable. Si la charge critique au sens de Dupuis et la charge critique au sens d'Euler sont proches et ne sont qu'un peu supérieures à 1, il reste un point à vérifier. Quand on compare les valeurs de charge critique obtenues par une approche linéaire et les valeurs mesurées lors d'essais, il y a des différences, parfois importantes. Elles sont dues à la présence inévitable de défauts de diverses origines, qui ne sont pas prises en compte dans le modèle. Ces imperfections sont matérielles car le matériau n'est pas homogène et isotrope, elles sont géométriques car une structure est toujours réalisée avec une certaine précision par rapport aux cotes nominales, elles sont dues aux chargements et aux conditions aux limites. Une analyse supplémentaire prenant en compte le défaut le plus probable de la structure peut permettre de conclure quant à la validité du résultat de l'approche linéaire, point non détaillé dans cet ouvrage.

Dans un certain nombre de cas, il peut être important de prendre en compte des charges non proportionnelles et des charges proportionnelles. Un bâtiment est soumis au poids de la neige. Selon sa conception, les matériaux employés et les compressions dues aux descentes de charge, l'effet du poids peut être négligeable. Une analyse classique donne le facteur de charge critique (hauteur de neige) par rapport à la hauteur réglementaire extrême selon la situation géographique du bâtiment. Si le poids a un effet non négligeable, il comprime le bâtiment ce qui a pour effet de diminuer sa raideur apparente  $\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\sigma_{\text{poids}}}$ . Le facteur de charge doit être calculé pour la charge de neige  $\mathbf{K}_{\sigma 0}$  (et pas la charge totale poids plus neige car le poids du bâtiment n'est pas proportionnel à la hauteur de neige), et pour la raideur apparente. Cela conduit à résoudre l'équation en  $\lambda$  :

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\sigma_{\text{poids}}} + \lambda[\mathbf{K}_{\sigma 0}])\mathbf{q} = 0$$

Comme en analyse modale, la symétrie d'une structure ne doit pas, sauf cas exceptionnel, être exploitée pour une analyse de stabilité. Pour que le mode critique soit symétrique, il faut contraindre les déplacements ou avoir une structure parfaitement symétrique, ce qui n'est pas physiquement le cas. Pour déterminer les facteurs de charge critiques, il faut donc symétriser le maillage réalisé et travailler sur la totalité de la cuve.

Bien que ce soit formellement la même équation pour la recherche des fréquences propres et des facteurs de charge critiques, plusieurs différences doivent être notées. En analyse modale, des modes rigides peuvent exister : les fréquences propres sont donc nulles ou positives. En analyse de stabilité, la structure ne peut pas avoir de modes rigides : les facteurs de charge critique peuvent être négatifs ou positifs. En analyse modale, on cherche les premiers modes de la structure : ce sont des modes globaux qui ne nécessitent pas un maillage fin. Les masses effectives associées sont relativement importantes, sauf cas particuliers de structures présentant des symétries et pour lesquelles des modes globaux peuvent avoir des masses effectives nulles. Les modes locaux apparaissent au fur et à mesure que l'on monte en fréquence. En analyse de stabilité, ce sont très souvent des modes locaux qui apparaissent en premier (flambage inter-raideurs). Les maillages doivent être suffisamment fins pour voir apparaître ces modes locaux.

## 26.5. ANALYSE DES RÉSULTATS

Une analyse linéaire de stabilité au sens d'Euler est effectuée. Les conditions aux limites (cuve en appui sur le sol) ne sont pas suffisantes pour éliminer les six modes rigides de la structure, alors que complétées par les conditions de symétrie pour la demi cuve, elles l'étaient. Il faut introduire des conditions supplémentaires qui ne changent pas le problème à résoudre.

Le premier facteur de charge critique calculé par le programme est de -2,42, le second de -2,49, le troisième de 2,86 et le quatrième de 2,96. Les modes critiques associés sont représentés sur la Figure 26.5. La paroi extérieure, plus grande que la paroi intérieure, est en traction. Elle flambera donc la première, mais seulement si la charge est appliquée à l'extérieur de la cuve (signe – du facteur de charge critique) : les deux premières charges critiques ne le sont pas physiquement pour cette cuve. Les modes critiques 3 et 4 sont des modes de paroi intérieure, qui est effectivement susceptible de flamber sous la charge. Le comportement des deux parois n'est pas identique, mais il semble y avoir de la marge par rapport à la charge critique.

Au sens de Dupuis, les deux premiers facteurs de charge critique sont de 0,52 et de 0,53. Ce sont les modes de paroi intérieure (modes 3 et 4 avec l'approche eulérienne), ils apparaissent pour un niveau de charge inférieur à celui de la charge de service. Les deux approches (Euler et Dupuis) donnant des résultats très différents, il n'est pas possible de conclure par une approche linéaire. Bien que les déplacements et les contraintes soient en accord avec les hypothèses de linéarité, on ne peut pas garantir que la cuve aura un comportement linéaire entre le début et la fin du remplissage.

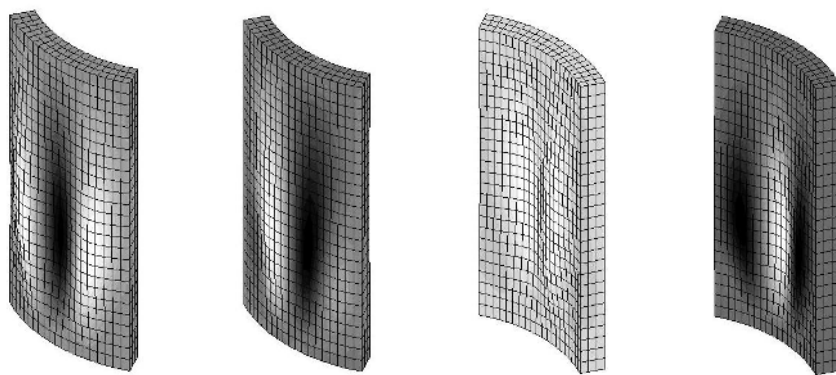


Figure 26.5 : Quatre premiers modes critiques de la cuve

Pour diminuer le risque d'instabilité, on peut imaginer de souder des raidisseurs sur la paroi intérieure de la cuve et empêcher ainsi le renversement de cette paroi. On choisit ici de placer trois raidisseurs identiques, séparés de 1 m, le premier étant situé à 80 cm du sol. La problématique du bureau d'études est de dimensionner les raidisseurs, leur nombre et leur position.

Il faut adapter le maillage de la cuve réalisé auparavant pour qu'il y ait des nœuds communs aux différents raidisseurs et à la cuve. Les raidisseurs sont soumis à de la flexion dans leur plan : ils sont en partie soumis à de la traction, et en partie soumis à de la compression. Il faut s'assurer qu'ils ne flambent pas. L'épaisseur d'un raidisseur est de 5 mm, sa largeur de 100 mm. Le maillage de la cuve avec ses raidisseurs est représenté sur la figure 26.6. Le premier facteur de charge critique est de -2,5958. La pression hydrostatique s'exerçant toujours de l'intérieur vers l'extérieur de la cuve, la première charge critique calculée ne l'est pas physiquement. C'est la paroi arrière qui flambe. En fait, le premier facteur de charge critique positif, correspondant à un mode véritablement critique pour la cuve remplie d'eau, est le 21<sup>ème</sup> calculé. Sa valeur est de 6,3016. C'est un mode de paroi inter-raisseur, local.

Bien que l'influence des imperfections n'ait pas été étudiée, le facteur de charge est suffisamment élevé pour qu'il n'y ait pas à redouter le flambage de la cuve raidie lors de son remplissage.



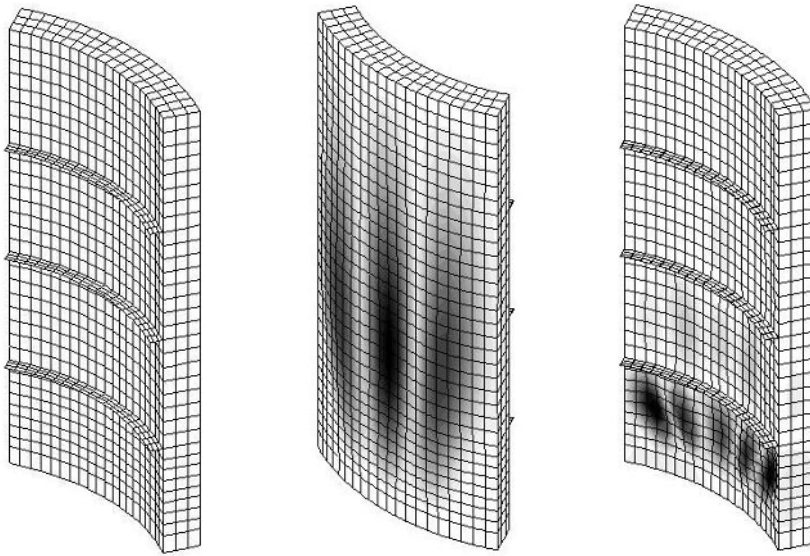


Figure 26.6 : Maillage de la cuve raidie, premier mode critique et premier mode critique physique (21<sup>ème</sup> calculé)

## 26.6. TUBE VIRGO

Le CNRS travaille sur l'interféromètre VIRGO, instrument destiné à détecter les ondes gravitationnelles. Il est constitué de tubes mis sous vide, dont la longueur totale est de 6 km. Les tubes en acier, d'une longueur de 2,5 mètres pour le modèle, sont assemblés en modules de 10 mètres. Le diamètre du tube est de 1 mètre, son épaisseur de 5 mm. Les brides de liaison ont une épaisseur de 10 mm. On considère que les sections extrêmes des modules sont encastrees, le chargement est dû à la différence de pression entre la pression atmosphérique extérieure et le vide.

L'amplitude maximale des déplacements est de  $27 \cdot 10^{-3}$  mm, la contrainte équivalente extrapolée maximale est de 11 MPa : le tube a un comportement géométriquement et matériellement linéaire. Mais il risque de s'effondrer sous l'action de la charge, par renversement de sa courbure : il est nécessaire de réaliser une analyse de stabilité. Le premier facteur de charge critique est double en raison de la symétrie du problème, il a pour valeur 5,3328 (Euler). Le troisième facteur de charge critique est lui aussi double, il a pour valeur 6,4878 (Figure 26.7). En multipliant par ces valeurs les déplacements et contraintes obtenus pour la charge de service, les hypothèses de linéarité sont satisfaites. Les modes critiques sont des modes inter-raidisateurs. Une analyse par

l'approche de Dupuis donne respectivement 5,3325 et 6,4885 pour ces facteurs de charge, les modes ont la même forme qu'avec l'approche d'Euler. On peut donc en conclure que l'approche linéaire est satisfaite et que le tube ne risque pas de flamber lors de la mise sous vide car la marge est relativement importante pour un tube parfait. Pour une vérification plus précise du comportement de ce tube, il faut étudier l'influence des défauts géométriques, des défauts de conditions aux limites.

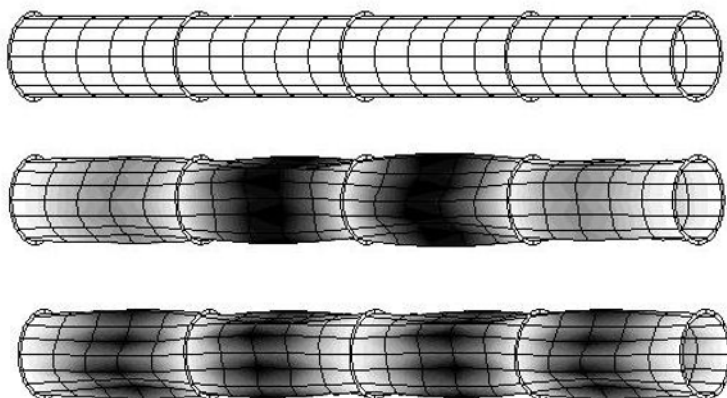


Figure 26.7 : Maillage d'un module, modes critiques 1 et 3

## 26.7. POUTRES

Les poutres sont des structures ou composants de structure qui présentent un cas particulier. Il existe trois types de modes de flambage pour ces éléments (Figure 26.8) :

- l'instabilité globale par compression (mode 1),
- l'instabilité globale par **déversement** sous un effort tranchant (mode 2),
- l'instabilité locale par **voilement** du profil (mode 3).

Le phénomène est bien connu pour l'instabilité globale par compression. C'est le flambement d'Euler sur une structure parfaite ou imparfaite, point de départ de tous les cours sur la stabilité des constructions. Dans le cas d'un effort tranchant, la structure peut se déverser, c'est à dire partir en torsion par couplage flexion-torsion, et ce pour des niveaux de charge qui peuvent être relativement bas. Dans le cas de la flexion, une partie de la structure est en traction mais l'autre est en compression. Un flambage local peut apparaître dans l'une des semelles des poutres en I par exemple, ce qui ne peut être détecté que

si la poutre est modélisée par des éléments de coque. Le modèle et le maillage de la poutre ont une grande influence sur le résultat.



*Figure 26.8 : Flambage global, déversement et voilement d'une poutre en I*

## Chapitre 27

### Support

#### 27.1. INTRODUCTION

Une plaque en acier d'épaisseur 1,5 mm est pliée pour former un U. Les parties verticales ont une hauteur de 155 mm et une largeur de 400 mm, le plateau une longueur de 340 mm. Quatre goussets y sont rapportés par soudage, ainsi que trois raidisseurs longitudinaux en acier de section rectangulaire (30x1,5), soudés en continu sur toute la largeur de la structure. Une charge verticale de résultante 700 N est uniformément répartie sur une portion rectangulaire du plateau, de dimensions 220x320 mm. Les dimensions de la structure sont telles que les éléments de coque sont les plus appropriés pour cette analyse. On fait deux hypothèses a priori : le rayon dû au pliage est négligeable, le plateau et les montants verticaux sont des surfaces planes orthogonales entre elles. Les épaisseurs sont suffisamment petites pour que l'on puisse prendre indifféremment pour feuillet moyen n'importe laquelle des surfaces constituant l'enveloppe physique de la structure (« intérieur » ou « extérieur »). Pour assembler des tôles ou des poutres et accroître la raideur de la liaison, les goussets sont généralement des triangles rectangles isocèles soudés sur les parties à raccorder. Pour renforcer une zone du pliage, le gousset est trapézoïdal du fait de la courbure (Figure 27.1).

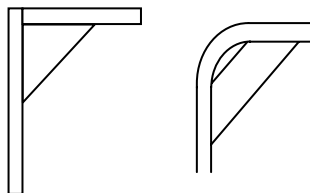


Figure 27.1 : Goussets

Puisque dans le modèle, le rayon de pliage est négligé, les goussets sont triangulaires de côté 115 mm. La géométrie qui sert de support au maillage est représentée sur la figure 27.2. La structure est en appui sur le sol supposé indéformable.

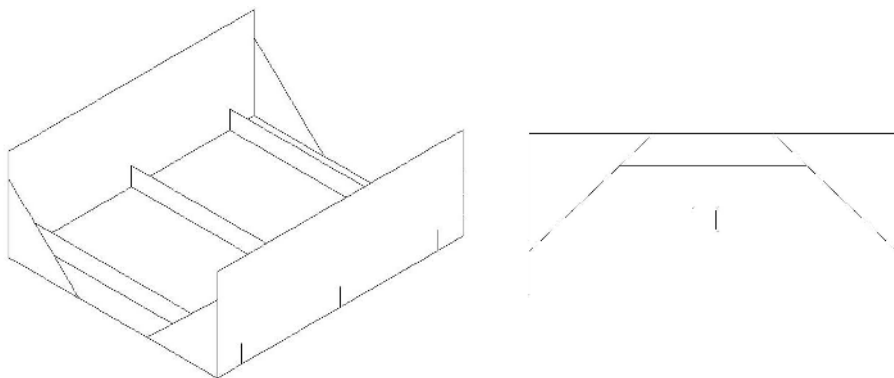


Figure 27.2 : Vue oblique par dessous et vue de coté du modèle

## 27.2. PREMIER MODÈLE : COQUES

La structure a deux plans de symétrie pour la géométrie, les conditions aux limites et les chargements. Il est naturel d'exploiter la symétrie pour l'analyse, seul un quart de la structure doit être maillé. Le maillage réalisé est représenté sur la figure 27.3, il est principalement réglé. La zone grisée est la surface sur laquelle s'applique la pression uniforme de valeur 0,01 MPa.

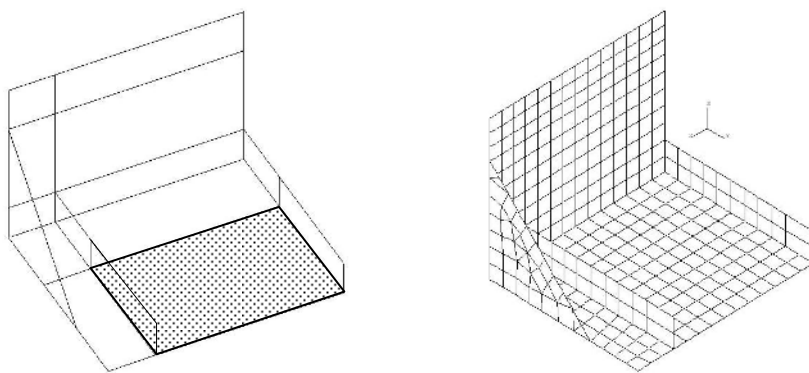


Figure 27.3 : Maillage du quart de la structure et axes structuraux

En ce qui concerne les conditions aux limites, il faut bloquer la translation dans la direction  $z$  pour tous les nœuds de la ligne sur épaissie (Figure 27.4). Mais cela ne suffit pas pour modéliser l'appui. En effet, les nœuds d'un élément de coque ont des translations mais également des rotations. Bloquer la translation revient à punaiser les nœuds, mais n'empêche pas qu'ils puissent pivoter sur eux-mêmes, en particulier autour de l'axe  $Oy$ . Les points matériels situés entre deux nœuds de la ligne peuvent donc décoller ou s'enfoncer dans le sol (Figure 27.4), ce qui n'est pas physique : il est donc nécessaire de bloquer la rotation autour de l'axe  $Oy$  pour tous les nœuds en appui.

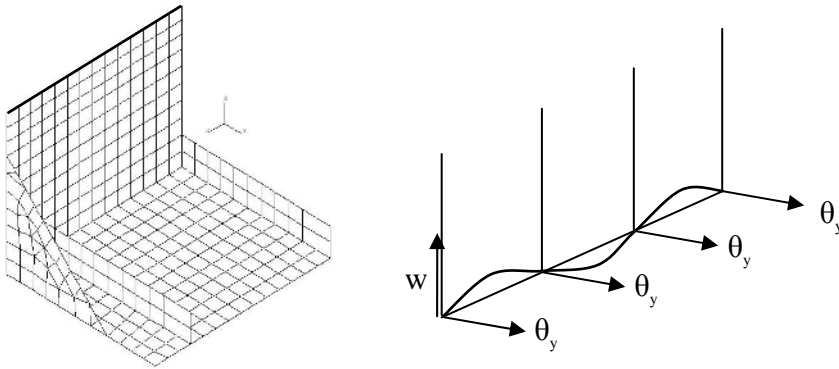


Figure 27.4 : Conditions aux limites et conditions de symétrie

En ce qui concerne les conditions de symétrie, il faut bloquer pour chaque nœud appartenant à un plan de symétrie la translation orthogonale à ce plan et les deux rotations dont les axes sont contenus dans ce plan. On vérifie qu'avec toutes ces conditions, il ne reste pas de mode rigide possible pour le modèle. Si on modélise toute la structure, les conditions d'appui éliminent trois modes rigides : la translation dans la direction  $z$ , les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ . La structure est donc hypostatique, il lui reste trois modes rigides. Le plus simple est de bloquer au nœud central les translations dans les directions  $x$  et  $y$ , et la rotation autour de  $z$ .

En ce qui concerne les propriétés physiques des éléments, leur épaisseur est de 1,5 mm, sauf pour ceux qui matérialisent le raidisseur contenu dans le plan de symétrie. Pour ces éléments, l'épaisseur n'est que de 0,75 mm. Pour les éléments de coque, il est important de vérifier que la direction propre  $z_p$  de chaque élément du plateau, par définition orthogonale à son plan, est orientée de la même manière pour tous les éléments. Si tel n'est pas le cas, il n'y a pas de continuité des peaux (Figure 27.5), ce qui pose un problème pour l'interprétation des contraintes de peau supérieure ou inférieure. Sous l'effet du

moment de flexion représenté ci-dessous, on voit une alternance de traction et de compression dans une peau, ce qui n'est pas le cas physiquement. D'autre part pour les pressions, si elles s'introduisent en axes propres, ceux-ci doivent être cohérent par zone pour que la pression agisse dans le même sens pour tous les éléments d'une zone.

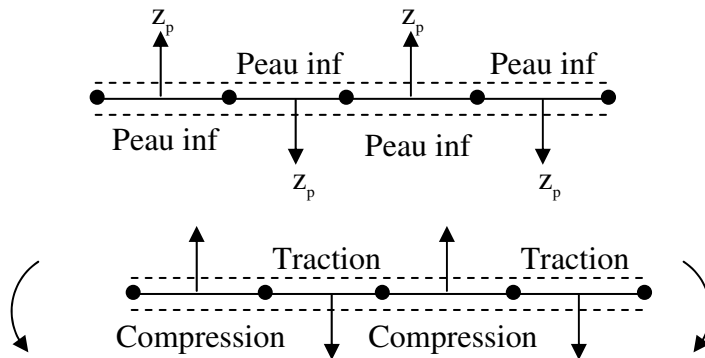


Figure 27.5 : Orientation des coques et continuité des peaux

Les déplacements dans chaque direction et leur amplitude sont représentés sur la Figure 27.6. C'est le raidisseur latéral qui se déplace le plus en  $x$ , du fait de sa rotation (0,206 mm). C'est la paroi verticale qui se déplace le plus en  $y$  (0,156 mm) et le plateau chargé qui se déplace le plus en  $z$  (0,462 mm). La plus grande amplitude (0,462 mm) se produit sur le plateau. L'hypothèse de linéarité géométrique est satisfaite.

En ce qui concerne les contraintes équivalentes de Von Mises extrapolées aux nœuds, elles ne sont pas opposées dans les peaux des éléments (Figure 27.7). Les parois verticales sont soumises à de la compression (descente de charge) et à de la flexion induite par la rotation du plateau. Le plateau est soumis à une charge transversale mais le centre de gravité du plateau raidi n'est pas situé à mi-épaisseur de la coque qui le modélise. Entraîné par le plateau qui fléchit, le raidisseur latéral est soumis à de la torsion. Le raidisseur contenu dans le plan de symétrie est soumis à une flexion plane, son comportement est purement membranaire, les contraintes équivalentes sont égales sur ses deux peaux. La contrainte équivalente de Von Mises extrapolée maximale est de 61 MPa, ce qui est inférieur à la limite élastique du matériau (200 MPa). L'hypothèse de linéarité matérielle est satisfaite.

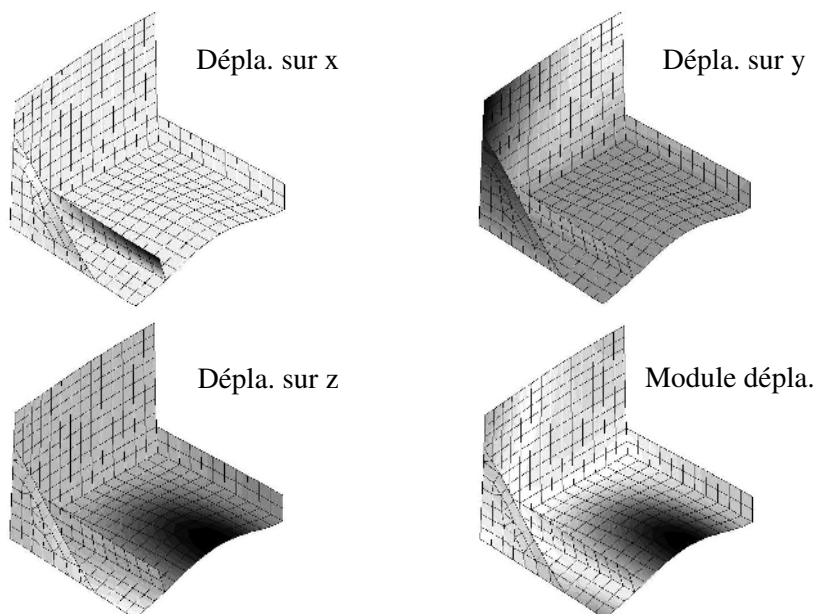


Figure 27.6 : Déplacements de la structure

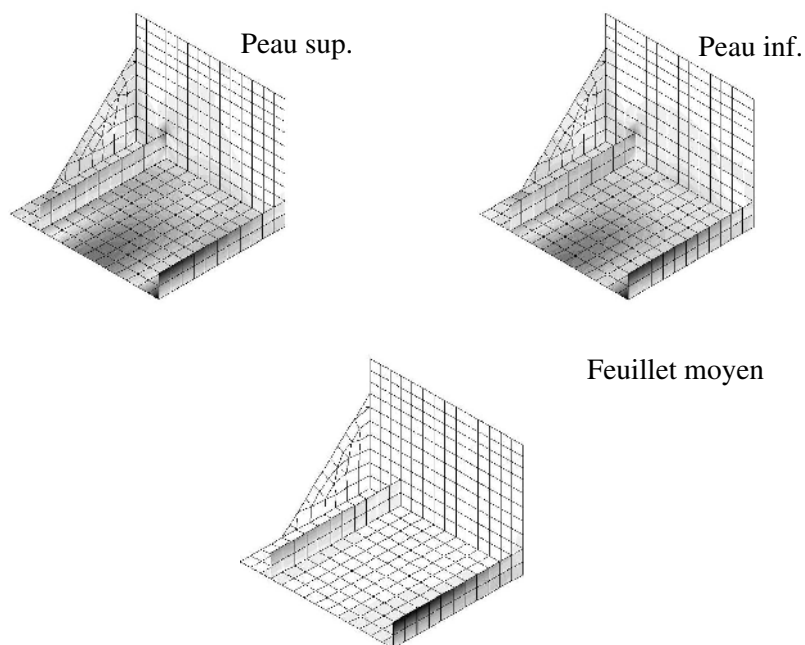
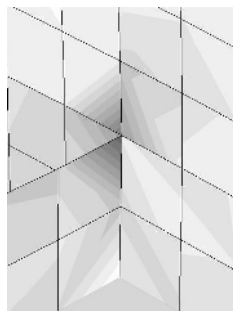


Figure 27.7 : Contraintes équivalentes extrapolées

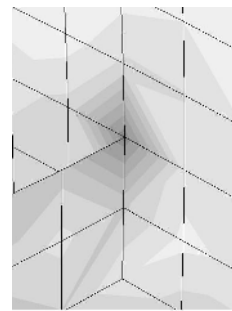


Lorsqu'une structure est liée à une fondation (soudure, boulonnage, collage...), les conditions aux limites induites sur la structure sont bilatérales : la liaison empêche le déplacement de la structure dans une direction et son opposée. En mécanique linéaire, les conditions aux limites sont nécessairement bilatérales : elles traduisent donc naturellement des liaisons physiques précitées. Mais quand une structure est en appui sur une fondation, la liaison physique est unilatérale : la structure ne peut avoir de mouvement dans une direction mais elle peut bouger dans la direction opposée. Il y a décollement possible, c'est donc un problème de contact qu'il faut résoudre. On n'est donc jamais certain, en utilisant des conditions aux limites bilatérales pour le calcul, que le problème donne une solution physiquement acceptable. Il est nécessaire d'étudier le sens des réactions.

Si la réaction en un nœud va de la fondation vers la structure, cette dernière avait tendance à vouloir rentrer dans la fondation qui s'y est opposée en développant la réaction. Si la réaction en un nœud va de la structure vers la fondation, la structure avait tendance à vouloir s'écarter de la fondation qui s'y est opposée (car la condition introduite dans le modèle est bilatérale) en développant une réaction. Le résultat du calcul n'est alors pas physique et il faut recourir à une analyse avec contact. Ici, les réactions sont toutes dirigées de la fondation vers la structure, il n'y a pas tendance au décollement et les conditions d'appui bilatérales sont validées, ce qui valide partiellement l'utilisation d'un programme d'analyse linéaire. Un zoom sur le champ de contrainte en extrémité de raidisseur fait apparaître un niveau de contrainte localement élevé, bien qu'admissible (Figure 27.8).



Contrainte non lissée



Contrainte lissée

*Figure 27.8 : Zoom sur les contraintes aux extrémités des raidisseurs*

La question est de savoir si cette contrainte est due au modèle mis en place, ou si elle traduit ce qui se passe physiquement dans cette zone. Dans ce cas, elle pourrait conduire à la perforation de la paroi ou à la rupture de la soudure selon

le sens de l'effort. Le haut du raidisseur est géométriquement singulier dans le modèle. En réalité, il y a un cordon de soudure de part et d'autre, ce qui a pour effet de diminuer et d'uniformiser le champ de contrainte dans cette zone.

### 27.3. DEUXIÈME MODÈLE : COQUES ET POUTRES

Les raidisseurs ont leurs deux dimensions transversales bien plus petites que leur longueur. Ils peuvent être modélisés par des éléments finis de poutre. Le modèle géométrique est plus simple, les fibres neutres des raidisseurs sont positionnées dans le feuillet moyen des éléments de coque qui représentent le plateau pour assurer la bonne connexion des éléments. Elles ne sont donc pas situées au niveau de la fibre neutre physique des raidisseurs. La technique de l'offset permet d'apporter dans la matrice de raideur la correction des termes d'inertie (théorème de Huygens) pour compenser la mauvaise position de la fibre neutre (Figure 27.9), mais sans déplacer la poutre pour le calcul...

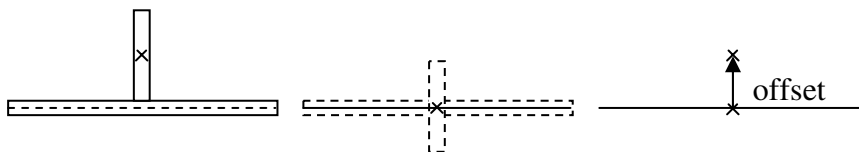


Figure 27.9 : Offset des poutres

L'orientation des axes principaux d'inertie des poutres doit être donnée, ainsi que les propriétés équivalentes de la section ou sa forme et ses dimensions. Le maillage de la structure est représenté sur la figure 27.10. En vue éclatée, on y distingue les poutres dans le plateau supérieur, et le contrôle de leur offset.

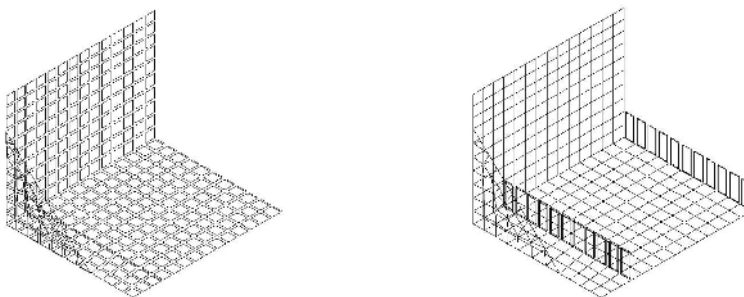


Figure 27.10 : Maillage de la structure avec des poutres

Quand on exploite la symétrie de la structure modélisée avec des coques et des poutres, on coupe des poutres en deux dans leur sens longitudinal. On ne voit

donc plus qu'une poutre de hauteur  $h$ , de demi largeur  $b/2$ , décalée de  $b/2$  par rapport à la position de la fibre neutre décrite (figure 27.11).

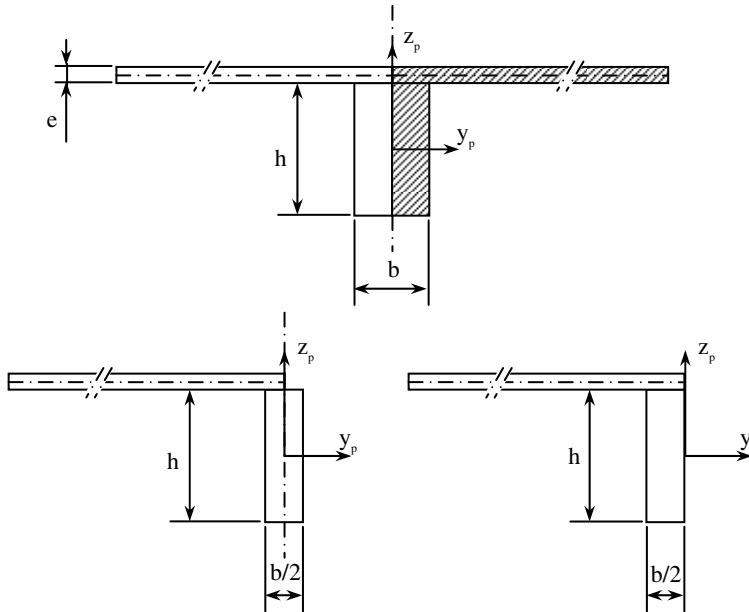


Figure 27.11 : Poutres dans un plan de symétrie

Si on donne à la poutre des dimensions dans la direction  $y_p$  qui sont la moitié de celles du raidisseur, le moment d'inertie  $I_z$  n'est pas bien estimé car il n'est pas égal à la moitié de celui calculé pour le raidisseur complet. D'autre part, ce raidisseur n'est pas correctement placé car sa fibre neutre est dans le plan de symétrie alors qu'elle devrait être décalée dans la direction  $y_p$  de  $b/2$ . Mais en raison de la symétrie, pour tous les nœuds contenus dans le plan de symétrie, il faut éliminer la translation orthogonale à ce plan et les rotations autour des axes contenus dans ce plan, dont la rotation autour de l'axe  $z_p$  de la poutre. Les degrés de liberté  $\theta_z$  étant fixés, l'inertie qui leur est associée n'a aucune influence sur le calcul. Il est donc suffisant de définir une poutre dont les dimensions dans la direction  $y_p$  sont la moitié de celles du raidisseur et éventuellement de la décaler orthogonalement au plan de la coque. Cette remarque est valable si le raidisseur est modélisé par une coque : il suffit que cette dernière ait la moitié de l'épaisseur réelle.

Les déplacements dans chaque direction et leur amplitude sont représentés sur la figure 27.12. Pour ce modèle, c'est le raidisseur latéral qui se déplace le plus en  $x$  (0,057 mm), ce qui est très différent du résultat obtenu avec le modèle ne comportant que des éléments de coque (-72%). C'est la paroi verticale qui se

déplace le plus en  $y$  (0,195 mm), c'est à dire 26% de plus qu'avec le modèle ne comportant que des éléments de coque. Le plateau chargé a le plus grand déplacement en  $z$  (0,469 mm). La plus grande amplitude (0,469 mm) se produit sur le plateau.

En ce qui concerne le déplacement dans la direction  $x$ , la poutre pivote sur son axe, sa rotation est de  $7,64 \times 10^{-3}$  rd. Sa section étant par hypothèse indéformable, sa hauteur étant de 30,75 mm par rapport au feuillet moyen, le déplacement latéral des fibres est  $30,75 \times 7,64 \times 10^{-3}$  soit 0,235 mm. C'est donc bien le raidisseur qui se déplace le plus dans la direction  $x$ , et son déplacement est cohérent avec ce qui avait été obtenu par le modèle coques.

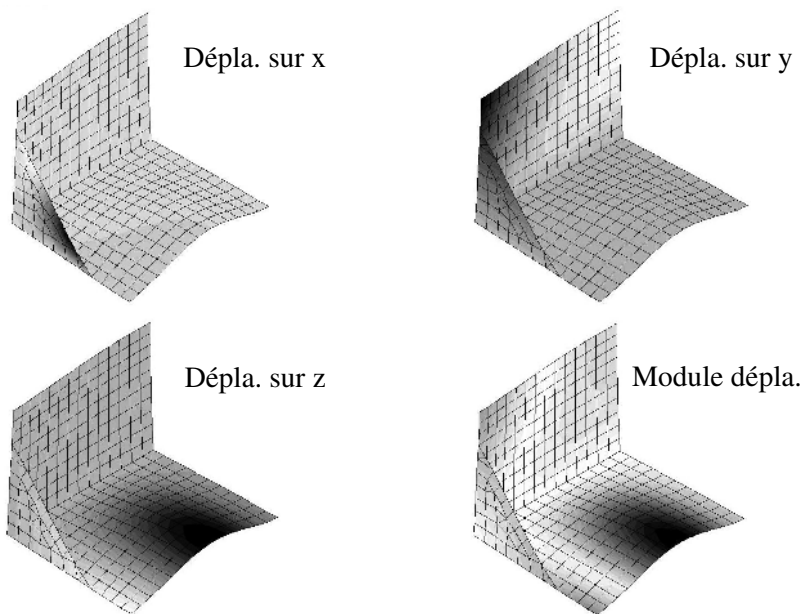


Figure 27.12 : Déplacements de la structure

Le raidisseur a une hauteur de 30 mm, et limite le mouvement de la paroi sur toute cette hauteur. Dans le modèle actuel, la connexion se fait ponctuellement, au point de raccord entre le plateau, la paroi et le raidisseur : la connexion poutre-coque ne rend pas bien compte de la liaison physique. Le déplacement des parois verticales est sur-évalué. En intégrant dans le modèle deux corps rigides de hauteur de 30 mm pour représenter l'interaction raidisseur-paroi (Figure 27.13), le déplacement de la paroi dans la direction  $y$  est de 0,161 mm : on retrouve les résultats du premier modèle.

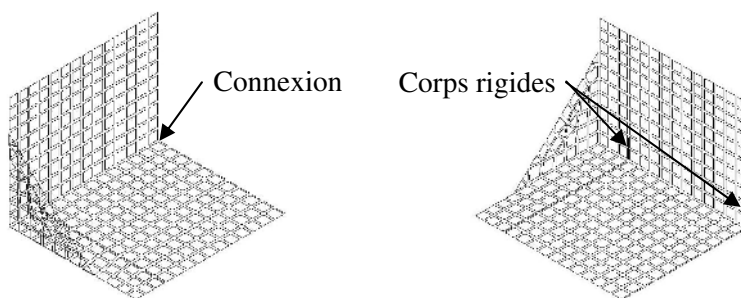


Figure 27.13 : Interaction raidisseurs-paroi verticale

## 27.4. VALIDATION DE L'APPROCHE LINÉAIRE

Sous l'action du chargement, les parois verticales sont soumises à de la compression. Pour valider l'approche linéaire, bien que les déplacements soient petits et que les contraintes soient admissibles, il faut vérifier que la structure ne flambe pas pour un niveau de charge inférieur à celui qui lui est appliqué (700 N). Une analyse de stabilité par l'approche d'Euler (cf. chapitre 26) donne un facteur de charge critique de 12,5 mais par l'approche de Dupuis, le facteur de charge critique est de 1,64 seulement. Les deux modes critiques, de formes très différentes, sont représentés sur la figure 27.14. Il n'est donc pas possible de garantir, par une approche linéaire, que la structure ne flambe pas lorsque la charge évolue graduellement de 0 à 700 N.

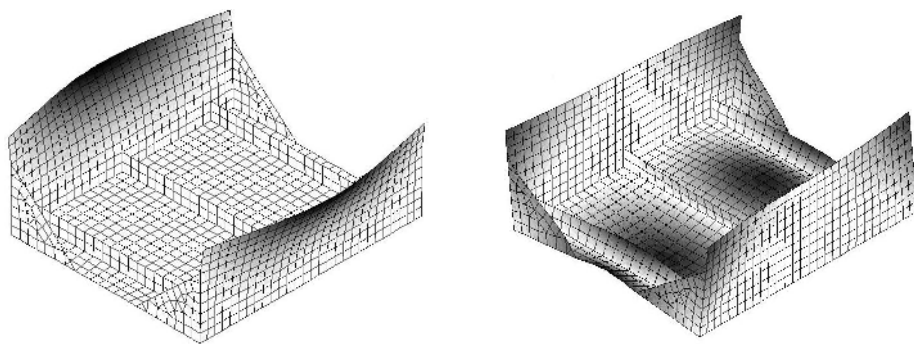


Figure 27.14 : Premier mode critique, approche d'Euler et approche de Dupuis

## 27.5. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

On suppose maintenant que le support est soudé sur un massif indéformable. Le support est soumis à l'action d'une charge uniformément répartie sur le plateau

supérieur de valeur 0,01 MPa. Par rapport au paragraphe 27.2, seules changent les conditions aux limites. L'amplitude des déplacements est de 0,442 mm, les contraintes équivalentes maximales en peau sont de 59,2 MPa (Figure 27.15).

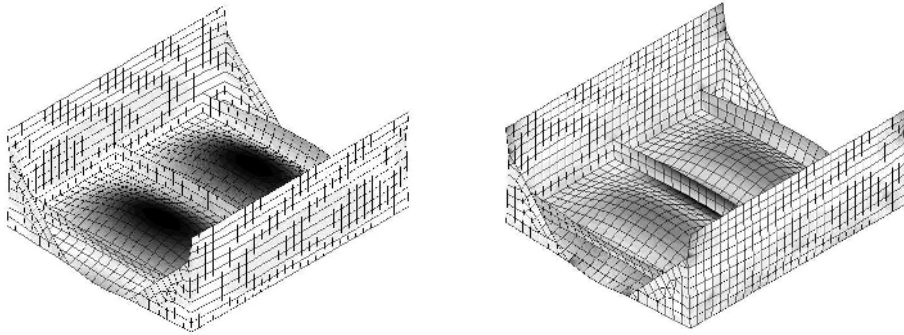


Figure 27.15 : Amplitude des déplacements et contrainte équivalente en peau (20°C)

On souhaite maintenant calculer cette structure lorsqu'elle a une température uniforme de 200°C. A cette température, le module d'élasticité est de 176 GPa, le coefficient de dilatation thermique de  $15.10^{-6} / ^\circ$ . Utilisant l'analogie de Duhamel, le programme travaille avec la structure isotherme à laquelle il applique des charges supplémentaires qui rendent compte de l'effet des dilatations dues à la température. Le plateau a un déplacement vertical de 0,060 mm. L'amplitude des déplacements est de 0,957 mm, la déformée n'a pas du tout la même allure qu'à 20°C. Le module d'élasticité a diminué de 16%, la thermique se traduit par des forces supplémentaires. Les contraintes équivalentes en peau ont une valeur maximale de 1498 MPa (Figure 27.16). Cette valeur est presque 25 fois plus forte qu'à 20°C. L'analyse des résultats montre que les contraintes sont très localisées, dans les angles inférieurs des parois latérales. Sous l'augmentation de température, les parois ont tendance à se dilater et à augmenter de longueur. Mais les conditions aux limites, l'encastrement sur le support, bloquent cette dilatation et génèrent des contraintes de compression pour s'opposer à cette dilatation.

La question qu'il est indispensable de se poser concerne la dilatation du support qui est lui aussi à 200°C. Si le support se dilate lui aussi, les contraintes qu'il exerce sur la structure pour limiter ses dilatations sont moindres. Ce sont les dilatations différentielles qui sont importantes, dues à la différence des coefficients de dilatation thermique des matériaux en présence. On intègre dans le modèle un support de grande rigidité par rapport à celle du support qui y est fixé, le coefficient de dilatation de ce support étant de  $10.10^{-6} / ^\circ$ . Le plateau a un déplacement vertical de 0,077 mm, les bords se soulèvent de 0,540 mm, les

parois un déplacement transversal de 0,540 mm. Les contraintes équivalentes en peau ont une valeur maximale de 430 MPa (Figure 27.17). Elles dépassent la limite élastique mais elles ne sont plus de l'ordre de 1500 MPa. L'objet de ce paragraphe n'est pas l'analyse locale mais de faire prendre conscience que ne pas prendre en compte la dilatation du support conduit à des résultats qui ne reflètent pas la réalité et qui peuvent conduire à de mauvais dimensionnements.

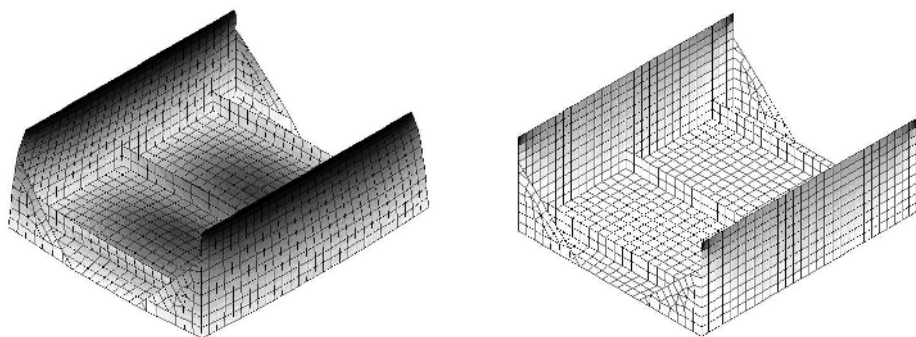


Figure 27.16 : Amplitude des déplacements et contrainte équivalente en peau (200°C)

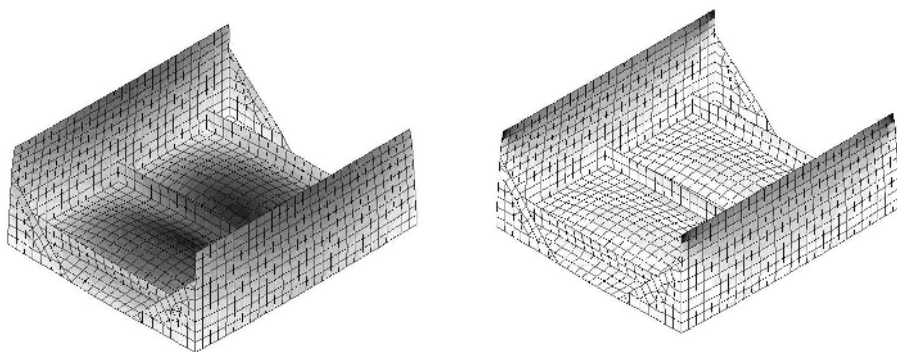


Figure 27.17 : Amplitude des déplacements et contrainte équivalente en peau (200°C) avec dilatation du support

# INDEX

- Accélérations modales, 213
- Ame, 247
- Amortissement de Coulomb, 208
- Amortissement numérique, 217
- Amortissement visqueux, 208
- Amortissements, 181
- Analogie de Duhamel, 166
- Analyse modale, 179
- Analyses fréquentielles, 180
- Analyses temporelles, 180
- Approche cinématique, 27
- Approche de dupuis, 301
- Approche statique, 28
- Assemblage, 57
- Axes locaux, 279
- Axes propres, 57
- Axisymétrie, 18, 145
  
- Barre, 81
- Bases fonctionnelles, 39
- Batoz, 116
- Blocage en cisaillement, 93, 132, 139
  
- Charge centrifuge, 172
- Charge critique, 300
- Charge critique d'Euler, 300
- Chargement thermique, 177
- Charges conservatives, 32
- Charges nodales, 55
- Charges ponctuelles, 55
- Charges réparties, 55
- Cinématiquement admissible, 26
- Clough, 115
- Coefficient de charge critique, 300
- Coefficient de dilatation thermique, 164
- Coefficient de Poisson, 11
- Coefficients d'amortissement généralisé, 209
- Coeur, 247
  
- Collage de maillages, 80
- Collocation par points, 24
- Collocation par sous-domaine, 24
- Complétude, 36
- Condensation, 41
- Conditionnement numérique, 64
- Conditions aux limites, 59
- Conditions cinématiques, 26
- Conditions de planeité, 172
- Conditions statiques, 26
- Connecteurs, 38
- Contact, 141, 175, 264
- Continuité inter-éléments, 35
- Contrainte circonférentielle, 19
- Contrainte équivalente, 14
- Contrainte hydrostatique, 9
- Contrainte normale, 3
- Contraintes de cisaillement, 3
- Contraintes de peau, 140
- Contraintes extrapolées, 76
- Contraintes interlaminaires, 249
- Contraintes moyennes, 75
- Contraintes principales, 8
- Contraintes résiduelles, 168
- Contraintes tangentielles, 3
- Contraintes thermiques, 163
- Contraintes-déformations, 110
- Coordonnées intrinsèques, 44
- Coordonnées généralisées, 26, 37
- Coque axisymétrique, 147
- Coque heterosis, 118
- Coques, 117
- Corps rigide, 281, 290
- Correction de flexibilité résiduelle, 133
- Cote normale initiale, 120
- Couche, 237
- Courbure, 111
- Craig et Bampton, 233
- Critère de Hashin, 242
- Critère de la contrainte maximale, 241



Critère de la déformation maximale, 241

Critère de limite élastique, 14

Critère de rupture, 240

Critère de Tresca, 15

Critère de Tsai-Hill, 241

Critère de Von Mises, 15

Déformation angulaire, 10

Déformation tangentielle, 19

Déformations, 10

Degrés de liberté condensés, 228

Degrés de liberté retenus, 228

Déversement, 305

Direction axiale, 145

Direction radiale, 145

Distorsion angulaire, 10

DKQ, 116

DKT, 116

Drapage, 236

Drilling dof, 118

DSQ, 117

DST, 117

Effet boutonnière, 155

Élancement, 106, 140, 248

Élément isoparamétrique, 45

Élément surcompatible, 114

Éléments conformes, 112

Éléments de contact, 264

Éléments de Lagrange, 42

Éléments de réduction, 125

Éléments de Serendip, 42

Éléments de transition., 147

Éléments non conformes, 112

Énergie cinétique, 187

Énergie de déformation, 32

Équations normales, 209

Estimateurs d'erreur, 79

État de contrainte, 4

État plan de contrainte, 16

État plan de déformation, 17

Excentrement, 134

Excitation d'ensemble, 225

Excitation par les supports, 224

Facette, 2

Facteur de charge, 221

Faisceau des contraintes, 3

Feuillet moyen, 16, 91, 105

Fibre neutre, 81, 125

Flexion inextensionnelle, 107

Flux d'efforts, 92

Fonction d'interpolation, 26, 35

Fonction de forme, 22, 26, 35

Fonctions d'essai, 22

Fonctions tests, 22

Forces d'inerties, 183

Formulation faible, 25

Formulation forte, 22

Formule de Guyan, 229

Formule de Simpson, 48

Formules de Newton-Cotes, 48

Fraeijs de Veubeke, 115

Fréquence propre, 182

Frettage, 263

Frottement dynamique, 208

Frottement sec, 208

Frottement statique, 208

Gap element, 264

Hamad, 117

Hencky, 106

Hexaèdre, 139

Homogénéisation, 237

Hypo-statique, 65

Hypothèse de Basile, 211

Hypothèse de Bernoulli, 130

Hypothèse de Rayleigh, 210

Intégration analytique, 87

Intégration directe, 207

Intégration exacte, 87

Intégration numérique, 46

Intégration réduite, 51, 88

Intensité modale, 209, 234

Isotropes transverses, 238

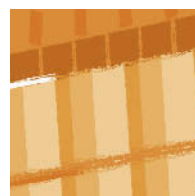
Iters, 201

Jacobien, 46

Kirchhoff (plaques de), 106

- Lamine, 236
- Largeur de bande, 56
- Largeur de front, 56
- Lissage, 76
- Loi constitutive, 11
- Loi de compliance, 237
- Maillages adaptatifs, 78
- Marguerre, 117, 120
- Masse effective, 185
- Masse généralisée, 183
- Masses additionnelles, 225
- Masses ponctuelles, 188
- Mat, 235
- Matériau isotrope, 11
- Matériau orthotrope, 237
- Matériau sandwich, 247
- Matériaux homogènes, 11
- Matériaux incompressibles, 12
- Matrice, 235
- Matrice de connexion, 38
- Matrice de flexibilité dynamique, 198
- Matrice de Hooke, 11
- Matrice de masse, 180
- Matrice de masse cohérente, 187
- Matrice de membrane, 244
- Matrice de raideur, 46
- Matrice de raideur géométrique, 170, 299
- Matrice de raideur initiale, 299
- Matrice de raideur tangente, 169, 299
- Matrice des contraintes, 4, 61
- Matrice des modes constraints, 232
- Matrice d'itération, 198
- Matrice jacobienne, 46
- Membranes axisymétriques, 147
- Méthode de Galerkin, 24
- Méthode de Gauss, 48, 58
- Méthode de Jacobi, 199
- Méthode de la puissance, 200
- Méthode de Lanczos, 203
- Méthode de multi-itération, 202
- Méthode de pénalité, 60, 264
- Méthode de Ritz, 27
- Méthode des déplacements, 57
- Méthode des modes composants, 233
- Méthode des super-éléments, 227
- Méthode directe, 222
- Méthode H, 31
- Méthode P, 31
- Méthodes universelles, 21
- Méthodes variationnelles, 27
- Mindlin (plaques de ), 106
- Mode critique, 300
- Mode rigide, 37, 65, 184
- Modes bulles, 41
- Modes cinématiques parasites, 51, 139
- Modes constraints, 234
- Modes normaux, 234
- Modes propres, 180
- Module de glissement, 11
- Module de Young, 11
- Module d'élasticité, 11
- Moment de flexion, 110
- Moment de torsion, 110
- Moments-courbures, 110
- Morley, 115
- Multiplicateurs de Lagrange, 70, 264
- Offset, 121, 134, 292
- Partie déviatorique, 9
- Patch-test, 53
- Peau inférieure, 121
- Peau supérieure, 121
- Peaux, 247
- Pin-flag, 134
- Pivots, 65
- Pivots négatifs, 70, 176, 204
- Pivots nuls, 205
- Plan méridien, 18, 145
- Plaque, 105
- Plaques d'épaisseur modérée, 106
- Plaques minces, 106
- Pli, 237
- Poids, 23
- Points de Gauss, 49
- Polynômes de Lagrange, 41
- Pourcentage d'amortissement critique, 210
- Poutre, 125
- Poutre de Timoshenko, 131
- Poutres axisymétriques, 147
- Précontrainte, 167
- Pré-imprégnés, 236
- Pression hydrostatique, 296

- Problème aux valeurs propres internes, 231
- Problème d'interaction, 203
- Pulsation propre, 182
- Quotient de Rayleigh, 183
- Raccord homogène, 155
- Raideur généralisée, 183
- Réactions, 59
- Réciprocité des contraintes tangentielles, 6
- Règle de Hammer, 50
- Règle de Radau, 50
- Règle du trapèze, 48
- Reissner, 106
- Relation cinématique, 68
- Renforts, 235
- Repères principaux, 8
- Réponse harmonique, 207, 221
- Réponse transitoire, 207
- Résidus pondérés, 21
- Rigidité flexionnelle, 111
- Rotations de section, 108
- Sandwich, 236
- Schéma de Newmark, 217
- Schéma explicite, 217
- Schéma implicite, 216
- Schéma monopas, 216
- Schéma multi-pas, 216
- Schémas d'intégration, 215
- Sous-structuration, 227
- Sparse solvers, 56
- Stabilité conditionnelle, 219
- Stabilité inconditionnelle, 219
- Stabilité linéaire, 299
- Stratifié, 236
- Stratifié équilibre, 245
- Structures faiblement dissipatives, 181
- Super-élément dynamique, 232
- Superposition modale, 207
- Surface anticlastique, 111
- Surface de plasticité, 14
- Symétrie cyclique, 171
- Symétrie miroir, 244
- Tenseur des contraintes, 4
- Tenseur des déformations, 10
- Tenseur isotrope, 9
- Tenseur sphérique, 9
- Tetraèdres, 138
- Théoreme de Castigliano, 74
- Théoreme des travaux virtuels, 33
- Théorie de Navier, 131
- Tissus, 235
- Translation spectrale, 205
- Troncature de la base modale, 213
- Unidirectionnels, 235
- Valeurs propres, 182
- Variables externes, 38
- Variables internes, 37
- Vecteur contrainte, 3
- Vecteur des degrés de liberté, 38
- Vibrations libres, 180
- Voilement, 305
- Volume torique, 146
- Zoom structural, 78, 157



Jean-Charles Craveur

# MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS FINIS

Cet ouvrage s'adresse aux élèves d'écoles d'ingénieurs et aux étudiants de Masters scientifiques.

Le calcul de structures par éléments finis est une discipline relativement récente qui mêle étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique, d'où sa complexité apparente.

**Cette nouvelle édition**, entièrement refondue, répond aux difficultés que l'élève ingénieur et l'utilisateur de logiciels de CAO découvrent lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis. Elle comporte quatre parties. La première est un **rappel des notions** de mécanique et de théorie des éléments finis. La deuxième est une présentation actualisée des **différents types d'éléments finis** avec pour chacun leurs avantages et leurs inconvénients. La troisième partie présente les **pièges à éviter** dans les modélisations (éléments incompatibles, matériaux composites...). Enfin la dernière partie est une **étude des problèmes de dynamique linéaire** : analyse modale et réponses transitoires et harmoniques.

Des **exemples**, des **exercices corrigés** ainsi que des **applications** renforcent la dimension concrète de l'ouvrage et des **problèmes** types avec leurs solutions sont présentés en fin d'ouvrage.

JEAN-CHARLES  
CRAVEUREnseigne à l'Institut  
Supérieur des Matériaux  
du Mans

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

LICENCE	MASTER	DOCTORAT
1	2	3
4	5	6
7	8	

