

## GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Hàm số  $f(x)$  xác định và có liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì  $f'(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$ .
- Hàm số  $f(x)$  xác định và có liên tục trên nửa đoạn  $[a; b)$  hay  $(a; b]$  thì  $f'(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$ .
- Hàm số có thể không đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trên một tập hợp số thực cho trước.
- $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max_{x \in [a; b]} \{f(a), f(x_1), f(x_2) \dots f(x_i), f(b)\}$
- $\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min_{x \in [a; b]} \{f(a), f(x_1), f(x_2) \dots f(x_i), f(b)\}$
- $M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$
- $m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

### CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng :  $\frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \frac{1}{7(\sqrt{3}+\sqrt{4})} + \dots + \frac{1}{4003(\sqrt{2001}+\sqrt{2002})} < \frac{2001}{4006}$

Giải :

Xét :  $\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{4n^2+4n+1}} < \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

Vậy :  $S_n < \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

$2S_n < 1 - \frac{2}{\sqrt{4n+4}} < 1 - \frac{2}{\sqrt{n^2+4n+4}} = 1 - \frac{2}{n+2} \Rightarrow S_n < \frac{n}{2(n+2)}$

$n = 2001 \Rightarrow 2S_{2001} < 1 - \frac{2}{2003} = \frac{2001}{2003} \Rightarrow S_{2001} < \frac{2001}{4006}$

Cho  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2008}$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2008}| = 2009$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $E = |x_1 - 1| + |x_2 - 1| + \dots + |x_{2008} - 1|$

Vận dụng bất đẳng thức  $|a - b| \geq |a| - |b|$ . Dấu " $=$ " xảy ra khi  $ab \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_1 - 1| \geq |x_1| - 1 \\ |x_2 - 1| \geq |x_2| - 1 \\ \dots\dots\dots \\ |x_{2008} - 1| \geq |x_{2008}| - 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow E = |x_1 - 1| + |x_2 - 1| + \dots + |x_{2008} - 1| \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2008}| - \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{2008 \text{ so } 1}$$

Đấu " = " xảy ra khi 
$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2008} \geq 0 \\ |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2008}| = 2009 \end{cases}$$

Vậy  $\min E = 1$  khi  $\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2008} \geq 0 \\ |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2008}| = 2009 \end{cases}$

Tìm GTNN của biểu thức  $P(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 7$ .

Ta có  $P(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 5 \geq 5 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy  $\min P(x, y) = 5$  khi  $(x, y) = (1; 1)$

Cho  $2x + 2y - z - 9 = 0$ . Tìm GTNN của biểu thức  $P = (1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2$ .

Giải :

Trong không gian  $Oxyz$  ta xét điểm  $A(1; 2; 3)$  và mặt phẳng  $(\alpha) : 2x + 2y - z - 9 = 0$

Nếu  $M(x; y; z) \in (\alpha)$  thì  $AM^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2$

Mà  $AM \geq d(A; \alpha) = \frac{|2 + 4 - 3 - 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2$  nên  $P = (1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2 \geq 4$ .

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $M(x; y; z)$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A(1; 2; 3)$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$ .  
Vậy min  $P = 4$ .

Ví dụ 5:

Tìm GTNN của biểu thức

$$A = \frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

$$B = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$$

$$N = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Giải :

$$A = \frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

$$A = \frac{(x^2 - 2x + 1) + 5 \cdot (x-1) + 9}{(x-1)^2} = 1 + \frac{5}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x-1}, t \neq 0$$

$$A = 1 + t + 9t^2 = \left(3t + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{6} \geq \frac{11}{6}$$

$$\text{Dấu " $=$ " xảy ra khi } t = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{13}{5}$$

$$B = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$$

$$B = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x-1) + 1}{(x-1)^2} = 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Đặt  $t = \frac{1}{x-1}, t \neq 0$

$$B = 3 - 2t + t^2 = (t-1)^2 + 2 \geq 2$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $t = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy min  $B = 2$  khi  $x = 2$

$$N = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

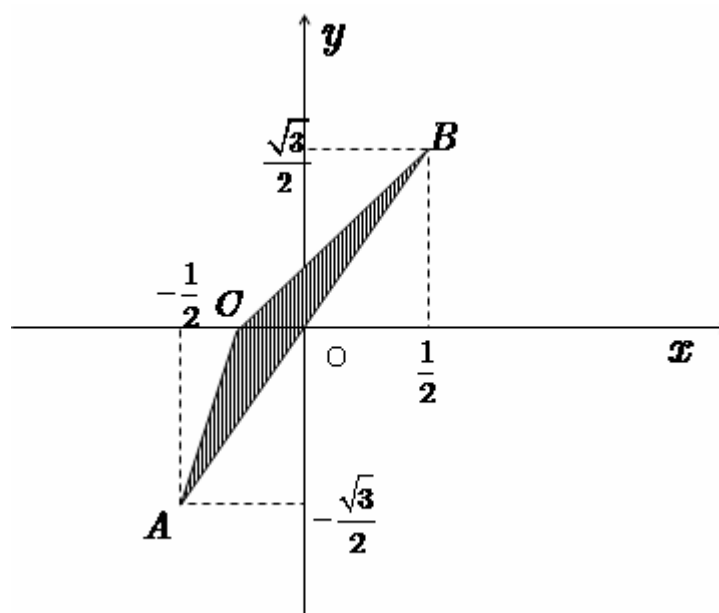
Bài toán này có rất nhiều cách giải và tôi đã giới thiệu trong chuyên đề bất đẳng thức. Nhân đây tôi giới thiệu 5 cách giải độc đáo.

Cách 1 :

$$N = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$N = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  xét các điểm  $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C(x, 0)$



Dựa vào hình vẽ ta có  $N = AC + CB \geq AB$

$$AC = \sqrt{x^2 + x + 1}, BC = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Mà

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow AB = 2$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $A, B, C$  thẳng hàng, hay

$x = 0$ , nghĩa là  $C \equiv O$

Vậy min  $N = 2$  khi  $x = 0$

Cách 2: Dùng bất đẳng thức vector :

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Rightarrow N \geq |\vec{a} + \vec{b}|$$

Chọn :  $\vec{a} = \left(-x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 - x + 1}, \vec{b} = \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; \sqrt{3}) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow N \geq 2$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x = 0$   
 Vậy  $\min N = 2$  khi  $x = 0$

Cách 3:

Do  $N = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}$ , do đó gọi ta nghĩ đến bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân.

Ta có :  $N \geq 2\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq 2, x \in \mathbb{R}$

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} x^2 + x + 1 = x^2 - x + 1 \\ x^4 + x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy  $\min N = 2$  khi  $x = 0$

Cách 4:

Vì  $\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 + x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow N^2 = 2(x^2 + 1) + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

Do  $\begin{cases} x^2 + 1 \geq 1 \\ x^4 + x^2 + 1 \geq 1 \end{cases}$ . Đẳng thức đồng thời xảy ra khi  $x = 0$ , nên  $N^2 \geq 4 \Rightarrow N \geq 2$

Vậy  $\min N = 2$  khi  $x = 0$

Cách 5:

Để thấy  $N = f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}$  là hàm số chẵn  $x \in \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x_1 > x_2 > 0$ , ta có  $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$  nên dấu của  $f(x_1) - f(x_2)$  cũng là dấu của  $f^2(x_1) - f^2(x_2)$

$$f^2(x_1) - f^2(x_2) = 2(x_1^2 - x_2^2) + 2(\sqrt{x_1^4 + x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^4 + x_2^2 + 1}).$$

Vì  $x_1 > x_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 > x_2^2 > 0 \\ \sqrt{x_1^4 + x_1^2 + 1} \geq \sqrt{x_2^4 + x_2^2 + 1} \end{cases}$  nên  $f^2(x_1) - f^2(x_2) > 0, \forall x_1 > x_2 > 0$

Suy ra  $f(x_1) - f(x_2) > 0, \forall x_1 > x_2 > 0$

Với  $x > 0$  thì hàm số  $f(x)$  luôn đồng biến và  $x < 0$  thì hàm số  $f(x)$  luôn nghịch biến và  $f(0) = 2$

Vậy  $f(x)$  đạt được giá trị cực tiểu tại  $x = 0$ . Do đó  $\min N = 2$  khi  $x = 0$ .

Ví dụ 6:

Tìm GTLN và NN của biểu thức

Giải :

Ví dụ 7:

Tìm GTLN của biểu thức

$$A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 2}$$

$$M = \frac{x}{(x + 2000)^2}, x > 0$$

Giải :

$$A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 2} = 3 + \frac{4}{x^2 + 2x + 2} = 3 + \frac{4}{(x + 1)^2 + 1} \leq 7$$

Dấu "=" xảy ra khi  $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy  $\max A = 7$  khi  $x = -1$

$$M = \frac{x}{(x + 2000)^2}, x > 0$$

Vì  $x > 0$  nên  $M > 0$ . Do đó  $M \rightarrow \max \Leftrightarrow \frac{1}{M} \rightarrow \min$

$$\frac{1}{M} = (x + 2000)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2x \cdot 2000 + 2000^2}{x} = \frac{x^2 - 2 \cdot 2000x + 2000^2 + 4 \cdot 2000x}{x}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{(x - 2000)^2}{x} + 8000 \geq 8000$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $x = 2000$

$$\min \frac{1}{M} = 8000 \rightarrow \max M = \frac{1}{8000}$$

Vậy  $\max M = \frac{1}{8000}$  khi  $x = 2000$

Ví dụ 8:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$B = \frac{12x^2 + 8x^2 + 3}{(2x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Giải :

$$A = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (3A - 2)x^2 + (A - 5)x + A - 3 = 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

- $3A - 2 = 0 \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$

- $3A - 2 \neq 0 \Leftrightarrow A \neq \frac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$  phương trình (\*) là phương trình bậc 2 đối với  $x$ . Do đó phương

trình (\*) có nghiệm nếu  $\Delta = (A - 5)^2 - 4(3A - 2)(A - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq A \leq 7$

Vậy  $\max A = 7, \min A = \frac{5}{2}$

$$B = \frac{12x^2 + 8x^2 + 3}{(2x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Đặt  $\tan u = x\sqrt{2}, \frac{-\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

$$A = g(u) = \frac{3 \tan^4 u + 4 \tan^2 u + 3}{(1 + \tan^2 u)^2} = \frac{3 \cos^4 u + 4 \sin^2 u \cos^2 u + 3 \sin^4 u}{(\sin^2 u + \cos^2 u)^2} = 3 - \frac{\sin^2 2u}{2}$$

Vì  $0 \leq \sin^2 2u \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq g(u) \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} \min g(u) = \frac{5}{2} \\ \max g(u) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min B = \frac{5}{2} \\ \max B = 3 \end{cases}$

Ví dụ 9:

Cho  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $T = xy + yz + zx$ .

Giải :

Ta có  $(x + y + z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0$  hay  $1 + 2T \geq 0 \Leftrightarrow T \geq -\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi  $x = 0; y = \frac{1}{\sqrt{2}}; z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy min  $T = -\frac{1}{2}$  chẳng hạn khi  $x = 0; y = \frac{1}{\sqrt{2}}; z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Mặt khác  $\begin{cases} (x - y)^2 \geq 0 \\ (y - z)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx) \text{ hay } 2 \geq 2T \Leftrightarrow T \leq 1 \\ (z - x)^2 \geq 0 \end{cases}$

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy max  $T = 1$  khi  $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 10:

Chứng minh rằng với mọi  $x > 0, y > 0$ , ta luôn có  $(1 + x)(1 + y) \geq (1 + \sqrt{xy})^2$ .

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân.

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{(1+x)(1+y)}}$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq 2 \frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$2 \geq \frac{2\sqrt{xy} + 1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy} + 1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}} \leq 1 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{xy}) \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} \Leftrightarrow (1+x)(1+y) \geq (1 + \sqrt{xy})^2$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y > 0$

Ví dụ 11:

Cho  $a \geq 4$ , chứng minh rằng:  $a + \frac{1}{a} \geq \frac{17}{4}$

Giải :



Ta có :  $a + \frac{1}{a} = \frac{a}{16} + \frac{1}{a} + \frac{15a}{16}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân cho hai số dương  $\frac{a}{16}$  và  $\frac{1}{a}$  .

$$\frac{a}{16} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{16} \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Mà  $a \geq 4 \Rightarrow \frac{15a}{16} \geq \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{15}{4}$

Vậy :  $a + \frac{1}{a} = \frac{a}{16} + \frac{1}{a} + \frac{15a}{16} \geq \frac{17}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi  $a = 4$ .

Ví dụ 12:

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 6$  . Chứng minh rằng :  $\left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}$  .

Giải :

Đặt  $A = \left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right) = 1 + \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + \left(\frac{1}{a^3b^3} + \frac{1}{b^3c^3} + \frac{1}{a^3c^3}\right) + \frac{1}{a^3b^3c^3}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân cho hai số dương, ta được:

$$A \geq 1 + \frac{3}{abc} + \frac{3}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{a^3b^3c^3} = \left(1 + \frac{1}{abc}\right)^3$$

Và  $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 8 \Rightarrow abc \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{8}$

Vậy :  $A \geq \left(1 + \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{729}{512}$  . Dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c = 2$  .

Cho  $x > y \geq 0$  . Chứng minh rằng :  $x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân cho bốn số dương

$$2x - 2y, y + 1, y + 1, \frac{8}{(x-y)(y+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 2(y + 1) + \frac{8}{(x-y)(y+1)^2} \geq 4\sqrt[4]{2(x-y)(y+1)^2 \cdot \frac{8}{(x-y)(y+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 4 \Leftrightarrow x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$$

Dấu "=" xảy ra khi  $2x - 2y = 2(y + 1) = \frac{8}{(x - y)(y + 1)^2} \Leftrightarrow x = 2; y = 1$

Ví dụ 13:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x - 2007}}{x + 2} + \frac{\sqrt{x - 2008}}{x}$ .

Giải :

Điều kiện :  $x \geq 2008$ .

Đặt  $\begin{cases} a = \sqrt{x - 2007} \geq 0 \\ b = \sqrt{x - 2008} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = a^2 + 2009 \\ x = b^2 + 2008 \end{cases}$ , ta có :

$$A = \frac{a}{a^2 + 2009} + \frac{b}{b^2 + 2008} = \frac{1}{a + \frac{2009}{a}} + \frac{1}{b + \frac{2008}{b}}$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân

$$a + \frac{2009}{a} \geq 2\sqrt{2009}, b + \frac{2008}{b} \geq 2\sqrt{2008}$$

$$\text{Do đó } A \leq \frac{1}{2\sqrt{2009}} + \frac{1}{2\sqrt{2008}}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} a = \frac{2009}{a} \\ b = \frac{2008}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2009 \\ b^2 = 2008 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a^2 + 2007 \\ x = b^2 + 2008 \end{cases} \Rightarrow x = 4006$

$$\text{Vậy } \max A = \frac{1}{2\sqrt{2009}} + \frac{1}{2\sqrt{2008}} \text{ khi } x = 4006$$

Ví dụ 14:

Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}$ .

Giải :

Với  $x, y > 0$  ta luôn có  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2xy} \geq \frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} + \frac{1}{2xy} \text{ hay } A \geq \frac{4}{(x + y)^2} + \frac{1}{xy}$$

$$\text{Mặt khác } x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó } A \geq 4 + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 6$$

$$\text{Vậy } \min A = 6 \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 15:

$$\text{Cho } x, y, z > 0. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } M = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, y + z \geq 2\sqrt{yz}, z + x \geq 2\sqrt{zx}$$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{(xyz)^2} = 8xyz$$

$$\Rightarrow M = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{xyz}{8xyz} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Vậy } \max M = \frac{1}{8} \text{ khi } x = y = z > 0$$

Ví dụ 16:

$$\text{Tìm GTLN của biểu thức } A = \frac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc}, a \geq 3, b \geq 4, c \geq 2$$

Giải :

$$A = \frac{\sqrt{c-2}}{c} + \frac{\sqrt{a-3}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b}$$

$$\sqrt{c-2} = \sqrt{\frac{(c-2) \cdot 2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(c-2) \cdot 2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(c-2) + 2}{2} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{c-2}}{c} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $c-2 = 2 \Leftrightarrow c = 4$ .

Tương tự :

$$\frac{\sqrt{a-3}}{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = 6.$$

$$\frac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } b = 8.$$

Vậy  $\min A = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4}$  khi  $a = 6, b = 8, c = 4$ .

Ví dụ 17:

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa điều kiện  $x + y + z = 1$ . Tìm GTLN của biểu thức  $Q = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

Giải :

$$x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

$$Q = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

$$Q \leq 3 - \frac{9}{x+1+y+1+z+1} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy  $\max Q = \frac{3}{4}$  khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$

Ví dụ 18:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a)  $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$  trên đoạn  $[0; 2]$

b)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  trên đoạn  $[-3; 2]$

c)  $f(x) = x^6 + 4(1-x^2)^3$  trên đoạn  $[-1; 1]$

d)  $f(x) = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3}$

Giải :

a)  $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}, x \in [0; 2]$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[0; 2]$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2]$

Bảng biến thiên

$x$	0	2
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$-5$

Từ bảng biến thiên suy ra :  $\max_{[0;2]} f(x) = \frac{1}{3}$  khi  $x = 0$        $\min_{[0;2]} f(x) = -5$  khi  $x = 2$

b)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x \in [-3; 2]$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[-3; 2]$ .

Ta có  $f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, f(-1) = 2 \\ x = 0, f(0) = 3 \\ x = 1, f(1) = 2 \end{cases}$

$f(-3) = 66, f(2) = 11$

Bảng biến thiên

$x$	-3	-1	0	1	2
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	66	2	3	2	11

Từ bảng biến thiên suy ra :  $\max_{[-3;2]} f(x) = 66$  khi  $x = -3$        $\min_{[-3;2]} f(x) = 2$  khi  $x = -1, x = 1$

c)  $f(x) = x^6 + 4(1 - x^2)^3, x \in [-1; 1]$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[-1; 1]$ .

Đặt  $t = x^2, x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Hàm số đã cho viết lại  $f(t) = t^3 + 4(1 - t)^3, t \in [0; 1]$  và  $f'(t) = 3t^2 - 12(1 - t)^2 = 3(-3t^2 + 8t - 4)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \\ t = 2 \end{cases}$

$f(0) = 4, f(1) = 1$

Bảng biến thiên

$x$	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	4	$\frac{4}{9}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra :  $\max_{[-1;1]} f(x) = 4$  khi  $x = 0$        $\min_{[-1;1]} f(x) = \frac{4}{9}$  khi  $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$d) f(x) = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3}$$

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = \frac{-4x^2 - 22x - 10}{(x^2 + 2x + 3)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	3	$\frac{5}{2}$	7	3

Từ bảng biến thiên suy ra :  $\max f(x) = 7$  khi  $x = -\frac{1}{2}$        $\min f(x) = \frac{5}{2}$  khi  $x = -5$

Ví dụ 19:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$  trên đoạn  $[-2; 3]$ .

b)  $f(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}$  trên đoạn  $[-1; 1]$ .

c)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ .

d)  $f(x) = (x - 6)\sqrt{x^2 + 4}$  trên đoạn  $[0; 3]$ .

Giải :

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \text{ trên đoạn } [-2; 3].$$

Hàm số đã cho xác định trên  $[-2; 3]$ .

$$f'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-2; 3]$$

$$f(-2) = \sqrt{17}, f(2) = 1, f(3) = \sqrt{2}.$$

Vậy :

$$\min_{x \in [-2; 3]} f(x) = 1 \text{ khi } x = 2.$$

$$\max_{x \in [-2; 3]} f(x) = \sqrt{17} \text{ khi } x = -2.$$

$$b) f(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4} \text{ trên đoạn } [-1; 1]$$

Hàm số đã cho xác định trên  $[-1; 1]$ .

Đặt  $t = x^2$   $t \in [0; 1]$ ,  $x \in [-1; 1]$ , ta có:

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + \frac{9}{4}t + \frac{1}{4} \text{ liên tục trên đoạn } [0; 1]$$

$$\Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{2} \notin [0; 1] \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, f(1) = \frac{1}{2}.$$

Vậy :

$$\min_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{1}{4} \text{ khi } t = 0 \text{ hay } \min_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{1}{4} \text{ khi } x = 0$$

$$\max_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{3}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } \max_{x \in [-1; 1]} f(x) \text{ khi } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}.$$

$$D = [-1; 6]$$

Hàm số  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$  liên tục trên đoạn  $[-1; 6]$ .

$$f'(x) = \frac{-2x + 5}{2\sqrt{-x^2 + 5x + 6}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \in [-1; 6]$$

$$f(-1) = f(6) = 0, f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

Vậy :

$$\min_{x \in [-1; 6]} f(x) = 0 \text{ khi } x = -1, x = 6$$

$$\max_{x \in [-1; 6]} f(x) = \frac{7}{2} \text{ khi } x = \frac{5}{2}.$$

$$d) f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4} \text{ trên đoạn } [0; 3].$$

Hàm số  $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$  liên tục trên đoạn  $[0; 3]$ .

$$y' = \frac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(1) = -5\sqrt{5} \\ y(0) = -12 \\ y(2) = -8\sqrt{2} \\ y(3) = -3\sqrt{13} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \max_{x \in [0; 3]} y = -3\sqrt{13} \\ \min_{x \in [0; 3]} y = -12 \end{cases}$$

Vậy  $\max_{x \in [0; 3]} y = -3\sqrt{13}$  khi  $x = 3$ ,  $\min_{x \in [0; 3]} y = -12$  khi  $x = 0$

Ví dụ 20:

a) Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:  $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$  trên đoạn  $[-5; 5]$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + 2|$  trên đoạn  $[-3; 2]$ .

c) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 1|$  trên đoạn  $[-2; 1]$ .

d) Tìm  $a$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^2 + 2x + a - 4|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  đạt giá trị nhỏ nhất

Giải :

$$a) f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|, x \in [-5; 5]$$

Hàm số đã cho xác định trên  $[-5; 5]$ .

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90, x \in [-5; 5]$$

$$\text{Ta có : } g'(x) = 3x^2 + 6x - 72$$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [-5; 5] \\ x = 4 \in [-5; 5] \end{cases}$$

$$g(4) = -86, g(-5) = 400, g(5) = -70$$

$$\Rightarrow -86 \leq g(x) \leq 400 \Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 400 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 400$$

$$\text{Vậy: } \max_{x \in [-5; 5]} f(x) = 400 \text{ khi } x = -5.$$

$$b) f(x) = |x^3 - 3x + 2| \text{ trên đoạn } [-3; 2]$$

Hàm số đã cho xác định trên  $[-3; 2]$ .

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-3; 2]$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1 \in [-3; 2]$$

$$g(-3) = 16, g(-1) = 4, g(1) = 0, g(2) = 4$$

$$16, g(x) = 4, x \in [-3; 2] \Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 16, x \in [-3; 2]$$

$$0 \leq f(x) \leq 16, x \in [-3; 2].$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [-3; 2]} f(x) = 16, \min_{x \in [-3; 2]} f(x) = 0$$

$$c) f(x) = |x^3 - 3x^2 + 1| \text{ trên đoạn } [-2; 1].$$

Hàm số đã cho xác định trên  $[-2; 1]$ .

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in [-2; 1]$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-2; 1] \end{cases}$$

$$g(-2) = -19, g(0) = 1, g(1) = -1, \text{ suy ra } \max_{x \in [-2; 1]} g(x) = 1, \min_{x \in [-2; 1]} g(x) = -19.$$

$$x \in [-2; 1] \Rightarrow g(x) \in [-19; 1] \Rightarrow f(x) = |g(x)| \in [0; 19].$$

$$g(0) \cdot g(1) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (0; 1) \text{ sao cho } g(x_1) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [-2; 1]} f(x) = 19, \min_{x \in [-2; 1]} f(x) = 0.$$

$$d) f(x) = |x^2 + 2x + a - 4|$$

Hàm số đã cho xác định trên  $[-2; 1]$ .

$$f(x) = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$$

Đặt  $t = (x + 1)^2, x \in [-2; 1] \Rightarrow t \in [0; 4]$

Ta có  $f(t) = |t + a - 5|, t \in [0; 4]$

$$\max_{x \in [-2; 1]} f(x) \Leftrightarrow \max_{t \in [0; 4]} f(t) = \max_{t \in [0; 4]} \{f(0), f(4)\} = \max_{t \in [0; 4]} \{|a - 5|, |a - 1|\}$$

$$\bullet |a - 5| \geq |a - 1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{t \in [0; 4]} f(t) = |a - 5| = 5 - a$$

$$\bullet |a - 5| \leq |a - 1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{t \in [0; 4]} f(t) = |a - 1| = a - 1$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} 5 - a \geq 5 - 3 = 2, \forall a \leq 3 \\ a - 1 \geq 3 - 1 = 2, \forall a \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0; 4]} f(t) \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $\max_{t \in [0; 4]} f(t) = 2$  khi  $a = 3$

Ví dụ 21:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a)  $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ .

b)  $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  trên đoạn  $x \in [-1; 2]$ .

Giải :

a)  $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[-2; 2]$ .

Ta có  $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in (-2; 2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} = x \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

$x$	-2	$\sqrt{2}$	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	-2		2	

Từ bảng biến thiên, ta được  $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2}$  khi  $x = \sqrt{2}$

$$\min_{x \in [-2; 2]} f(x) = -2 \text{ khi } x = -2$$

$$b) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[-1; 2]$ .

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên.

$x$	-1	1	2
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Từ bảng biến thiên, ta được  $\max_{x \in [-1; 2]} f(x) = \sqrt{2}$  khi  $x = 1$   $\min_{x \in [-1; 2]} f(x) = 0$  khi  $x = -1$

Ví dụ 22:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:  $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Giải:

Xét hàm số  $g(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$  liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \sin x \sqrt{\sin x}}{2\sqrt{\sin x} \cdot \cos x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$g(0) = 1; g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{8}; g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq \sqrt[4]{8} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \leq y \leq 1$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \max y = 1$$

Ví dụ 23:

Tìm các giá trị  $a, b$  sao cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$  có giá trị lớn nhất bằng 4 và có giá trị nhỏ nhất bằng -1

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \frac{ax_0+b}{x_0^2+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x_0^2 - ax_0 + 4 - b = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 16(4-b) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 16(4-b) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (*)$$

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \frac{ax_0+b}{x_0^2+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x_0^2 + ax_0 + b + 1 = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4(b+1) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 4(b+1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có hệ } \begin{cases} a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (*) \\ a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị } a, b \text{ cần tìm là : } \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 24:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

$$a) f(x) = 1 + \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

$$b) f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$c) f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$$

Giải :

$$a) f(x) = 1 + \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } y = f(x) = 1 + \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \Leftrightarrow (y - 1)(2 + \cos x) = 3 \sin x$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\cos x - 3\sin x + 2(y-1) = 0 \quad (*)$$

Phương trình  $(*)$  có nghiệm khi  $(y-1)^2 + 9 \geq 4(y-1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq y \leq 1 + \sqrt{3}$

Vậy :  $\max y = 1 + \sqrt{3}$ ,  $\min y = 1 - \sqrt{3}$

b)  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\left(2 \cdot \frac{1}{2} \sin x \cos x\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 \geq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \geq \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} & \text{khi } \sin 2x = 1 \\ \max f(x) = 1 & \text{khi } \sin 2x = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} & \text{khi } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \max f(x) = 1 & \text{khi } x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 25:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a)  $f(x) = x - \sin 2x$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b)  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

Giải :

a)  $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2 = \sin^4 x - \sin^2 x + 3$

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1$

Xét hàm số  $f(t) = t^2 - t + 3, t \in [0; 1]$   $f'(t) = 2t - 1, t \in (0; 1)$   $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

$$f(0) = f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$$

$$\min f(x) = \min_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \quad \max f(x) = \max_{t \in [0; 1]} f(t) = 3$$

b)  $f(x) = x - \sin 2x$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$$\text{Ta có : } f'(x) = 1 - 2 \cos 2x, -\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}; f(\pi) = \pi$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ khi } x = \frac{5\pi}{6}; \min_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ khi } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$e) f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}, t \in [-1; 1]$$

$$f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1} \text{ liên tục trên đoạn } [-1; 1]$$

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2+t+1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-1; 1]$$

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = \frac{2}{3}.$$

Vậy:

$$\min f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} f(t) = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\max f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = 1 \text{ khi } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 26:

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số: } f(x) = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$$

Giải :

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi } \begin{cases} 1 + \sin x \geq 0 \\ 1 + \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$y > 0 \Rightarrow y^2 = \sin x + \cos x + 2 + 2\sqrt{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Khi đó } (*) \text{ viết lại } f(t) = t + 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1)} = t + 2 + \sqrt{2}|t + 1|$$

$$f(t) = \begin{cases} (1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}, & \text{nếu } -\sqrt{2} \leq t \leq -1 \\ (1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}, & \text{nếu } -1 \leq t \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2} < 0, & \text{nếu } -\sqrt{2} \leq t < -1 \\ 1 + \sqrt{2} > 0, & \text{nếu } -1 < t \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Hàm số  $f(t)$  không có đạo hàm tại điểm  $t = -1$

Bảng biến thiên

$x$	$-\sqrt{2}$	$-1$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$	-	+	
$f(t)$	$4 - 2\sqrt{2}$		$4 + 2\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên, ta được  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$   $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

Ví dụ 27:

Cho ba số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn:  $abc + a + c = b$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$ .

Giải :

Ta có :  $a + c = b(1 - ac) > 0$ . Dễ thấy  $ac \neq 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{c}$  nên  $b = \frac{a + c}{1 - ac}$

$$\Rightarrow P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2(1 - ac)^2}{(a + c)^2 + (1 - ac)^2} + \frac{3}{c^2 + 1} = \frac{2}{a^2 + 1} + \frac{2(a + c)^2}{(a^2 + 1)(c^2 + 1)} - 2 + \frac{3}{c^2 + 1}$$

Xét

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{2(x + c)^2}{(x^2 + 1)(c^2 + 1)} + \frac{3}{c^2 + 1} - 2 = \frac{2(x^2 + 2cx + 2c^2 + 1)}{(x^2 + 1)(c^2 + 1)} + \frac{3}{c^2 + 1} - 2, 0 < x < \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4c(x^2 + 2cx - 1)}{(x^2 + 1)^2(c^2 + 1)}, 0 < x < \frac{1}{c}$$

Trên khoảng  $\left(0; \frac{1}{c}\right)$ :  $f'(x) = 0$  có nghiệm  $x_0 = -c + \sqrt{c^2 + 1}$  và  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang

âm khi  $x$  qua  $x_0$ , suy ra  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = x_0$

$$\Rightarrow \forall x \in \left(0; \frac{1}{c}\right): f(x) \leq \frac{2}{c^2 + 1 - c\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3}{c^2 + 1} - 2 = \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3}{c^2 + 1}$$

$$\text{Xét } g(c) = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}, c > 0$$

$$g'(c) = \frac{2(1-8c^2)}{(c^2+1)^2(\sqrt{c^2+1}+3c)}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ 1-8c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \forall c > 0: g(c) \leq g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{24}{9} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{10}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2} \\ c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là  $\frac{10}{3}$ .

Ví dụ 28:

Tìm tham số  $m$  để phương trình :

a)  $x - m\sqrt{x^2+1} + 1 = 0$  có nghiệm thực.

b)  $m\sqrt{x^2+2} = x + m$  có nghiệm thực.

c)  $x + \sqrt{2x^2+1} = m$  có nghiệm thực.

Giải :

a)  $x - m\sqrt{x^2+1} + 1 = 0$  có nghiệm thực.

$$x - m\sqrt{x^2+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

Hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Ta có:

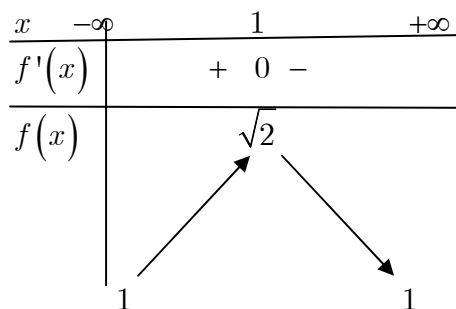
$$f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Giới hạn :



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $-1 < m \leq \sqrt{2}$  là giá trị  $m$  cần tìm.

b)  $m\sqrt{x^2 + 2} = x + m$  có nghiệm thực.

$$m\sqrt{x^2 + 2} = x + m \Leftrightarrow m = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2} - 1} = f(x)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2} - 1}$$

Ta có  $\sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} - 1 > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 1 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}}}{(\sqrt{x^2 + 2} - 1)^2} = \frac{2 - \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 2}(\sqrt{x^2 + 2} - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \frac{1}{|x|} \right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1.$$

$$\text{Vậy } f(x)_{\max} = \sqrt{2}, f(x)_{\min} = -\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

c)  $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$  có nghiệm thực.

Xét hàm số  $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Giới hạn :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} + x)(\sqrt{2x^2 + 1} - x)}{\sqrt{2x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{-x \left( \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{-\left( \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = +\infty$$

$$\Rightarrow \min f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy với  $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  thì phương trình có nghiệm thực.

Ví dụ 29:

- a) Tìm  $m$  để phương trình  $\sin^2 x - \sin x + m = 0$  (1) có nghiệm thuộc đoạn  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ .
- b) Tìm  $m$  để phương trình  $\tan x - m \cot x = 2$  (2) có nghiệm.

Giải :

a) Tìm  $m$  để phương trình  $\sin^2 x - \sin x + m = 0$  (1) có nghiệm thuộc đoạn  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ .

$$\text{Với } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right] \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, -\frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Khi đó phương trình (1)} \Leftrightarrow m = -t^2 + t, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

Xét hàm số  $f(t) = -t^2 + t$  liên tục trên đoạn  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ , ta có :

$$f'(t) = -2t + 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$f'(t) > 0, t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên đoạn } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

$$f'(t) < 0, t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$t$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1$
$f'(t)$		+	0
$f(t)$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$0$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$$-\frac{3}{4} \leq f(t) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] : m = f(t) \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] : -\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra (1) có nghiệm } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right] \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

**Cách khác:**

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - t = -m \Leftrightarrow \frac{1}{4} - m = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\text{Do } -\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \text{ nên: } 0 \leq \frac{1}{4} - m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

b) Tìm  $m$  để phương trình  $\tan x - m \cot x = 2$  (2) có nghiệm.

Đặt  $t = \tan x \Rightarrow t \neq 0$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow t - \frac{m}{t} = 2 \Leftrightarrow m = t^2 - 2t, t \neq 0.$$

Xét hàm số

$$f(t) = t^2 - 2t, t \neq 0$$

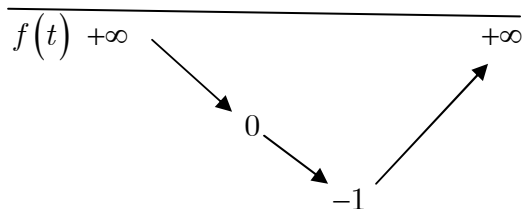
$$f'(t) = 2t - 2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$f'(t) < 0, t \in (-\infty; 0), (0; 1) \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-\infty; 0) \text{ và } (0; 1).$$

$$f'(t) > 0, t \in (1; +\infty) \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty).$$

$t$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(t)$		-	-	0
		-	0	+



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(t) \geq -1, \forall t \neq 0 \Rightarrow m \geq -1$  thì phương trình (2) có nghiệm.

Bình luận : cách giải dưới đây sai .

Đặt  $t = \tan x \Rightarrow t \neq 0$

Phương trình (2)  $\Leftrightarrow t - \frac{m}{t} = 2 \Leftrightarrow m = t^2 - 2t \Leftrightarrow m = (t - 1)^2 - 1 \geq -1$  hay  $m \geq -1$  (a)

Mặt khác:  $t \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$  (b)

Từ (a) và (b) ta suy ra (2) có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq m \neq 0$  (sai) !!!.

Ví dụ 30:

a) Tìm  $m$  để phương trình  $m(\cos x - \sin x) + \sin 2x = 0$  (3) có nghiệm thuộc khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$ .

b) Tìm  $a$  để phương trình:  $ax^2 + 1 = \cos x$  có đúng một nghiệm  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Giải :

a) Tìm  $m$  để phương trình  $m(\cos x - \sin x) + \sin 2x = 0$  (3) có nghiệm thuộc khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$ .

Đặt  $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ .

Ta có:  $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq t < 0$ .

Phương trình (3)  $\Leftrightarrow mt + 1 - t^2 = 0 \Leftrightarrow mt = t^2 - 1 \Leftrightarrow m = t - \frac{1}{t} = f(t), -\sqrt{2} \leq t < 0$

Xét hàm số  $f(t) = t - \frac{1}{t}$  liên tục trên nửa khoảng  $t \in [-\sqrt{2}; 0)$

$f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in [-\sqrt{2}; 0)$

$f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty$ .

Vậy (3) có nghiệm  $\Leftrightarrow m \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Chú ý:**

Ta có thể dùng bảng biến thiên của hàm số  $f(t)$ :

$t$	$-\sqrt{2}$	$0$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$

b) Tìm  $a$  để phương trình:  $ax^2 + 1 = \cos x$  có đúng một nghiệm  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Để thấy để phương trình có nghiệm thì  $a \leq 0$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \frac{\cos x - 1}{x^2} = a \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -2a$$

Xét hàm số:  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ ,  $t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(t) = \frac{t \cdot \cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t (t - \tan t)}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < f(t) < 1 \Rightarrow \frac{8}{\pi^2} < \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} < 1, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Vậy phương trình có đúng một nghiệm } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{8}{\pi^2} < -2a < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < -\frac{4}{\pi^2}$$

Ví dụ 31:

a) Tìm  $m$  để pt sau có nghiệm:  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$

b) Cho phương trình  $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - ax^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $a$ , để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Giải :

a) Tìm  $m$  để pt sau có nghiệm:  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

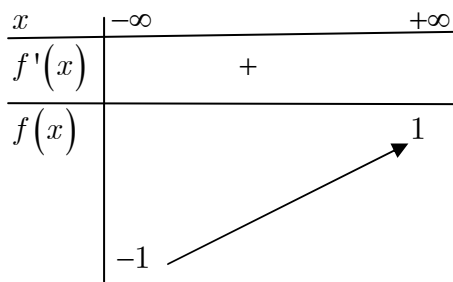
$$\text{Vì } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1} = (2x-1)\sqrt{x^2+x+1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \Leftrightarrow x = 0$$

Với  $x = 0$ , phương trình (1) không thỏa mãn. Nghĩa là  $f'(x) = 0$  vô nghiệm và

$$f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $-1 < m < 1$  là giá trị  $m$  cần tìm.

b) Cho phương trình  $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - ax^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $a$ , để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Vì  $x = 0$  không phải là nghiệm phương trình. Chia hai vế phương trình cho  $x^3$  ta được

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - a = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt: } t = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0. \text{ Phương trình có nghiệm khi } \Delta = t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |t| \geq 2.$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow t(t^2 - 3) + 3(t^2 - 2) - 6t = a \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 9t = a + 6 \quad (2)$$

• Với  $t = \pm 2$  thì phương trình cho có một nghiệm.

• Với  $|t| > 2$  thì với mỗi giá trị của  $t$  thì có 2 giá trị  $x$ . Do đó phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có đúng 2 nghiệm  $t = \pm 2$  hoặc có đúng 1 nghiệm  $|t| > 2$

Nếu phương trình (2) có đúng 2 nghiệm  $t = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 = a + 6 \\ 22 = a + 6 \end{cases}$  vô nghiệm

Nếu phương trình (2) có đúng 1 nghiệm  $|t| > 2$ .

Xét hàm số  $f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t, |t| > 2$

$$f'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t-1)(t+3)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ t = 1 \notin (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$27$	$22$		$2$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình (2) có đúng một nghiệm  $|t| > 2$  khi và chỉ khi  $2 < a + 6 < 22 \Leftrightarrow -4 < a < 16$

Ví dụ 32:

Tìm  $m$  để phương trình:  $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$  (2) có nghiệm  $x \in [0, 1 + \sqrt{3}]$ .

Giải :

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow t^2 - 2 = x^2 - 2x, x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$$

$$\text{Bất phương trình (2)} \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}, 1 \leq t \leq 2 (*)$$

Để phương trình (2) có nghiệm  $x \in [0, 1 + \sqrt{3}]$  khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm trong đoạn  $[1; 2]$  khi đó  $m \leq \max_{t \in [1; 2]} g(t) (**)$ .

Xét hàm số  $g(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$  liên tục trên đoạn  $1 \leq t \leq 2$ , ta có

$$g(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0, \forall t \in [1; 2] \Rightarrow g(t) \text{ đồng biến trên đoạn } [1; 2]$$

$$(**) \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [1;2]} g(t) = g(2) = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 33:

Tìm  $m$  để phương trình:  $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m(3)$  có nghiệm  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

Giải :

$$\text{Phương trình (3)} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow 4\cos^2 4x + \cos 4x = 4m - 3 \quad (a)$$

$$\text{Đặt } t = \cos 4x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$\text{Phương trình (a)} \Leftrightarrow 4t^2 + t = 4m - 3, t \in [-1; 1] \quad (b)$$

Phương trình (3) có nghiệm  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$  khi phương trình (b) có nghiệm  $t \in [-1; 1]$ .

Xét  $f(t) = 4t^2 + t$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ , ta có  $f'(t) = 8t + 1$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8} \in [-1; 1].$$

$t$	-1	$-\frac{1}{8}$	1
$f'(t)$		+	0
$f(t)$	3		5

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên suy ra : } -\frac{1}{16} \leq 4m - 3 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{47}{64} \leq m \leq 2$$

Ví dụ 34:

Cho parabol  $(P): y = x^2$  và điểm  $A(-3; 0)$ . Xác định điểm  $M$  thuộc  $(P)$  sao cho khoảng cách  $AM$  là ngắn nhất; tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow M(x_0; x_0^2)$$

$$d(x_0) = AM = \sqrt{(x_0 + 3)^2 + (x_0^2)^2} = \sqrt{x_0^4 + x_0^2 + 6x_0 + 9}$$



$$d'(x_0) = \frac{2x_0^3 + x_0 + 3}{\sqrt{x_0^4 + x_0^2 + 6x_0 + 9}} \quad d'(x_0) \Leftrightarrow x_0 = -1$$

$d'(x_0)$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x_0$  đi qua  $x_0 = -1$ . Hàm số  $d(x_0)$  đạt cực tiểu tại  $x_0 = -1$ ,  $d(-1) = 5$ . Điểm  $M(-1; 1) \in (P)$  là điểm để khoảng cách  $AM = \sqrt{5}$  là ngắn nhất.

### BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Ví dụ 1:

Người ta định làm một cái hộp kim loại hình trụ có thể tích  $V$  cho trước. Tìm bán kính đáy  $r$  và đường cao  $h$  của hình trụ sao cho ít tốn kim loại nhất.

Giải :

Gọi  $x$  là bán kính đáy. Để hộp kim loại hình trụ có thể tích  $V = \pi x^2 h$  thì chiều cao của hộp là  $h = \frac{V}{\pi x^2}$ .

Lượng kim loại để làm hộp bằng diện tích toàn phần của hộp :  $S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2}, x > 0$

Sự biến thiên của  $S(x)$   $S'(x) = 2\left(2\pi x - \frac{V}{x^2}\right), S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$S'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương nên hàm số  $S(x)$  đạt điểm cực tiểu tại  $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .

Vậy :  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Ví dụ 2:

Chu vi của một tam giác là  $16(cm)$ , độ dài của một cạnh tam giác là  $6(cm)$ . Tìm hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác có diện tích lớn nhất.

Giải :

Gọi một cạnh còn lại của tam giác là  $x$ , cạnh còn lại thứ hai là  $y$ , ta có  $x + y + 6 = 16 \Rightarrow y = 10 - x$   
 Diện tích tam giác : (theo công thức hêrông).

$$S(x) = \sqrt{p(p-6)(p-x)(p-y)} = 4\sqrt{(8-x)(8-y)} = 4\sqrt{-x^2 + 10x - 16}, 0 < x < 10$$

$$S'(x) = 4 \frac{5-x}{\sqrt{-x^2 + 10x - 16}} \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$S'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số  $S(x)$  đạt điểm cực đại tại  $x = 5$ . Diện tích tam giác lớn nhất khi mỗi cạnh còn lại dài  $5(cm)$ . Khi đó diện tích lớn nhất :  $S(x) = 12$

Ví dụ 2:

Một hộp không nắp được làm từ một mảnh cắctông . Hộp có đáy là hình vuông cạnh  $x(cm)$ , đường cao là  $h(cm)$  và có thể tích là  $500cm^3$ . Gọi  $S(x)$  là diện tích của mảnh cắctông. Tìm  $x(cm)$  sao cho  $S(x)$  nhỏ nhất .

Giải:

$$\text{Thể tích hình hộp là } V = x^2h = 500(cm^3) \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}, x > 0$$

$$\text{Diện tích của mảnh cắctông dùng làm hình hộp là : } S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$$

Bài toán trở thành tìm  $x > 0$  sao cho tại đó  $S(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất .

$$\text{Ta có } S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}, x > 0$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên của  $S(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$

$x$	0	10	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		300	

Vậy  $x = 10(cm)$  thì  $\min S(x) = 300$  .

Ví dụ 3:

Cho một tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$  . Người ta dựng một hình chữ nhật  $MNPQ$  có cạnh  $MN$  nằm trên cạnh  $BC$  , hai đỉnh  $P$  và  $Q$  theo thứ tự nằm trên hai cạnh  $AC$  và  $AB$  của tam giác . Xác định vị trí điểm  $M$  sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải :

$$\text{Đặt } BM = x, 0 < x < \frac{a}{2} \Rightarrow NM = BC - 2BM = a - 2x$$

$$\text{Trong tam giác vuông } BMQ \text{ có } \tan \widehat{QBM} = \frac{QM}{BM} \Rightarrow QM = BM \cdot \tan \widehat{QBM} = x\sqrt{3}$$

Diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$  là  $S(x) = MN \cdot QM = (a - 2x)x\sqrt{3}$

Bài toán quy về : Tìm giá trị lớn nhất của  $S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$

$$S'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right) \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Bảng biến thiên của  $S(x)$  trên khoảng  $\left(0; \frac{a}{2}\right)$

$x$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		+ 0 -	
$S(x)$		$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$	

$0 \nearrow \searrow 0$

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$  khi  $x = \frac{a}{4}$

Ví dụ 4:

Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ ,một nhà sinh học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều nhất ?.

Giải :

Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì sau một vụ , số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng :  $f(n) = n \cdot P(n) = n(480 - 20n), n \in N^*$

$$f'(n) = 480 - 40n \quad f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Vậy để thu được nhiều nhất sau một vụ thu hoạch cần thả mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là  $n = 12$  con cá.

Ví dụ 16:

Trong các hình chữ nhật có chu vi là  $40(cm)$ , hãy các định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Giải :

Gọi một cạnh bất kỳ của hình chữ nhật có chiều dài  $x(cm)$ . Tổng chiều dài hai cạnh là  $20(cm)$ . Chiều dài cạnh kia là  $20 - x$  (cm). Diện tích hình chữ nhật là :  $S(x) = x(20 - x), 0 \leq x \leq 20$

$$S'(x) = 20 - 2x, 0 < x < 20 \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Diện tích hình chữ nhật lớn nhất khi  $x = 10$ . Trong các hình chữ nhật chu vi  $40(cm)$ , hình vuông cạnh  $10(cm)$  có diện tích lớn nhất bằng  $100(cm^2)$

Ví dụ 5:

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $a$ . Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.

Giải :

Gọi  $x \left( 0 < x < \frac{a}{2} \right)$  là độ dài của cạnh của hình vuông bị cắt.

Thể tích của khối hộp là  $V = x(a - 2x)^2, 0 < x < \frac{a}{2} \Rightarrow V' = (a - 2x)(a - 6x), 0 < x < \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2x)(a - 6x) = 0 \\ 0 < x < \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{6} \\ a - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \max_{0 < x < \frac{a}{2}} V = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$$

Ví dụ 6:

- 1) Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi  $16cm$ , hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.
- 2) Trong số các hình chữ nhật có cùng diện tích  $48m^2$ , hãy tìm hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Giải :

- 1) Gọi  $x, y$  là độ dài hai kích thước của hình chữ nhật, ta có :  $\begin{cases} x, y > 0 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x, y < 8 \\ y = 8 - x \end{cases}$

Diện tích hình chữ nhật là  $S = xy = x(8 - x) = 8x - x^2, 0 < x < 8 \Rightarrow \max_{0 < x < 8} S = 16$  khi  $x = y = 4$

- 2) Gọi  $x, y$  là độ dài hai kích thước của hình chữ nhật, ta có :  $\begin{cases} x, y > 0 \\ xy = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ y = \frac{48}{x} \end{cases}$

Chu vi của hình chữ nhật là  $p = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{48}{x}\right), x > 0 \Rightarrow \min_{x > 0} p = p(4\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau đây :

- a)  $f(x) = x^2 + 2x - 5$  trên đoạn  $[-2; 3]$

$$b) f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4 \text{ trên đoạn } [-4; 0]$$

$$c) f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ trên khoảng } (0; +\infty)$$

$$d) f(x) = -x^2 + 2x + 4 \text{ trên đoạn } [2; 4]$$

$$e) f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1} \text{ trên đoạn } [0; 1]$$

$$f) f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ trên nửa khoảng } (0; 2]$$

$$g) f(x) = x^6 + 4(1 - x^2)^3 \text{ trên đoạn } \left[-1; \frac{2}{3}\right]$$

**2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau đây :**

$$a) f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \text{ trên đoạn } [-4; 4]$$

$$b) f(x) = x^3 + 5x - 4 \text{ trên đoạn } [-3; 1]$$

$$c) f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \text{ trên đoạn } [-1; 3]$$

$$d) f(x) = x^3 - 3x + 3 \text{ trên đoạn } \left[-3; \frac{3}{2}\right]$$

$$e) f(x) = \frac{x}{x + 2} \text{ trên nửa khoảng } (-2; 4]$$

$$f) f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1} \text{ trên khoảng } (1; +\infty)$$

$$g) f(x) = x\sqrt{1 - x^2} \text{ trên đoạn } [-1; 1]$$

$$h) f(x) = x - \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

**3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau đây :**

$$a) f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$$

$$b) f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cdot \cos x + 4$$

$$c) f(x) = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$$

$$d) f(x) = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$$

$$e) f(x) = \sqrt{1 + 2\sin x} + \sqrt{1 + 2\cos x}$$

$$f) f(x) = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x$$

**4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :**

$$y = x^4 - 6mx^2 + m^2 \text{ trên đoạn } [-2; 1].$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{2\sqrt{x}}{x + 2} - 2$$

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \text{ trên đoạn } \left[-2; \frac{5}{2}\right]$$

$$y = x + \cos^2 x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \sqrt{2} \cos 2x + 4 \sin x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = x^2 \cdot \ln x \text{ trên đoạn } [1; e]$$

**5.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$  trong đó  $x(mg)$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm đó.

Hướng dẫn

$G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 20$ ,  $G''(20) < 0$ . Lượng thuốc cần tiêm để giảm huyết áp nhiều nhất là  $20(mg)$ . Độ giảm huyết áp là  $G(20) = 100$ .

**6.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là  $300km$ . Vận tốc nước là  $6km/h$ . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v(km/h)$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$ , trong đó  $c$  là một hằng số,  $E(J)$ . Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

Hướng dẫn :

Vận tốc cá khi dòng nước đứng yên là  $v(km/h)$ , thì vận tốc của cá khi ngược dòng nước là  $v - 6(km/h)$

Thời gian của cá bơi ngược dòng với khoảng cách  $s = 300km$  là  $t = \frac{300}{v - 6}$

Năng lượng tiêu hao của cá

$$E(v) = cv^3t = cv^3 \frac{300}{v - 6} (J), v > 6 \Rightarrow E'(v) = 300c \frac{2v^3 - 18v^2}{(v - 6)^2} \Rightarrow \min E(v) \text{ khi } v = 9$$

**7.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3$ ,  $t \in [0; 25]$ . Nếu coi  $f(t)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0; 25]$  thì đạo hàm  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ .

- Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ năm.
- Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất và tính tốc độ đó.
- Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600.

d) Xét chiều biến thiên của hàm số  $f(t)$  trên đoạn  $[0; 25]$ .

Hướng dẫn :

$$f(t) = 45t^2 - t^3, \quad t \in [0; 25]$$

$$a) \quad f'(t) = 3t(30 - t) \Rightarrow f'(5) = 375$$

$$b) \quad f''(t) = 90 - 6t \Rightarrow \max f'(t) = f'(15) = 675$$

$$c) \quad f'(t) = 3t(30 - t) > 600 \Leftrightarrow 10 < t < 20$$

$$d) \quad f'(t) = 3t(30 - t) > 0, 0 < t < 25 \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên đoạn } [0; 25].$$

**8.** Hình thang cân  $ABCD$  có đáy nhỏ  $AB$  và hai cạnh bên đều dài  $1m$ . Tính góc  $\alpha = \widehat{DAB} = \widehat{CBA}$  sao cho hình thang có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó. Giả sử  $\widehat{ADC} = x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn :

$$AH \perp CD, AH = \sin x; DH = \cos x; DC = 1 + 2\cos x \Rightarrow S = \frac{AB + CD}{2} AH = (1 + \cos x) \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

**9.** Trong các tam giác vuông mà cạnh huyền có độ dài cạnh bằng  $10cm$ , hãy xác định tam giác có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn :

Gọi  $x, y$  là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng  $10cm$ ,  $0 < x < 10$ ,

$$0 < y < 10 \text{ và } S = \frac{1}{2}xy (cm^2) \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(xy)^2 = \frac{1}{4}x^2(100 - x^2), 0 < x < 100 \text{ với } x^2 + y^2 = 100$$

**10.** Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng. Hai mặt bên  $ABB'A', ACC'A'$  là hai tấm kính hình chữ nhật  $AA' = 20(m), A'B' = 5(m), BC = x(m)$ .

a) Tính thể tích  $V$  của hình lăng trụ theo  $x$

b) Tìm  $x$  sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính thể tích lớn nhất đó.

Hướng dẫn :

$$V = 5x\sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10 \Rightarrow \max_{x \in (0; 10)} V = V(5\sqrt{2}) = 250.$$

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ \sin 2y - \cos 2y = \sin x + \cos x - 1 \\ x, y \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$