

ANÁLISIS DEL PLANO DE FASE

Ing. Raúl R. Roque Y.
Carrera de Ingeniería Electrónica
Facultad de Ingeniería
Universidad Mayor de San Andrés

INDICE

1.1	Introducción
1.2	Conceptos de análisis de plano de fase
1.2.1	Retraso de Fase
1.2.2	Puntos Singulares
1.2.3	Simetría del plano de fase
1.3	Construcción del plano de fase
1.4	Análisis del plano de fase de sistemas lineales
1.5	Análisis del plano de fase de sistema no lineales
1.5.1	Comportamiento local de sistema no lineales
1.5.2	Ciclos Límite
1.5.3	Existencia de los ciclo límite
1.6	Casos de Estudio
1.7	Ejercicios Propuestos
1.8	Bibliografía

1.1 INTRODUCCION

El análisis del plano de fase es un método gráfico que estudia el comportamiento de sistemas de segundo orden (ecuaciones diferenciales de segundo orden). Fue introducido por el matemático Henry Poncairé. La idea básica del método se genera dentro del espacio de estados de un sistema dinámico de segundo orden, movimiento de las trayectorias correspondientes a distintas condiciones iniciales y de esta manera examinar las cualidades mostradas por las trayectorias. Dentro de este marco, existe información acerca de la estabilidad y otros como las trayectorias cuando se tiene variación en los parámetros del sistema dinámico.

El análisis del plano de fase tiene propiedades bastante útiles. Primero, permite visualizar el comportamiento del sistema de segundo orden para distintas condiciones iniciales sin tener que resolver analíticamente la ecuación diferencial del sistema. Segundo, es aplicable a sistemas dinámicos de tipo lineal y no lineal. Es decir, podemos utilizar, por ejemplo, el análisis del plano de fase a un circuito RLC con sus elementos lineales, como otro que tenga el elemento L de tipo no lineal.

Finalmente, algunos sistemas de control pueden ser adecuados de forma aproximada a sistemas de segundo orden.

Contrariamente, por supuesto, la desventaja fundamental del método es la restricción a sistema de segundo orden, debido a que el estudio de sistema de mayor orden a dos, se hace computacionalmente y geoméricamente más complejo

1.2 CONCEPTOS DEL ANALISIS DEL PLANO DE FASE

1.2.1 Retrato de Fase

El método en cuestión está involucrado en el estudio gráfico del sistema de segundo orden descrito por:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (1,a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (1,b)$$

donde x_1 y x_2 son los estados del sistema y f_1 , f_2 son funciones no lineales de los estados. Geométricamente, el espacio de estado del sistema es un plano que tiene a x_1 y x_2 como coordenadas. Se llama a este *plano de fase*.

Dando un conjunto de condiciones iniciales $x(0) = x_0$, las ecuaciones (2.1,a) y (2.1.b) definen una determinada solución $x(t)$ (vector). Con la variación del tiempo dentro un intervalo deseado, la solución $x(t)$ pueden ser representado geoméricamente como una curva en el plano de fase, tal curva se la conoce como *trayectoria del plano de fase*.

Para distintos conjuntos de condiciones iniciales se generará entonces una familia de trayectoria de fase, dicha familia se la conoce como *retrato de fase* del sistema. Considérese el siguiente ejemplo para ilustrar el concepto de retrato de fase.

Ejemplo 1.1 Retrato de fase del sistema masa-resorte

La ecuación que gobierna el sistema masa-resorte de la figura 1, es una ecuación de segundo orden muy familiar

$$m\ddot{x} + kx = 0;$$

se asume que la masa se encuentra inicialmente detenida en la posición x_0 , entonces la solución del ecuación es:

$$x(t) = x_0 \cos(t); \dot{x}(t) = -x_0 \sin(t)$$

eliminando el tiempo t , para las ecuaciones anteriores utilizando propiedades trigonométricas, se obtiene la ecuación de trayectorias :

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2;$$

que representa el lugar geométrico de una circunferencia con centro en el origen en el plano de fase. Para distintas condiciones iniciales se obtiene un círculo de diferente radio.

Trazando estas trayectorias en el plano de fase se obtiene el siguiente retrato de fase

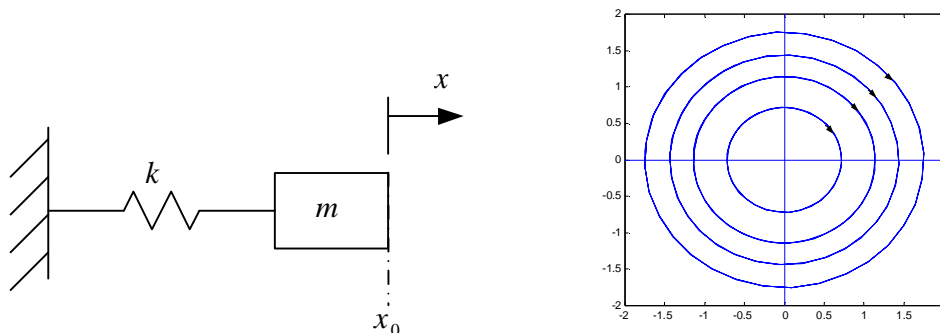


Fig 1. Sistema masa resorte a) Físico. b) retrato de fase

Una vez que se obtiene el retrato de fase, se obtiene la respuesta natural del sistema correspondiente a varias condiciones iniciales. En el ejemplo, se observa que ninguna de las trayectorias converge al

origen, ni divergen al infinito. Los círculos alrededor del origen indican la naturaleza de estabilidad marginal del sistema. VVV

Una clase de sistema de segundo orden puede ser descrita de la forma:

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}) = 0; \quad (1.2)$$

y en el espacio de estados puede ser representada como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1, x_2) \end{aligned};$$

con $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$ como vectores de estado. Muchos de los sistema de segundo orden en la práctica, tales como el sistema masa-resorte-amortiguador en la mecánica, el sistema resistencia-bobina-capacitor RLC en eléctrica, pueden ser representados en o transformados en esta forma. Tradicionalmente el método del plano de fase está desarrollado para sistema de la forma (3), donde el plano de fase tiene como coordenadas a x y \dot{x} . Lo que no implica la no posibilidad de extender el método para dinámicas más complejas y generales de la forma (1).

1.2.2 Puntos Singulares.

Un importante concepto dentro el análisis del plano de fase es el punto singular. Un punto singular es un punto de equilibrio en el plano de fase. Un punto de equilibrio esta definido como aquel donde el vector de estados puede quedarse o permanecer durante todo el tiempo; esto implicaría que la dinámica del sistema (1) sea nula es decir que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = 0 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}; \quad (4)$$

luego los puntos de equilibrio se determinan resolviendo el conjunto de ecuaciones (4).

Para un sistema lineal, existe usualmente sólo un punto de equilibrio, aunque en algunos casos puede haber un conjunto continuo de puntos singulares, tal como el sistema $\dot{x} = \dot{x} = 0$, es este caso se tiene un conjunto de puntos singulares. No obstante un sistema no lineal a menudo tiene más de un punto singular aislado, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2: Sistema no lineal de segundo orden.

Considere el sistema

$$\dot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0;$$

El sistema tiene dos puntos singulares uno en (0,0) y el otro en (-3,0). El movimiento de las trayectorias del sistema en la vecindad de los puntos singulares tienen naturalezas diferentes. Pues algunas de las trayectorias que se mueven hacia el punto (0,0); mientras que otras trayectorias se alejan de (-3,0).

El retrato de fase del sistema se presenta en la figura (2).

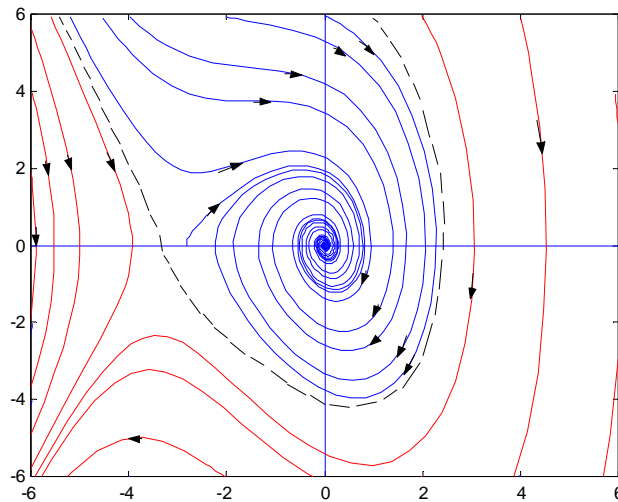


Fig. 2 Retrato de fase del sistema ejemplo 1.2

Uno puede preguntarse entonces, porqué el punto de equilibrio del sistema de segundo orden es llamado punto singular. La respuesta esta en examinar la tendencia de las trayectorias de fase. De la ecuación (1), la pendiente de la trayectoria de fase que pasa por el punto (x_1, x_2) es dada por:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}; \quad (5)$$

entonces queda que usualmente existe un valor definido para estas pendientes en todo punto del plano de fase. Esto implica que las trayectorias de fase no se intersectan. En cambio en un punto singular, el valor de la pendiente es indeterminada pues ocurre $0/0$. Muchas de las trayectorias pueden intersectarse en tales puntos como se ve en la figura (2). Esta indeterminación en la pendiente justifica el adjetivo de punto singular. Los puntos singulares son una característica muy importante en el plano de fase. Examinando los puntos singulares puede relevarse información de las propiedades de un sistema. En efecto, la estabilidad de sistemas lineales, está caracterizada únicamente por la naturaleza de sus puntos singulares. En el caso del ejemplo anterior, claramente se identifica un área donde prevalece la convergencia del sistema. Para los sistemas no lineales, además de los puntos singulares, puede existir muchas características complejas, tales como ciclos limite.

Note que aunque el método del plano de fase fue desarrollado primeramente para sistema de segundo orden, este también puede ser aplicado al análisis de sistema de primer orden de la forma:

$$\dot{x} + f(x) = 0;$$

La idea es un trazado de \dot{x} con respecto a x , en el plano de fase, la diferencia ahora es que el retrato de fase está compuesto de una sola trayectoria.

Ejemplo 1.3 : Sistema de primer orden.

Considere el sistema

$$\dot{x} = -4x + x^3;$$

aquí son tres los puntos singulares, determinados por $-4x + x^3 = 0$, lo que da $x = 0, -2, 2$. El retrato de fase del sistema consiste de una sola trayectoria y esta se muestra en la figura 3.

Las flechas indican la dirección del movimiento. Del retrato de fase se observa que el punto de equilibrio $x = 0$ es estable, mientras que los otros son inestables.

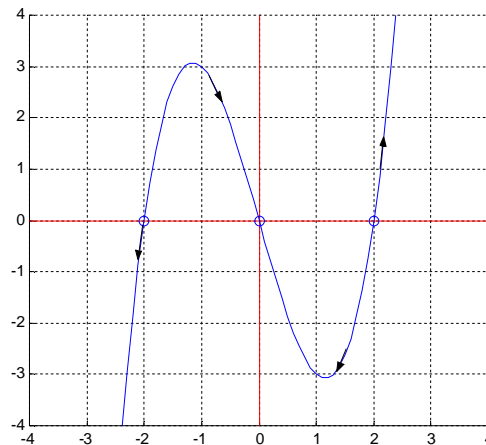


Fig.3 Plano de fase del sistema de primer orden

1.2.3 Simetría del Retrato de Fase

Un retrato de fase puede tener a priori propiedades de simetrías conocidas, lo cual simplifica su generación y estudio. Si el retrato de fase es simétrico respecto al eje x_1 o al eje x_2 , uno solamente necesita estudiar la mitad del plano de fase. Aun mejor si el retrato de fase es simétrico a ambos ejes, el estudio se reduce solo a la cuarta parte.

Antes de generar el retrato de fase, es posible determinar las propiedades de simetría del sistema mediante un análisis del sistema de ecuaciones.

Considérese el sistema de segundo orden (1.3), la pendiente de las trayectorias del plano de fase tiene la forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{f(x_1, x_2)}{x_2};$$

ya que la simetría del retrato de fase implica la simetría de las pendientes, es posible identificar las siguientes situaciones.

Simetría alrededor del Eje x_1 . Para que se cumpla la condición es:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -x_2);$$

Esto implica que la función f debe ser par en x_2 , por ejemplo el sistema masa-resorte presentado en el ejemplo 1.1 satisface esta condición y claramente se observa la simetría alrededor del eje x_1 .

Simetría alrededor del eje x_2 . Para que exista se debe cumplir con:

$$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, x_2);$$

lo que implica simetría con respecto al eje x_2 . El sistema masa-resorte también satisface esta condición.

Simetría alrededor del origen. Cuando se cumple:

$$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, -x_2);$$

luego el retrato de fase del sistema es simétrico alrededor del origen.

1.3 CONSTRUCCION DEL RETRATO DE FASE

En la actualidad los retratos de fase son generados apartir de programas computacionales tales como scripts de Matlab o MathCad por mencionar algunos. Se tiene diferentes métodos para la construcción del retrato de fase, los cuales no serán abordados en el presente reporte por salir de fuera de los objetivos deseados.

Un script en Matlab que genera el retrato de fase es el siguiente

```
% Este script genera el retrato de fase de un sistema de segundo orden
% La representacion del sistema se la realiza en la función myecu.m
% Fuente: M. Zak
```

```
T0=0;
Tf=20;
Tspan=Tf-T0;
a = 4;
m = -a:0.1:a;
s1 = 1;
n = -s1*m;
x0= [-a -a];
button =1;
p = a*[-1 0;1 0];
clf;
plot(p(:,1),p(:,2));
hold on;
plot(m,n);
plot(p(:,2),p(:,1));

axis(a*[-1 1 -1 1]);
while (button ==1)
    [t,x]= ode45('myecu',Tspan,x0)
    plot(x(:,1),x(:,2))
    [x1,x2,button]=ginput(1);
    x0=[x1,x2];
end
```

las ecuaciones dinámicas del sistema se deben introducir en un m-file definido como:

```
function dy = myecu(t,y)
dy = zeros(2,1); % a column vector
dy(1) = y(2);
dy(2) = y(1);
```

Como ejemplo de aplicación de dichos acript se analiza el siguiente ejemplo

Ejemplo: Sistema de control de un Satélite

La figura 2.4 muestra el sistema de lazo cerrado capaz de realizar el control para un sistema de satélite modelado de forma simple.

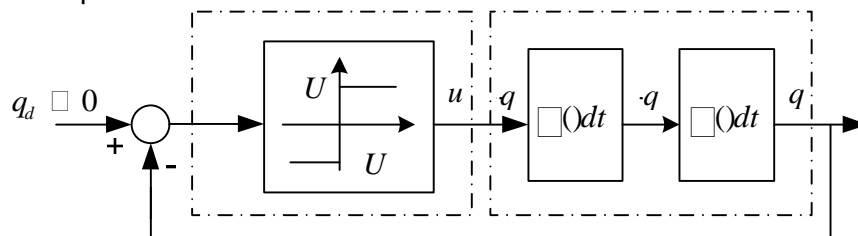


Fig. 4 Sistema de control de Satélite

El satélite representado en la figura 1.5.a, es simplemente una unidad rotacional con inercia, controlada por un par de propulsores, los cuales proporcionan al sistema un torque constante positivo.

El propósito del sistema de control es mantener el ángulo de la antena del satélite mediante la expulsión de gases de los propulsores.

El modelo matemático del sistema en lazo abierto es:

$$\ddot{\theta}(t) = u ;$$

Donde u es el torque generado por los propulsores y q es el ángulo de rotación del satélite. Examine el comportamiento del plano de fase del sistema de control, donde los propulsores son controlados por la ley

$$u(t) = \begin{cases} -U & \text{para } q > 0 \\ U & \text{para } q < 0 \end{cases};$$

Entonces el satélite se ve impulsado de forma rotacional en el sentido de las agujas de reloj cuando q es positivo y viceversa.

En primera instancia se obtiene la respuesta del sistema para cada una de los posibles valores de la entrada u , las mismas se encuentran en la figura(¿?) , se ve claramente que dichas respuestas son divergentes.

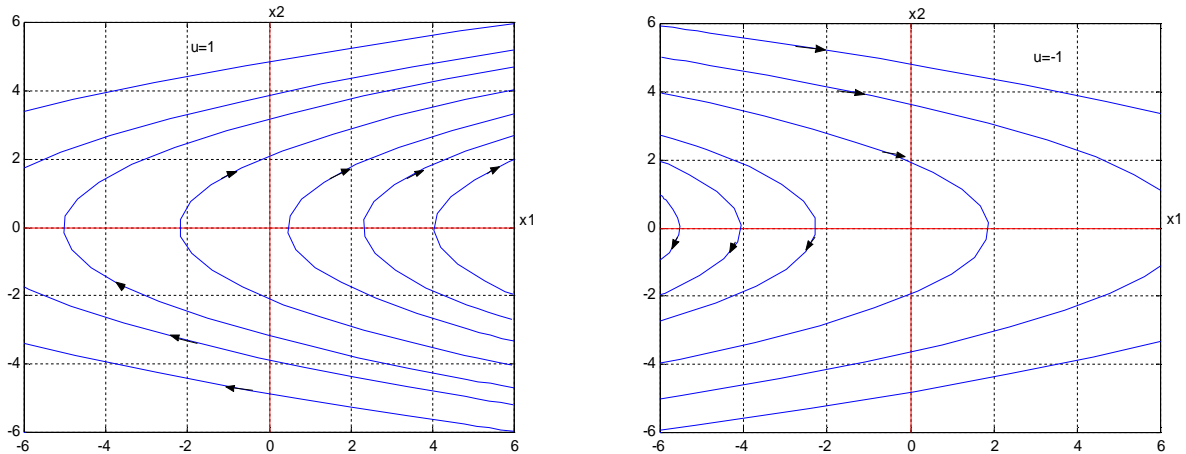


Fig. 5 Respuesta para cada uno de los tipos de señal de control.

Cuando se aplica la entrada de control de tipo conmutante, el resultado esta dado por la unión de cada una de las trayectorias, en la figura se muestra esta característica de manera que el sistema queda oscilando en una orbita, la misma que depende de las condiciones iniciales del sistema. Podemos decir que el sistema conmuta en el eje vertical

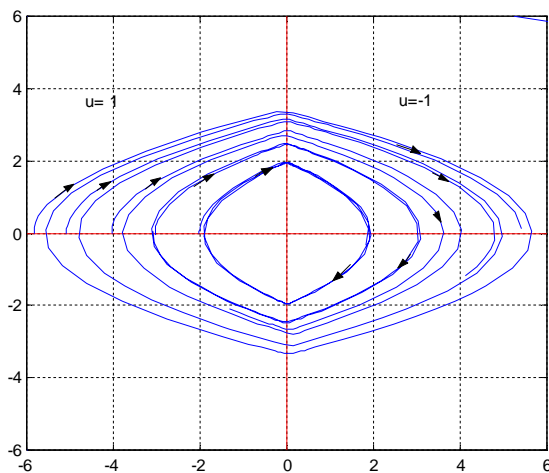


Fig. 6 Respuesta de sistema de satélite mediante la entrada de control propuesta.

1.4 ANALISIS DEL PLANO DE FASE PARA SISTEMAS LINEALES

En esta sección describiremos el análisis del plano de fase para sistemas lineales, además de permitirnos observar visualmente el patrón de movimiento de los sistemas lineales, también nos ayudará al desarrollo del análisis de sistemas no lineales, esto debido a que los sistemas no lineales se comportan similarmente a los sistemas lineales alrededor de cada punto singular o de equilibrio.

La forma general de un sistema de segundo orden es:

$$\dot{x} = Ax; \quad x \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2};$$

Aplicando una transformación de semejanza $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ de A , es decir

$$T^{-1}AT = J;$$

Donde J es conocida como la forma de Jordan, entonces se tiene los siguientes casos:

i) Cuando A tiene dos autovalores distintos reales, es decir λ_1 y λ_2 por lo tanto es diagonalizable, luego la forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$$

ii) Cuando A tiene autovalores repetidos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, por lo tanto no es diagonalizable, la forma de Jordan es dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

iii) Cuando A tiene autovalores complejos $\lambda_1 = a + jb$ y $\lambda_2 = a - jb$, la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

Definamos la matriz de transformación de semejanza T , entonces para caso se tiene

i) Dado que A tiene dos autovalores distintos reales λ_1 y λ_2 , cada uno tiene asociado un autovector v_1 y v_2 respectivamente: es decir

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix};$$

Por lo tanto

$$T = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ii) El autovalor asociado $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tiene el autovector v y define un autovector generalizado u , como sigue:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Au &= \lambda u + v \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda v & \lambda u + v \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda & 0 \\ | & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$T = \begin{pmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

iii) Cuando A tiene autovalores complejos $\lambda_1 = a + jb$ y $\lambda_2 = a - jb$, tienen asociados los autovectores $v_1 = u + jv$ y $v_2 = u - jv$, entonces

$$\begin{aligned} A(u + jv) &= (a + jb)(u + jv) \\ A(u - jv) &= (a - jb)(u - jv) \end{aligned} ;$$

La parte real es $Au = au - bv$ y la parte imaginaria $Au = bu + av$ por lo tanto

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au - bv \\ bu + av \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$T = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Luego podemos transformar el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, a la forma canónica de Jordan usando la transformación de coordenadas $z = T^{-1}x$ y sigue

$$\dot{z} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}Ax = T^{-1}ATz = Jz ;$$

Ahora las trayectorias en la vecindad de una singularidad pueden mostrar características bastante diferentes, dependiendo de los autovalores de la matriz A como lo veremos a continuación. Podemos hacer una separación de casos de la siguiente manera, esto con fin didáctico:

- i) Las raíces λ_1 y λ_2 son ambos reales y tiene el mismo signo
- ii) Las raíces λ_1 y λ_2 son ambos reales pero tienen diferentes signos
- iii) Las raíces λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real distinta de cero
- iv) Las raíces λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real nula.

A continuación se realiza el análisis de cada uno de los casos.

i) Nodo Estable o Inestable: Las raíces λ_1 y λ_2 son ambos reales y tiene el mismo signo

Un nodo puede ser inestable o estable. De este modo si los autovalores son negativos, el punto singular o punto de equilibrio es llamado nodo estable ya que ambos estados x_1 y x_2 convergen exponencialmente a cero.

Si ambos autovalores son positivos, el punto singular es llamado nodo inestable, debido a que ambos estados divergen exponencialmente.

Dado que los autovalores son reales, no existe trayectorias oscilatorias.

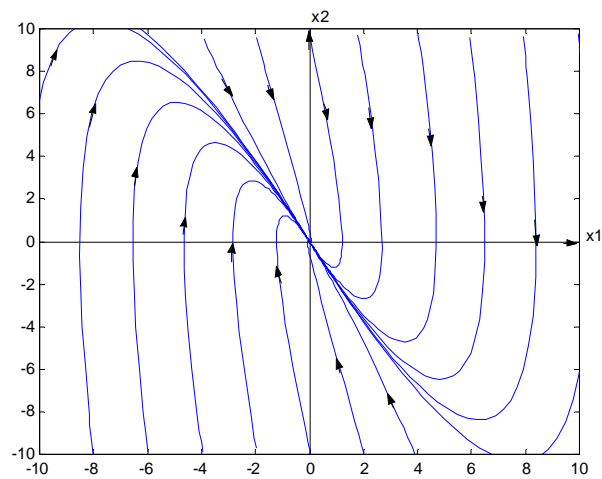
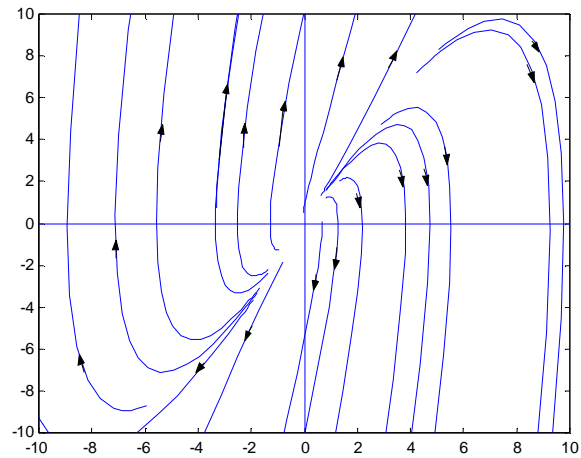


Fig. 7 Plano de Fase a) Nodo Inestable. b) Nodo Estable

ii) **Punto Silla: Las raíces l_1 y l_2 son ambos reales pero tienen diferentes signos**

Como segundo caso se presenta el denominado punto silla. El retrato de fase tiene un comportamiento interesante, esto se debe al polo (raíz del polinomio característico) l_2 inestable, por lo tanto casi todas las trayectorias del sistema divergen al infinito.

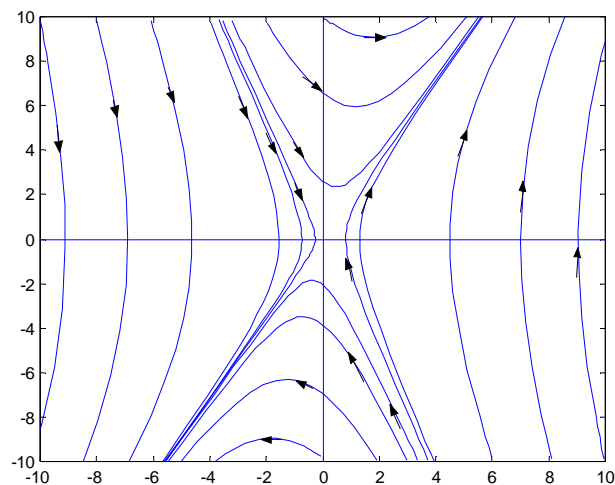


Fig. 8 Plano de Fase: punto silla

iii) **Foco estable e inestable: Las raíces λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real no nula.**

Este caso corresponde a un foco, Un foco estable ocurre cuando la parte real de los autovalores son negativos, lo cual implica que el vector de estados converge a cero. Las trayectorias del sistema en la vecindad del foco estable son representadas en la figura. Note que la trayectoria rodea al origen una o mas veces antes de converger a el, a diferencia de un nodo estable. Si la parte real de los autovalores es positiva entonces, el vector de estados divergen al infinito y los puntos singulares son llamados Focos inestable. Las trayectorias correspondientes a focos inestables son mostrados en la figura

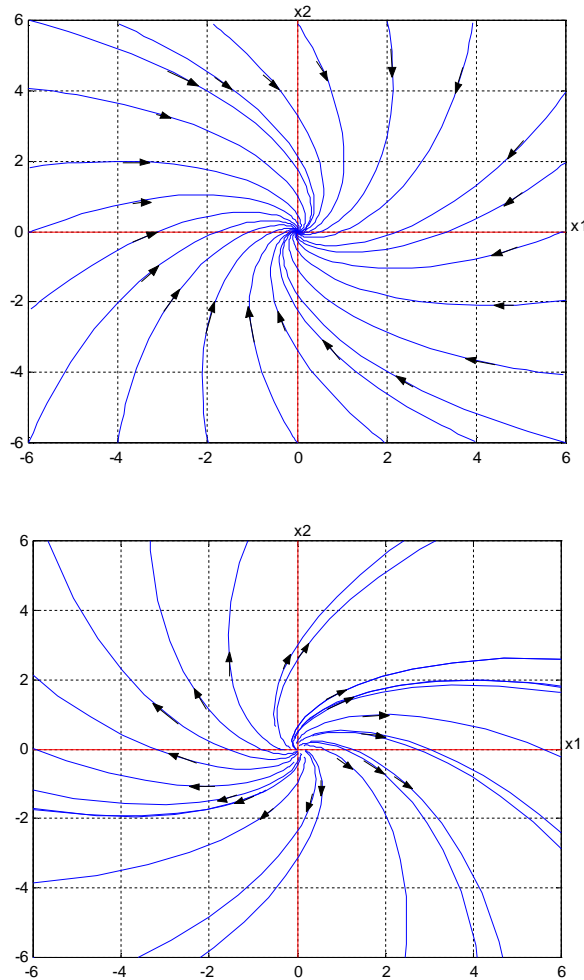


Fig. 9 Planote fase: a) Nodo estable. b) Nodo inestable

iv) **Centros: Las raíces λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real nula.**

El ultimo caso corresponde a centros, como lo muestra la figura . El nombre viene del hecho de que todas las trayectorias son elipses y los puntos singulares son el centro de las elipses. El retrado de fase del sistema masa-resorte no amortiguado pertenece a este tipo .

Note que la característica de estabilidad de sistemas lineales, es únicamente determinado por la naturaleza de sus puntos singulares. Sin embargo lo último no se cumple para sistemas no lineales

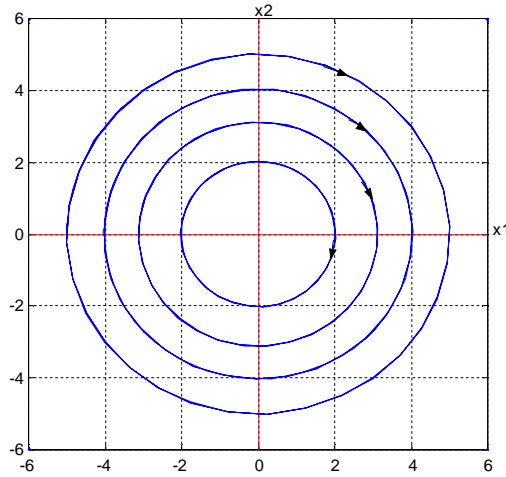


Fig. 10 Plano de fase: centros

1.5 ANALISIS DEL PLANO DE FASE DE SISTEMA NO LINEALES

Para el caso de sistemas dinámicos no lineales, se deben tener los siguientes puntos en mente:

El análisis del plano de fase de sistema no lineales, está relacionado a los sistemas lineales, debido a que el comportamiento de un sistema no lineal puede ser aproximado por el comportamiento de un sistema lineal. Aún los sistemas no lineales pueden desplegar patrones de mucha complejidad, tales como múltiples puntos de equilibrio y ciclos limite por ejemplo. A continuación se discute en detalle cada uno de los anteriores patrones.

1.5.1 Comportamiento Local de sistemas no lineales

En el retrato de fase de la figura 2, se puede observar claramente que en contraste a los sistemas lineales hay dos puntos singulares (puntos de equilibrio) $(0,0)$ y $(-3,0)$. Sin embargo también notamos que las características del plano de fase en las vecindades de ambos puntos son propias de sistema lineales, el primero corresponde a un foco estable y el segundo a un punto silla. Esta similitud entre sistemas lineales y no lineales en una región local en una vecindad del punto singular, puede ser formalizada mediante la técnica de linealización del sistema no lineal.

Si el punto singular de interés no es el origen, por definición la diferencia entre el estado original y el punto singular es un nuevo conjunto de variables de estado, tal que siempre sea posible desplazar el punto singular al origen. Por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos simplemente considerar el punto singular en el origen. Utilizando la expansión en series de Taylor las ecuaciones (2.1.a) y (2.1.b) pueden ser escritas como:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + g_1(x_1, x_2);$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + g_2(x_1, x_2);$$

Donde el origen $g_1(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$ contienen términos de alto orden, que pueden ser despreciados y por lo tanto las trayectorias del sistema no lineal satisfacen esencialmente la ecuación lineal

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2;$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2;$$

Como resultado, el comportamiento local dentro una vecindad de los puntos singulares de un sistema no lineal puede ser aproximado por los patrones de sistema desarrollados anteriormente.

A continuación realizaremos la formalización matemática de la linealización de sistemas no lineales de manera de por lo menos localmente poder comparar el comportamiento del sistema no lineal utilizando los resultados obtenidos para sistema lineales.

Sea un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2);$$

Se define un punto de equilibrio aislado $x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$ y este cumple con la relación

$$f_1(x_{10}, x_{20}) = 0;$$

$$f_2(x_{10}, x_{20}) = 0;;$$

entonces alrededor de ese punto de equilibrio aislado existe una vecindad de radio δ que no contiene otro punto de equilibrio dentro de la misma, esto es

entonces para el sistema (1), se tiene una aproximación de la forma $\dot{x} = Ax$, en donde

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x=x_0}$$

Ahora, se plantea una pregunta bastante interesante, bajo que condiciones el sistema lineal obtenido, mostrara las características del sistema no lineal?. Para responder esta pregunta se utiliza el siguiente teorema

Teorema Hartman-Grobman

Si los autovalores del sistema linealizado no tienen términos imaginarios, entonces alrededor de la vecindad de radio δ , existe un mapeo continuo h con una inversa también continua, esto es

$$h : B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tomando las trayectorias del sistema no lineal sobre las trayectorias del sistema linealizado.

Esto quiere decir que las propiedades cualitativas del sistema no lineal en la vecindad alrededor del punto singular (equilibrio) son determinados por su sistema linealizado, cuando los autovalores no presentan términos imaginarios.

1.5.2 Ciclos Límite

Sea el retrato de fase de la ecuación no lineal de Vander Pol, mostrada en la figura se puede observar que el sistema tiene un nodo inestable en el origen. Lo que es más, se tiene una curva cerrada en tal plano de fase. Todas las trayectorias dentro y fuera de esta curva convergen hacia ella. Mientras que un movimiento iniciado en ella, permanecerá en dicha curva indefinidamente, es decir quedara circulando periódicamente alrededor del origen. La característica que da esta trayectoria es denominada *ciclo limite*.

Los ciclo límite son características únicas de los sistemas no lineales. En el plano de fase, un ciclo límite esta definido como una trayectoria cerrada y aislada. La trayectoria del sistema tiene que ser cerrada indicando la naturaleza periódica del movimiento y aislada indicando la naturaleza del ciclo limite (trayectorias cercanas convergentes o divergentes a la misma).

Dependiendo del patrón de movimiento de las trayectorias del sistema en las vecindades del ciclo límite se pueden distinguir tres tipos de ciclo límite:

i) Ciclo Limite estable: es cuando todas las trayectorias del sistema en las vecindades del ciclo límite convergen a el, cuando $t \rightarrow \infty$; como se muestra en la figura

ii) Ciclo Límite Inestable: es cuando todas las trayectorias en la vecindad divergen de el, cuando $t \rightarrow \infty$; como se muestra en la figura

iii) Ciclo Límite Semi-Estable: es cuando algunas trayectorias en la vecindad convergen a el, mientras que otras divergen de el cuando $t \rightarrow \infty$, como se muestra en la figura

Como se ve en la figura el ciclo límite de la ecuación de Vander Pol es claramente estable. Consideremos algunos ejemplos de ciclos límites estables, inestables y semi-estables.

Ejemplo: Considere los siguientes sistemas dinámicos no lineales

$$\begin{aligned} \text{a) } \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned}$$

Resolvemos de forma analítica a), se realiza por la naturaleza del sistema un cambio a coordenadas polares:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad q = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

Entonces por simple derivación y reemplazo de las variables se tiene

$$\frac{dr}{dt} = -r(r^2 - 1);$$

$$\frac{dq}{dt} = -1;$$

por cuadratura simple la solución del sistema es:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + k_0 e^{-2t}}}; \quad k_0 = \frac{1}{r^2(0)} - 1$$

$$q = q(0) - t;$$

Por lo tanto el ciclo límite es estable. Ahora verifiquemos gráficamente dicha veracidad.

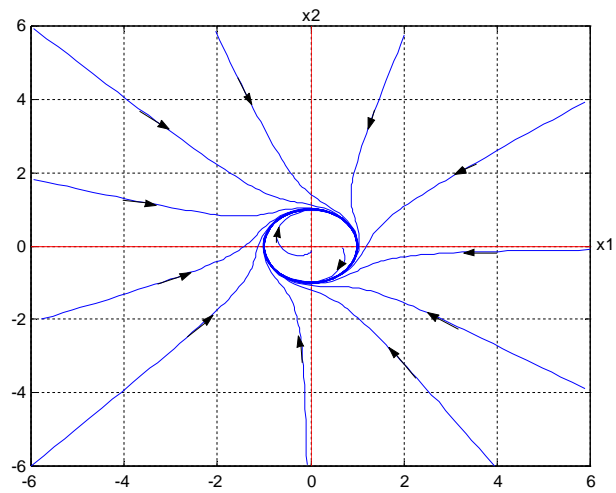


Fig. 11 Ciclo límite estable

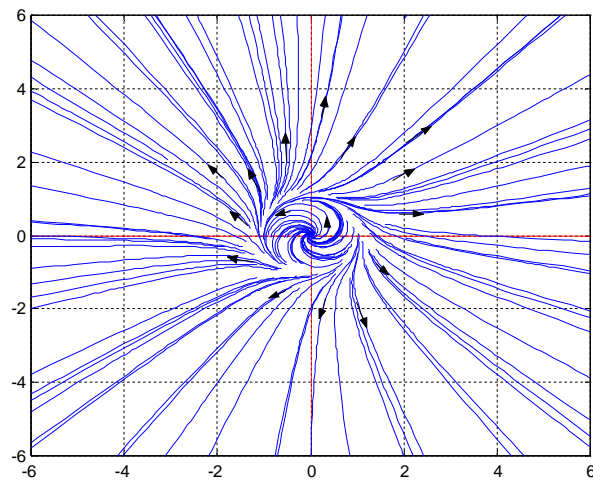


Fig. 12 Ciclo límite inestable

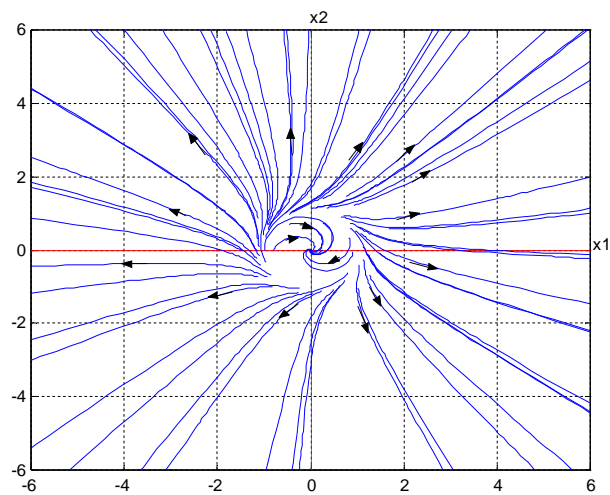


Fig. 13 Ciclo límite semi-estable

1.5.3 Existencia del ciclo límite

Es de mucha importancia predecir la existencia de ciclos límites en los sistemas de control. En esta sección se presenta tres clásicos teoremas para tal efecto. Estos teoremas son fáciles de entender a aplicar.

El primer teorema a ser presentado revela una simple relación entre la existencia de un ciclo límite y el número de puntos singulares rodeados.

En el establecimiento del teorema se utilizara N que representa el número de nodos, centros y focos alrededor de un ciclo límite y S representa el número de punto sillas encerrados por el.

Teorema 1 (Poncaire)

Si un ciclo límite existe en un sistema autónomo de segundo orden entonces se cumple $N = S + 1$

Este teorema es también llamado Teorema del Índice, la prueba de este es matemáticamente complejo (se utiliza herramientas de topología algebraica) y será omitido por ir fuera de los objetivos de este material. Una ingerencia simple de este teorema es que el ciclo límite debe rodear al menos un punto de equilibrio.

Teorema 2 (Poncaire-Bendixson) Sea una trayectoria del sistema autónomo de segundo orden continua en una región W , entonces uno de las siguientes premisas es verdad:

- i) La trayectoria va hacia un punto de equilibrio.
- ii) La trayectoria tiende a un ciclo límite asintóticamente estable.
- iii) La propia trayectoria es un ciclo límite.

El tercer teorema da una condición suficiente para la no existencia de ciclos límite.

Teorema 3 (Bendixson) Para el sistema no lineal (1), no puede existir un ciclo límite en una región W del plano de fase, en el cual $\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2}$ no desaparece y no cambia de signo.

Prueba.- Se probara el teorema por contradicción. Utilizando el Teorema de Green, de la ecuación (5) se tiene

$$f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0; (2.15)$$

Que satisface cualquier trayectoria del sistema, incluyendo claro esta el ciclo límite, por consiguiente a lo largo de la curva cerrada L de un ciclo límite

$$\oint_L (f_2 dx_1 - f_1 dx_2) = 0; (2.16)$$

Usando el teorema de Store obtenemos

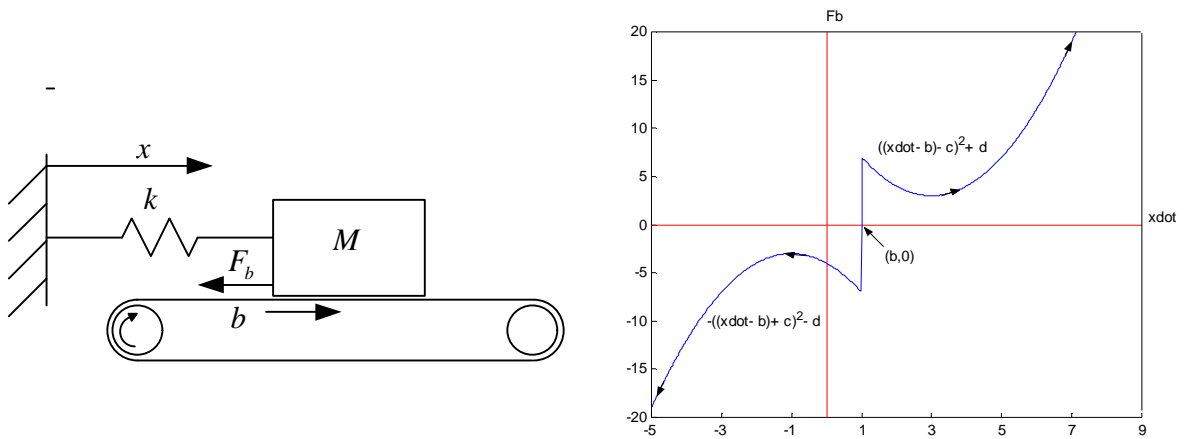
$$\oint_L (f_2 dx_1 - f_1 dx_2) = \iint_R \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 = 0; (2.17)$$

Donde la integración del lado derecho es llevada sobre un área cerrada por el ciclo límite. Para la ecuación (2.17) el lado izquierdo debe ser igual a cero. Esto sin embargo contradice el hecho de que el lado derecho es diferente a cero debido a la hipótesis que el término entre corchetes no se desvanece y no cambia de signo.

1.6 CASOS DE ESTUDIO

Ejemplo:

Sea el sistema de segundo orden mostrado en la figura



El modelo matemático está dado por: $M\ddot{x} + kx + F_b(\dot{x}) = 0$; luego en el espacio de estados con $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ está definido como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}(kx_1 - F_b(x_2)) \end{aligned}$$

La función F_b está definida por:

$$F_b(x_2) = \begin{cases} ((x_2 - b) - c)^2 + d & x_2 > b \\ -((x_2 - b) + c)^2 - d & x_2 < b \end{cases}$$

considerar los siguientes valores para los parámetros del sistema $M = 3$, $k = 3$, $b = 1$, $c = 2$ y $d = 3$. Obtenga el plano de fase del sistema y estudie el comportamiento físico del sistema. Realice la linealización del sistema en el punto de equilibrio, obtenga el plano de fase para el sistema linealizado y compare con el sistema no lineal.

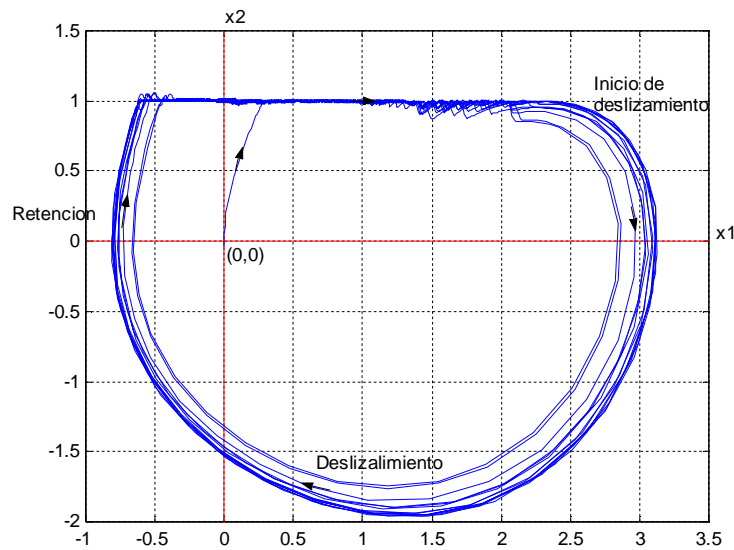


Fig. 15 Comportamiento físico del sistema

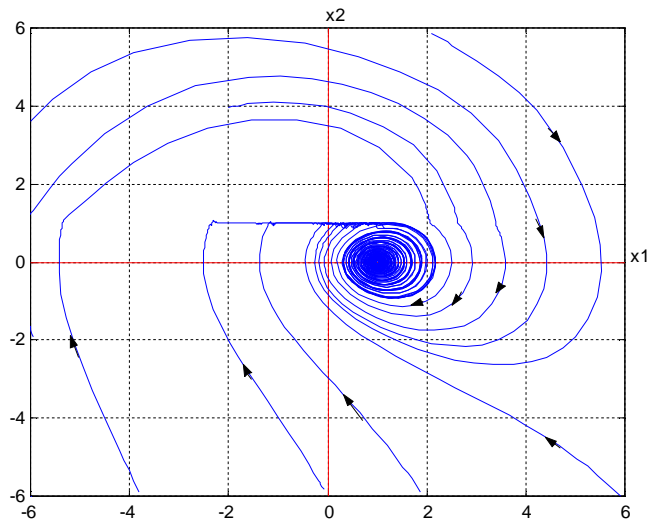


Fig. 16 Plano de fase de las trayectorias del ejemplo 0

Se determina los puntos de equilibrio del sistema:

$$x_2 = 0;$$

$$\frac{1}{M}(kx_1 - F(x_2)) = 0;$$

resolviendo el sistema se obtiene el punto de equilibrio $x_0 = \frac{4}{3}, 0$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & -\frac{1}{M} \frac{\partial F(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & -\frac{2(b-c)}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

obtenemos el retrato de fase del sistema linealizado, claramente se ve que el sistema es un nodo inestable. Los nuevos ejes se trasladan al punto singular o punto de equilibrio.

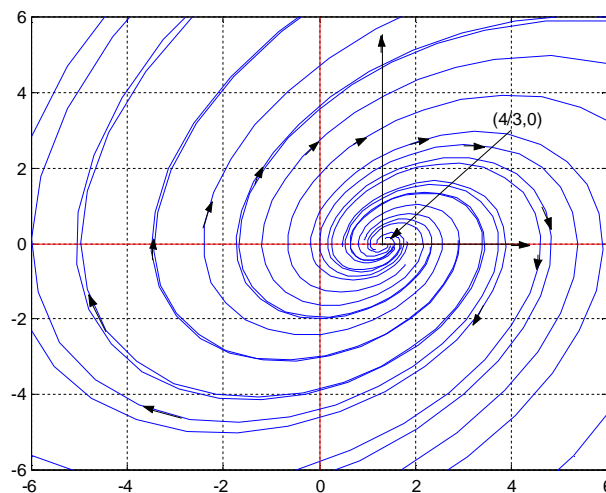


Fig. 17 Plano de fase del sistema linealizado sobre el punto de equilibrio

1.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar todos los puntos singulares (puntos de equilibrio) de sistema

$$\dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$$

Para valores reales positivos de a , b , c y determine el tipo de cada punto de equilibrio.

Sea el sistema no lineal representado por

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - ex_1^2x_2$$

Que puede decir sobre las trayectorias del sistema linealizado?

Realizar un analisis del plano de fase del sistema representado en modelo en el espacio de estados

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{\sqrt{x_1^3}} ;$$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$$

1.8 BIBLIOGRAFIA

- [1] Amestegui M. "Tutorial de MATLAB para Sistemas de Control". Universidad Mayor de San Andres, Facultad de Ingeniería, Carrera de Ing. Electrónica. Septiembre de 2002.
- [2] Tomlin C. "Lecture Notes of Nonlinear Control". Spring 2005.
- [3] Khalil H. "Nonlinear Systems". Second Editions. Prentice Hall. 2004.
- [4] Sira-Ramirez H., Marquez R., Llanes O., Rivas F. , "Control de sistemas no lineales: linealización aproximada, extendida, exacta". Pearson Prentice Hall. Serie Automática Robótica, 2005.
- [5] Slotine J. , Li W. "Applied nonlinear control".
- [6] Roque R. "Modelado de sistemas dinámicos". Universidad Mayor de San Andres Facultad de Ingeniería. Noviembre 2006
- [7] Braslavsky J. "Sistemas No Lineales: Notas de Clase" Automatización y Control de la Universidad Nacional de Quilmes. Primer cuatrimestre 2001.
- [8] Rojo A. "Algebra II". Editorial Librería el Ateneo. Sexta Edición.