CAPITULO
TERCERO

INTEGRALES Y SERIES DE POTENCIAS

§ 1. CURVAS RECTIFICABLES. INTEGRALES

1.1. Sea L: $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ una curva continua. A cada partición del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos parciales $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$) corresponde una partición de la curva L en arcos parciales σ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), con los puntos iniciales $z_k = \lambda(\alpha_k)$ y los puntos finales $z_{k+1} = \lambda(\alpha_{k+1})$; el punto final de cada arco (a excepción del último) coincide con el punto inicial del arco que le sigue. Uniendo los puntos $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ en su orden mediante segmentos rectilíneos, obtenemos una poligonal Λ inscrita en la curva L. Los lados de esta poligonal son las cuerdas de los arcos σ_k. Evidentemente, la longitud de la poligonal Λ es igual a $\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$. Si esta magnitud, independientemente de la partición considerada, queda acotada:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant C < \infty,$$

la curva L se llama r e c t i f i c a b l e, y el extremo superior de las sumas indicadas se llama l o n g i t u d d e l a c u r v a. Si existen particiones del segmento $[\alpha, \beta]$ para las cuales las sumas correspondientes, es decir, las longitudes de las poligonales inscritas en la curva, son arbitrariamente grandes, se dice que la curva n o e s r e c t i f i c a b l e. En este caso, a ella no se le atribuye ninguna longitud, o bien, se supone que la longitud de la curva L es infinita.

Es fácil verificar que la longitud de una curva rectificable es el límite de las longitudes de cualquier sucesión de poligonales inscri-

tas, cuando la longitud máxima de los segmentos que corresponden a la partición del segmento $[\alpha, \beta]$, tiende a cero.

Una clase particular de curvas rectificables son las curvas l i s a s (arcos e l e m e n t a l e s). Una curva continua L se llama l i s a, si entre sus distintas representaciones paramétricas existe al menos una $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, para la cual $\lambda(t)$ posee derivada continua y diferente de cero en todo el segmento $[\alpha, \beta]$.

El significado geométrico de la curva lisa queda claro del ap. 2.1 del segundo capítulo.

Precisamente allí se demostró que la existencia de la derivada $\lambda'(t_0) \neq 0$ significa que la curva posee tangente en el punto $z_0 = \lambda(t_0)$, la cual forma con el eje real un ángulo igual a $\operatorname{Arg} \lambda'(t_0)$. Por lo tanto, una curva lisa posee tangente en cada punto. Si t varía continuamente desde α hasta β, entonces z describe una curva desde el punto inicial hasta el final, variando también $\lambda'(t)$ continuamente, sin anularse, por lo cual varía también continuamente $\operatorname{Arg} \lambda'(t)$*). Esto significa que la pendiente de la tangente a una curva lisa varía continuamente cuando el punto de contacto se desplaza continuamente a lo largo del arco.

Para la longitud l de una curva lisa L, en el cálculo integral se deduce la conocida fórmula

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Esta fórmula puede escribirse en una forma más compacta observando que

$$\lambda'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad \text{y} \quad |\lambda'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2;$$

entonces obtenemos:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)|\, dt.$$

Una clase más general que las curvas rectificables son las curvas l i s a s a t r o z o s (curvas elementales).

Una curva continua L se llama lisa a trozos si está formada por un número finito de curvas lisas, o, expresándose con más precisión, si para una representación paramétrica suya $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, el segmento $[\alpha, \beta]$ posee una subdivisión en un número finito de segmentos $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ $(\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m = \beta)$, en cada

*) $\operatorname{Arg} \lambda'(t) = \operatorname{Im} \{\operatorname{Ln} [\lambda'(t)]\}$, y como $\lambda'(t)$ varía continuamente, sin anularse, $\operatorname{Ln} [\lambda'(t)]$ y, por consiguiente, también $\operatorname{Im} \{\operatorname{Ln} [\lambda'(t)]\}$ varían continuamente.

uno de los cuales $\lambda(t)$ posee derivada continua y diferente de cero. De esta definición se deduce que una curva lisa a trozos puede no poseer tangente en los puntos $z_k = \lambda(\alpha_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, pero en cada uno de estos puntos existen las tangentes «a la izquierda» y «a la derecha», de modo que los puntos indicados son puntos angulares de la curva lisa a trozos.

Para la longitud l de la curva lisa a trozos sigue siendo válida la fórmula anterior

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)|\, dt.$$

Claro que con las curvas lisas a trozos no se agota toda la clase de las curvas rectificables. Por cierto el lector que no conozca las curvas rectificables en toda su amplitud puede sustituir para sí en la exposición ulterior, el concepto de curva rectificable por el concepto más estrecho de curva lisa a trozos.

Sea L alguna curva rectificable $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, y $P(z) = P(x, y)$, $Q(z) = Q(x, y)$, dos funciones reales definidas y continuas en esta curva. Dada una partición arbitraria del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, tomemos en los arcos σ_k con los extremos $z_k = x_k + iy_k$ y $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$ sendos puntos: $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k = \lambda(\tau_k)$ $(\alpha_k \leqslant \tau_k \leqslant \alpha_{k+1})$ y formemos para las funciones P y Q la suma integral respectiva

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)].$$

En el cálculo integral se demuestra *) que para cualquier sucesión de particiones del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos cuya longitud máxima tienda a cero, las sucesiones de las sumas integrales respectivas tienden a un mismo límite. Este último se designa así:

$$\int_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

y se llama integral (curvilínea) de $P\,dx + Q\,dy$ a lo largo de la curva L.

Basándose en este hecho, en el siguiente apartado introduciremos el concepto de integral de una función compleja a lo largo de una curva rectificable.

En particular, si L es una curva lisa a trozos, la integral curvilínea se puede expresar mediante la integral definida de una función

*) Véase, por ejemplo, Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, Vol. I.

de parámetro t del modo siguiente:

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

1.2. Sea L: $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, una curva rectificable y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, una función definida y continua en L. Consideremos alguna partición de la curva L en arcos σ_k (aquí se conservan las designaciones del precedente apartado) y formemos para la función $f(z)$ la suma integral correspondiente:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Cada término de esta suma es el producto del valor de $f(z)$ en cierto punto ζ_k del arco σ_k por la diferencia de los afijos de los puntos inicial y final de este arco. Introduzcamos para abreviar las siguientes designaciones:

$$u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k.$$

Entonces tendremos:

$$f(\zeta_k) = u_k + iv_k, \quad z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

y, por consiguiente,

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1} (v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k).$$

De aquí se ve que las partes real e imaginaria de la suma integral S son sumas integrales formadas para la misma partición de la curva L y para los siguientes pares de funciones reales: la primera, para $u(x, y)$ y $-v(x, y)$, y la segunda, para $v(x, y)$ y $u(x, y)$. Como las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas (debido a que $f(z)$ es continua), y la curva L es rectificable, las sumas integrales indicadas tenderán hacia unos límites determinados al disminuir indefinidamente las particiones de la curva (es decir, cuando la máxima diferencia de los valores contiguos del parámetro t tiende

a cero); tenderán precisamente a

$$\int_L u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy \quad \text{y} \quad \int_L v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy.$$

De aquí se deduce que, en las mismas condiciones, la suma integral de la función compleja $f(z)$ también tiende a un límite determinado y este límite es

$$\int_L u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy + i \int_L v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy.$$

El límite indicado se designa mediante $\int_L f(z)\, dz$ y se llama **integral de la función $f(z)$, tomada a lo largo de (o sobre) la curva L.**

Así, pues.

$$\int_L f(z)\, dz = \lim \sum_{h=0}^{n-1} f(\zeta_h)(z_{h+1} - z_h) =$$

$$= \int_L u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy + i \int_L v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy. \qquad (1.2:1)$$

Vemos, que el cálculo de la integral de una función compleja puede reducirse al cálculo de dos integrales curvilíneas de funciones reales.

En el caso particular, cuando L es un segmento del eje real $a \leqslant x \leqslant b$, $z = x$ y $f(z) = f(x)$, donde $f(x)$ es una función real, obtenemos según la definición admitida:

$$\int_L f(x)\, dx = \lim \sum_{h=0}^{n-1} f(\xi_h)\, (x_{h+1} - x_h).$$

Pero, precisamente así se expresa la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$.

Por consiguiente,

$$\int_L f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad (1.2:2)$$

y la integral definida de una función real de variable real resulta ser un caso particular de la integral de una funcion compleja a lo largo de la recta. Cuando L es, como anteriormente, un segmento

del eje real, pero la función $f(x)$ es compleja: $f(x) = u(x) + iv(x)$, obtenemos:

$$\int_L f(x)\,dx = \lim \sum_{h=0}^{n-1} [u(\xi_h) + iv(\xi_h)](x_{h+1} - x_h) =$$
$$= \lim \sum_{h=0}^{n-1} u(\xi_h)(x_{h+1} - x_h) + i \lim \sum_{h=0}^{n-1} v(\xi_h)(x_{h+1} - x_h) =$$
$$= \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx. \qquad (1.2:3)$$

Considerando el caso más general, cuando L es alguna curva lisa a trozos, podemos sustituir cada una de las integrales curvilíneas en el segundo miembro de la fórmula (1.2:1) por su integral definida correspondiente de la función de la variable real t; entonces obtenemos:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \{u[x(t),\ y(t)]\,x'(t) - v[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt +$$
$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + u[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt. \qquad (1.2:4)$$

Comparando el segundo miembro de esta fórmula con el segundo miembro de la fórmula (1.2:3), podemos considerarlo como la integral de la función compleja:

$$\{u[x(t),\ y(t)]\,x'(t) - v[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\} +$$
$$+ i\{v[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + u[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\} =$$
$$= \{u[x(t),\ y(t)] + iv[x(t),\ y(t)]\}\cdot[x'(t) + iy'(t)] = f[\lambda(t)]\cdot\lambda'(t)$$

a lo largo del segmento del eje real δ: $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Por consiguiente, la fórmula (1.2:4) puede expresarse en la forma

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\delta f[\lambda(t)]\cdot\lambda'(t)\,dt. \qquad (1.2:5)$$

Aquí, el segundo miembro se obtiene del primero sustituyendo: primero, la curva L por el segmento δ del eje real y, segundo, z por $\lambda(t)$ y dz por $\lambda'(t)\,dt$. Su prioridad ante el primer miembro consiste en que, después de separar las partes real e imaginaria bajo el signo de la integral, ésta se escribe inmediatamente en forma de dos integrales definidas de funciones reales del parámetro t (véase el segundo miembro de la fórmula (1.2:4)).

1.3. Enumeremos las propiedades elementales de las integrales de las funciones complejas:

a) $$\int_L f(z)\,dz = -\int_{L_-} f(z)\,dz. \qquad (1.3:1)$$

Aquí, se designa con L_- la curva que se diferencia de L solamente en el sentido del recorrido.

b) $$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{L_m} f(z)\,dz. \qquad (1.3:2)$$

Aquí, $L_1, L_2, \ldots, L_m$ son arcos que se obtienen al hacer alguna partición de la curva L en partes; el origen del arco L_1 coincide con el origen de la curva L, el origen del arco L_{k+1} con el extremo del arco L_k $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ y el extremo del arco L_m con el extremo de la curva L.

c) $$\int_L \sum_{j=1}^{m} C_j f_j(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} C_j \int_L f_j(z)\,dz. \qquad (1.3:3)$$

Aquí, $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ son funciones definidas y continuas en L, mientras que $C_1, \ldots, C_m$, son constantes complejas.

Cada una de estas tres propiedades se verifica fácilmente, bien pasando a las integrales curvilíneas según la fórmula (1.2:1) o bien, inmediatamente, basándose en la definición de la integral $\int_L f(z)\,dz$ como el límite de la suma integral.

Frecuentemente suele ser necesario acotar superiormente el módulo de la integral. Con este fin, ante todo se usa la desigualdad

d) $$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant \int_L |f(z)|\,ds. \qquad (1.3:4)$$

Aquí $\int_L |f(z)|\,ds$ es la integral curvilínea de la función real (no negativa) continua $|f(z)|$, tomada a lo largo de la curva L, es decir, es el límite: $\lim \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\, l_k$, donde l_k es la longitud del arco σ_k, y ζ_k es, como anteriormente, un punto de este arco.

Para demostrar la desigualdad (1.3:4), acotemos el módulo de la suma integral $\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)$. Se tiene:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\,|z_{k+1}-z_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\, l_k.$$

Pasando a límite en ambos miembros de esta desigualdad, suponiendo que la partición disminuye indefinidamente, resulta:

$$\left| \int_L f(z)\, dz \right| \leqslant \int_L |f(z)|\, ds,$$

como se quería demostrar.

Ordinariamente, la integral que figura en el segundo miembro suele escribirse en la forma $\int\limits_L |f(z)|\,|dz|$. La desigualdad (1.3:4) toma entonces la forma

d′) $$\left| \int_L f(z)\, dz \right| \leqslant \int_L |f(z)|\,|dz|. \qquad (1.3:4')$$

Con más frecuencia que la desigualdad (1.3:4) o (1.3:4′), suele usarse otra acotación más grosera. Supongamos, para esto, que en todos los puntos de la curva L la función $f(z)$ satisface a la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant M$$

(aquí se puede tomar por M, por ejemplo, $\max\limits_L |f(z)|$). Entonces, para el módulo de la integral de $f(z)$ obtenemos:

e) $$\left| \int_L f(z)\, dz \right| \leqslant Ml, \qquad (1.3:5)$$

donde l es la longitud de la curva L. Para obtener esta desigualdad es suficiente observar que

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\,|z_{k+1} - z_k| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant Ml,$$

y pasar a límites.

Todas las propiedades enumeradas son exactamente análogas a las propiedades correspondientes de las integrales de las funciones reales.

Es necesario señalar una de las propiedades importantes de las integrales de las funciones reales que no se verifica inmediatamente para las integrales de las funciones complejas. Se trata del teorema del valor medio (primer teorema del valor medio), según el cual, en el caso más simple

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(\tau) \int_a^b dt = f(\tau)(b - a),$$

donde $a < \tau < b$ (la función $f(t)$ es continua en el segmento $[a, b]$). De éste, en particular, se deduce que la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ no puede anularse si la función continua $f(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo (a, b). Pero esta última conclusión no puede aplicarse a las integrales de las funciones complejas, incluso cuando se limita la integración a un segmento del eje real.

Examinemos, por ejemplo, la integral $\int_L \exp(2\pi ix)\,dx$, tomada a lo largo del segmento del eje real $L: 0 \leqslant x \leqslant 1$. Como $\exp(2\pi ix) = \cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x$, según la fórmula (1.2:3), se tiene:

$$\int_L \exp(2\pi ix)\,dx = \int_0^1 \cos 2\pi x\,dx + i\int_0^1 \operatorname{sen} 2\pi x\,dx = 0.$$

Sin embargo, $\exp(2\pi ix)$ no se anula en ningún punto del segmento L. Por lo tanto, la consecuencia indicada anteriormente del teorema del valor medio no es aplicable a las integrales de las funciones complejas; por esta razón, el mismo teorema del valor medio tampoco es aplicable generalmente a las mismas.

He aquí unos cuantos ejemplos de cálculo de las integrales elementales de las funciones complejas.

$$1) \qquad \int_L dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = \lim (z_n - z_0) = Z - z_0,$$

donde z_0 es el punto inicial y Z, el punto final de la curva L.

En particular, si la curva L es cerrada, entonces $Z = z_0$ y la integral se anula:

$$\int_L dz = 0.$$

$$2) \quad \int_L z\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_k (z_{k+1} - z_k) = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} (z_{k+1} - z_k).$$

Aquí, para una misma partición de la curva L suponemos una vez que el punto ζ_k coincide con el punto inicial z_k del arco σ_k, y la otra vez, con el punto final z_{k+1} del mismo arco. Como los límites de una y otra sumas integrales son iguales, su media aritmética tendrá el mismo límite:

$$\int_L z\,dz = \frac{1}{2}\lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} + z_k)(z_{k+1} - z_k) = \frac{1}{2}\lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2).$$

En particular, si L es una curva cerrada, de nuevo obtenemos que se anula la integral:

$$\int_L f(z)\,dz = 0.$$

3)
$$\int_L \frac{dz}{z-a},$$

donde L: $z = a + r\exp(it)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, es una circunferencia con el centro en a y de radio r, recorrida una vez en dirección positiva.

Hagamos el cálculo por dos métodos distintos.

Para obtener una suma integral que sea lo más simple posible, dividamos L en n arcos iguales por los puntos:

$$z_0 = a + r,\quad z_1 = a + r\exp\left(i\,\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$z_2 = a + r\exp\left(i\,\frac{4\pi}{n}\right),\ \ldots,\ z_{n-1} = a + r\exp\left[i\,\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

y pongamos también

$$z_n = z_0 = a + r.$$

Finalmente, tomemos por puntos ζ_k en los arcos $\widehat{z_k z_{k+1}}$ los puntos medios de estos arcos:

$$\zeta_k = a + r\exp\left[i\,\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Entonces

$$f(\zeta_k) = \frac{1}{\zeta_k - a} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\,\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

y

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left[-i\,\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]\left\{\exp\left[i\,\frac{2(k+1)\pi}{n}\right] - \exp\left(i\,\frac{2k\pi}{n}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\exp\frac{\pi i}{n} - \exp\left(-\frac{\pi i}{n}\right)\right\} = 2i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 2in\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \lim_{n\to\infty} 2in\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 2\pi i\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi i$$

Este mismo resultado puede obtenerse aplicando la fórmula (1.2:5). Se tiene:

$$z = \lambda(t) = a + re^{it}, \quad \lambda'(t) = ire^{it}$$

y, por consiguiente,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_\delta \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_\delta dt.$$

Aquí δ designa el segmento del eje real desde 0 hasta 2π. Por lo tanto, $\int_\delta dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ y, finalmente,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

§ 2. TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

2.1. El teorema, cuyo enunciado y demostración daremos ahora, es uno de los fundamentales en la teoría de las funciones analíticas.

Teorema integral de Cauchy. *Si G es un recinto simplemente conexo del plano finito y $f(z)$ es una función uniforme y analítica en este recinto, entonces para cualquier curva rectificable y cerrada L, perteneciente a G, la integral $\int_L f(z)\,dz$ es igual a cero.*

Con ciertas restricciones complementarias, este teorema puede obtenerse fácilmente de la conocida fórmula de Green. Esta fórmula tiene la forma

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_g \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

donde g es el interior de la curva elemental de Jordan cerrada L, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas en L y en su interior junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$, y, finalmente, la integral curvilínea en el primer miembro se toma en sentido positivo, es decir, en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

Escribamos la integral $\int_L f(z)\,dz$ según la fórmula (1.2:1):

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy.$$

Para aplicar a las integrales del segundo miembro la fórmula de Green, exijamos que la curva L sea de Jordan y lisa a trozos, y luego, que las derivadas parciales de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean continuas en el recinto G. Como

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

lo último que se exige equivale a que $f'(z)$ sea continua en el recinto G. Como el recinto G es simplemente conexo y la curva de Jordan cerrada L pertenece a G, el interior de la curva L, es decir, el recinto g, también pertenece a G. Por consiguiente, las derivadas parciales de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ existen y son continuas en todos los puntos de la curva L y en su interior. Según la fórmula de Green, obtenemos:

$$\int_L u\,dx - v\,dy = \iint_g \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

$$\int_L v\,dx + u\,dy = \iint_g \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

y como las expresiones que figuran bajo los signos de las integrales dobles, en virtud de las ecuaciones de D'Alembert-Euler, se anulan, las integrales curvilíneas examinadas también son iguales a cero. Por esta razón es también igual a cero la integral $\int\limits_L f(z)\,dz$.

No obstante, no nos quedaremos satisfechos con el resultado obtenido y nos dedicaremos a demostrar el teorema de Cauchy en la forma que se enunció anteriormente, es decir, sin exigir ni que la derivada de $f(z)$ sea continua, ni que la curva L sea de Jordan y lisa a trozos.

2.2. Lema. *Si $F(z)$ es una función continua en un recinto G, y Γ es alguna curva rectificable situada en este recinto, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ puede asignarse un δ tal, que para cada partición de la curva Γ en arcos de longitud menor que δ, la poligonal respectiva inscrita γ estará contenida en el recinto G, y la diferencia entre las integrales $\int\limits_\Gamma F(z)\,dz$ y $\int\limits_\gamma F(z)\,dz$ será en su valor absoluto menor que ε:*

$$\left|\int_\Gamma F(z)\,dz - \int_\gamma F(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Demostración. En virtud de la proposición b) del ap. 4.5 del primer capítulo, en el recinto G se puede señalar un conjunto acotado y cerrado E, para el cual todos los puntos de la curva Γ

son interiores; además, existirá un número positivo ρ tal, que cada círculo de radio ρ con el centro en un punto cualquiera de la curva Γ pertenecerá a este conjunto E. Fijando el conjunto E y tomando un número positivo arbitrario ε, determinemos (en virtud de la continuidad uniforme de la función $F(z)$ en el conjunto cerrado E) un $\delta_1 > 0$, tal, que para cualquiera par de puntos z' y z'', que pertenezcan a E y satisfagan a la condición $|z' - z''| < \delta_1$, se cumpla la desigualdad

$$|F(z') - F(z'')| < \frac{\varepsilon}{2l}, \tag{2.2:1}$$

donde l es la longitud de la curva Γ.

Tomemos ahora un número positivo δ tan pequeño, que se cumpla la condición $\delta < \min(\delta, \rho)$. Fijemos una partición cualquiera de la curva Γ cuya máxima longitud de los arcos σ_k ($k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$) sea menor que el δ indicado, y sean ζ_k los puntos que realizan la partición, y γ_k, las cuerdas de los arcos σ_k (ζ_k es el origen y ζ_{k+1}, el extremo de γ_k). Designando con γ la poligonal cuyos lados sucesivos son γ_k, tendremos:

$$\left| \int_\Gamma F(z)\,dz - \int_\gamma F(z)\,dz \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz \right] \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz \right|. \tag{2.2:2}$$

Observando que $\int\limits_{\sigma_k} F(\zeta_k)\,dz = \int\limits_{\gamma_k} F(\zeta_k)\,dz = F(\zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$ (véase el ejemplo 1) ap. 1.3), hallaremos:

$$\left| \int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz \right| =$$
$$= \left| \int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz - \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz \right| + \left| \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz \right|. \tag{2.2:3}$$

Las diferencias bajo los signos de las integrales pueden acotarse según la fórmula (2.2:1), puesto que la distancia entre cualquier punto de σ_k o de γ_k y el punto ζ_k es menor que δ_1. Por esta razón,

$$\left| \int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2l} \cdot \text{long.}\,\sigma_k + \frac{\varepsilon}{2l} \cdot \text{long.}\,\gamma_k < \frac{\varepsilon}{l} \cdot \text{long.}\,\sigma_k, \tag{2.2:4}$$

y, por consiguiente, la desigualdad (2.2:2) nos da:

$$\left| \int_{\Gamma} F(z)\,dz - \int_{\gamma} F(z)\,dz \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l} \cdot \text{long. } \sigma_k = \varepsilon. \qquad (2.2:5)$$

Con esto se termina la demostración del lema.

2.3. Hagamos ahora la propia demostración del teorema integral de Cauchy. Primero lo demostraremos para las líneas poligonales y después, aplicando el lema del ap. 2.2, estudiaremos el caso

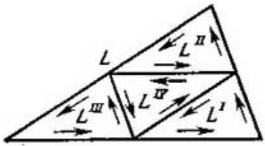

FIG. 45

más general. La demostración misma del teorema para las poligonales cerradas la dividiremos en etapas separadas.

a) B i á n g u l o. Sea L un segmento rectilíneo γ, recorrido dos veces en direcciones opuestas. Entonces

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

En este caso elemental no tuvimos que recurrir siquiera a la derivabilidad de la función $f(z)$.

b) T r i á n g u l o. Como ya se verá en el proceso de la demostración, este caso es el fundamental, y en él tendremos que basarnos esencialmente en el hecho de que la función $f(z)$ es derivable. Así, pues, sea L el contorno de un triángulo situado en el recinto G, recorrido una vez en una dirección determinada (por ejemplo, en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj). Hagamos:

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| = M \ (\geqslant 0).$$

Queremos demostrar que $M = 0$. Dividamos el triángulo, mediante segmentos rectilíneos que unan los puntos medios de sus lados, en cuatro triángulos iguales con los contornos L', L'', L''' y L^{IV} (fig. 45), y formemos la suma de las integrales tomadas sobre L', L'', L''' y L^{IV} en las direcciones señaladas en el dibujo con flechas

(cada una en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj). Obtenemos:

$$\int_{L'} f(z)\,dz + \int_{L''} f(z)\,dz + \int_{L'''} f(z)\,dz + \int_{L^{IV}} f(z)\,dz. \qquad (2.3:1)$$

Cada una de estas cuatro integrales puede sustituirse por la suma de tres integrales, tomadas a lo largo de los lados de los triángulos considerados. Seis de estas integrales, tomadas sobre los segmentos situados sobre L, darán al sumarlas la integral $\int\limits_L f(z)\,dz$. Las otras seis se dividirán en tres pares de integrales, cada par de las cuales se toman sobre un mismo segmento, pero recorridos en direcciones opuestas (estos segmentos no están situados sobre L). Evidentemente, la suma de cada par de éstas es igual a cero. De aquí se deduce que toda la suma (2.3:1) es igual a una sola integral, y como el módulo de la suma no supera a la suma de los módulos de los términos, se tiene:

$$M = \left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{L'} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{L''} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{L'''} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{L^{IV}} f(z)\,dz\right|. \qquad (2.3:2)$$

De la última desigualdad sacamos la conclusión de que al menos uno de los términos del segundo miembro tiene que ser no menor que $\frac{M}{4}$. Designando el circuito correspondiente mediante L_1 (L_1 coincide con L', L'', L''' o L^{IV}), obtenemos:

$$\left|\int_{L_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4}.$$

Hagamos ahora con el triángulo L_1 lo mismo que se hizo anteriormente con el triángulo L, es decir, dividámoslo en cuatro triángulos iguales: L_1', L_1'', L_1''' y L_1^{IV}; observemos que la integral sobre L_1 es igual a la suma de las cuatro integrales sobre L_1', L_1'', L_1''' y L_1^{IV} (tomadas en un mismo sentido: en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj), y, finalmente, saquemos la conclusión de que el módulo de una de estas últimas será no menor que $\frac{1}{4}\frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}$. Sea ésta la integral a lo largo de L_2 (L_2 coincide con L_1', L_1'', L_1''' o L_1^{IV}). Entonces, tendremos:

$$\left|\int_{L_2} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4^2}.$$

Continuando estos razonamientos, obtendremos una sucesión de triángulos con los contornos $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, que satisfacen a las siguientes condiciones:

1) Cada triángulo siguiente está contenido en el anterior y se obtiene de éste uniendo con segmentos rectilíneos los puntos medios de dos de sus lados; en particular, de aquí se deduce que la longitud del circuito L_n — designémosla con l_n — es dos veces menor que l_{n-1} y, por consiguiente, $l_n = \frac{l}{2^n}$, donde l es la longitud del circuito L.

2) Cada uno de los triángulos está contenido en el recinto G; esto se debe a que L está contenido en G, por lo cual (como el recinto G es simplemente conexo) el interior de L también tiene que pertenecer a G.

3) La integral de $f(z)$ a lo largo de L_n satisface a la desigualdad

$$\left| \int_{L_n} f(z)\, dz \right| \geqslant \frac{M}{4^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.3:3}$$

De la propiedad 1) se deduce que los triángulos considerados «ciñen» a un punto ζ, perteneciente a cada uno de los triángulos (éste puede estar situado en el interior de L_n o sobre L_n)

En virtud de la propiedad 2), el punto ζ pertenece al recinto G. Por consiguiente, según la hipótesis del teorema, la función $f(z)$ posee derivada $f'(\zeta)$ en el punto ζ, y para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un δ tal, que cuando sea $|z - \zeta| < \delta$, se cumpla la desigualdad:

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon. \tag{2.3:4}$$

Como el punto ζ pertenece a cualquiera de los triángulos considerados y éstos «ciñen» a este punto (las longitudes de los circuitos L_n tienden a cero) resulta que, comenzando desde cierto $n > N$, estos triángulos estarán contenidos por completo en el círculo $|z - \zeta| < \delta$, y, por consiguiente, para todos los puntos z, pertenecientes a L_n, se cumplirá la desigualdad (2.3:4).

Escribámosla en la forma:

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon |z - \zeta|.$$

Observando que la distancia $|z - \zeta|$ entre dos puntos de un mismo triángulo es menor que el perímetro de este triángulo, es decir, es menor que $\frac{l}{2^n}$, obtenemos:

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon \frac{l}{2^n}, \quad z \in L_n, \ n > N. \tag{2.3:5}$$

Hallando ahora la integral de la función $f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)$ a lo largo de la línea cerrada L_n, resulta:

$$\int_{L_n} [f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)]\,dz=$$

$$=\int_{L_n} f(z)\,dz-f(\zeta)\int_{L_n} dz-f'(\zeta)\int_{L_n} z\,dz-\zeta f'(\zeta)\int_{L_n} dz=\int_{L_n} f(z)\,dz. \tag{2.3:6}$$

Aquí hemos aplicado el hecho de que las integrales $\int\limits_{L_n} dz$ y $\int\limits_{L_n} z\,dz$ son iguales a cero (véase los ejemplos 1) y 2) del ap. 1.3). Por consiguiente, en virtud de (2.3:6), (2.3:5) y de la de igualdad (1.3:5), obtenemos:

$$\left|\int_{L_n} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{L_n} [f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)]\,dz\right|<\varepsilon\frac{l}{2^n}l_n=$$

$$=\varepsilon\frac{l}{2^n}\,\frac{l}{2^n}=\varepsilon\frac{l^2}{4^n}. \tag{2.3:7}$$

Como complemento a la desigualdad (2.3:3), donde los números $\frac{M}{4^n}$ se acotaban superiormente por el módulo de la integral sobre L_n, hemos conseguido obtener la desigualdad (2.3:7), donde este módulo se acota superiormente por los números $\varepsilon\frac{l^2}{4^n}$. Confrontando las desigualdades (2.3:3) y (2.3:7), deducimos que

$$M<\varepsilon l^2,$$

o bien, haciendo a ε tender a cero:

$$M\leqslant 0.$$

Pero M no puede ser menor que cero. Por consiguiente,

$$M=\left|\int_L f(z)\,dz\right|=0,$$

con lo cual se termina la demostración del teorema integral de Cauchy para el caso de un triángulo.

c) Ahora estamos en condiciones de considerar el caso en que L sea una poligonal cerrada arbitraria situada en el recinto G. El problema consiste en saber descomponer tal poligonal en triángulos (para los cuales ya está demostrado el teorema).

Comencemos con el caso en que L sea el contorno de un polígono convexo de n lados ($n\geqslant 4$) $A_0A_1\ldots A_{n-1}A_0$, recorrido una vez

en una dirección determinada. Descompongamos el polígono en $n-2$ triángulos mediante diagonales trazadas por el vértice A_0 (fig. 46). Cada uno de estos triángulos pertenece al polígono dado y, por lo tanto, también al recinto G (de nuevo empleamos que el recinto G es simplemente conexo). Por consiguiente, para los triángulos obtenidos es válido el teorema que se demuestra.

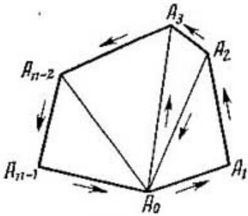

FIG. 46

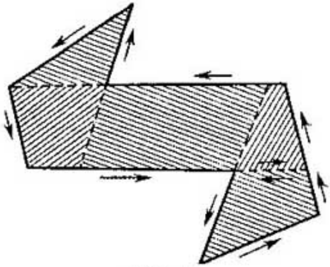

FIG. 47

Escribamos la integral de $f(z)$ a lo largo de L en la forma siguiente:

$$\int_L = \left(\int_{A_0A_1A_2} + \int_{A_2A_0}\right) + \left(\int_{A_0A_2} + \int_{A_2A_3\ldots A_{n-1}A_0}\right) =$$

$$= \int_{A_0A_1A_2A_0} - \int_{A_0A_2A_3\ldots A_{n-1}A_0} = \int_{A_0A_2A_3\ldots A_{n-1}A_0}$$

(ya que, por lo demostrado, $\int\limits_{A_0A_1A_2A_0} = 0$). Vemos, pues, que la integral sobre el contorno de un polígono convexo de n lados resulta ser igual a la integral sobre el contorno de un polígono convexo de $n-1$ lados. De aquí, reiterando este razonamiento unas cuantas veces, sacamos la conclusión de que esta integral es igual a la integral sobre el contorno del triángulo $A_0A_{n-2}A_{n-1}$, es decir, es igual a cero. Por lo tanto, el teorema queda demostrado también para un polígono convexo arbitrario.

Examinemos el caso en que L sea una poligonal cerrada arbitraria, que no se corte consigo misma y sea recorrida una sola vez. De las hipótesis hechas se deduce que ésta es una curva de Jordan; por esta razón se puede hablar de su interior que, como el recinto G es simplemente conexo, tiene que pertenecer a G. Demostremos que el interior de la poligonal L puede descomponerse en polígonos convexos. Con este fin, observemos que un polígono convexo se

caracteriza por completo con que cada uno de sus lados puede prolongarse en línea recta por cualquiera de sus dos vértices respectivos, sin caer en esta prolongación en el interior del polígono. Por el contrario, entre los lados de un polígono no convexo tiene que haber alguno cuya prolongación caiga en el interior del polígono. Prolonguemos cada uno de tales lados de uno o de los dos métodos posibles dentro de L hasta que nos encontremos de nuevo con L (fig. 47). De esta manera, el polígono inicial quedará descompuesto en un número finito de polígonos, cada uno de los cuales será convexo

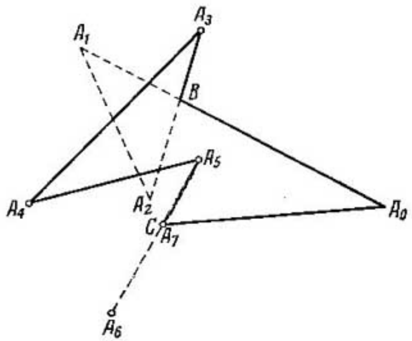

FIG. 48

(puesto que, en virtud de la construcción hecha, ninguno de los lados puede prolongarse dentro del nuevo polígono). Pero la integral sobre cada polígono convexo es igual a cero; por consiguiente, éstos pueden desprenderse uno a uno de todo el polígono sin cambiar el valor de la integral $\int\limits_L f(z)\,dz$. En definitiva obtendremos que en este caso también es igual a cero la integral sobre L.

Supongamos, finalmente, que L es una poligonal cerrada arbitraria. Según la definición, ésta consta de un número finito de lados $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, dados en un orden determinado, de modo que el extremo de cada uno es el origen del siguiente y el extremo del último lado coincide con el origen del primero (ap. 4.1 del capítulo primero). Algunos de los lados pueden tener puntos comunes además de los indicados, es decir, la poligonal puede cortarse consigo misma; además, algunos de los segmentos rectilíneos Δ_k pueden ser partes de otros segmentos o incluso pueden coincidir con ellos. Esto significa que al recorrer la poligonal L, algunos de

los segmentos que la pertenecen pueden describirse parcial o completamente unas cuantas veces (fig. 48).

Para facilitar los razonamientos, los haremos respecto de nuestro dibujo, donde está representada una poligonal compuesta de ocho lados: $\Delta_k = A_kA_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $A_8 = A_0$), en la cual el lado A_6A_7 forma parte del lado A_5A_6. Empecemos el movimiento sobre L, comenzando desde A_0, hasta que un nuevo lado se encuentre p o r p r i m e r a v e z con uno de los lados ya recorrido. En nuestro caso, tal lado es A_2A_3, que se corta con A_0A_1 en el punto B. Entonces, la poligonal cerrada que se obtiene al recorrer L, comenzando desde el punto B hasta el primer regreso a este punto (en nuestro caso, el triángulo BA_1A_2), representará una curva de Jordan cerrada situada en el recinto G. Por consiguiente, la integral sobre ésta será igual a cero y al excluir de L la poligonal indicada, el valor de la integral a lo largo de L no variará.

Resulta una poligonal L', formada por los lados, escritos por orden, A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_0. El número de sus vértices y, por consiguiente, de sus lados, es al menos una unidad menor que la cantidad inicial, puesto que la parte despreciada de la poligonal L era por lo menos un triángulo, de modo que fueron despreciados no menos de dos vértices, y en su lugar ha aparecido no más de un nuevo vértice (B).

Podríamos limitarnos a estos razonamientos, si el caso examinado fuese el único posible. Pero existe otra posibilidad más, que se observa en el caso de la poligonal L'. Hagamos de nuevo un recorrido comenzando desde A_0, a lo largo de los lados A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6. Hasta aquí no encontramos ninguna autointersección. Pero el siguiente lado A_6A_7 va dirigido por el lado A_5A_6, de modo que nos encontramos con puntos interiores de los lados ya recorridos antes, es decir, con puntos de autointersección; sin embargo, ninguno de éstos es el primero (el punto A_6, que es común para dos lados consecutivos A_5A_6 y A_6A_7, no es un punto de autointersección para L').

Debido a esto volvemos hacia atrás por el lado A_5A_6, hasta que nos encontremos con el punto más próximo a A_6 de los dos vértices contiguos A_5 y A_7. En nuestro caso, éste será $C = A_7$. La poligonal cerrada, compuesta de la parte del lado A_5A_6, comenzando desde el punto C hasta el vértice A_6, y de la parte del lado A_6A_7 desde A_6 de nuevo hasta el punto C, representa un biángulo, la integral sobre el cual es igual a cero. Por esta razón se puede excluir esta poligonal de L' sin variar el valor de la integral a lo largo de L'. Resulta una poligonal cerrada L'', formada por los lados, en su orden, A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5C, CA_0. La cantidad de sus vértices y, por consiguiente, de sus lados, es una unidad menor que para la poligonal L', puesto que junto con el biángulo hemos despreciado un vér-

tice (A_6), sin introducir en su lugar nuevos vértices (C coincide con A_7 o, en otro caso posible, con A_5).

Nuestro razonamiento es de un carácter totalmente general. Después de repetirlo un número finito de veces obtenemos o una poligonal cerrada $L^{(k)}$, que es una curva de Jordan (en nuestro caso, tal es la poligonal L''), o sino un biángulo. En cada uno de estos casos sacamos la conclusión de que la integral a lo largo de la poligonal inicial L es igual a cero.

Así, pues, queda demostrado el teorema para una poligonal cerrada arbitraria. Obsérvese que, extendiendo el teorema desde el caso de un triángulo hasta este último caso, nosotros no empleábamos ningún razonamiento de carácter teórico-funcional. Todos nuestros razonamientos eran exclusivamente de carácter geométrico elemental.

d) Consideremos, finalmente, el caso más general de una curva rectificable y cerrada arbitraria L, perteneciente a un recinto G. En virtud del lema del ap. 2.2, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar una poligonal cerrada γ, inscrita en L y perteneciente al recinto G, tal que las integrales $\int_L f(z)\,dz$ y $\int_\gamma f(z)\,dz$ satisfacen a la condición

$$\left| \int_L f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Pero, según lo demostrado anteriormente, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$; por consiguiente,

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| < \varepsilon,$$

y como aquí ε es un número positivo arbitrariamente pequeño, se tiene

$$\int_L f(z)\,dz = 0,$$

con lo cual se termina toda la demostración.

En el teorema demostrado el circuito de integración L pertenecía al recinto G en el cual la función $f(z)$ era analítica. Sin embargo, este teorema puede extenderse también al caso en que L represente la frontera de este recinto. Precisamente, se verifica la siguiente proposición.

Si G es el interior de una curva de Jordan cerrada rectificable L y $f(z)$ es una función continua en el recinto cerrado $\overline{G}$, y analítica en

el recinto G, entonces la integral de $f(z)$ sobre L es igual a cero: $\int\limits_L f(z)\,dz = 0$.

En todo su volumen este teorema se demostrará en el quinto capítulo. Aquí nos limitaremos a demostrar un caso particular del mismo, que es suficiente para la mayoría de las aplicaciones. Sea L una curva rectificable tal, que cada rayo que parta de cierto punto z_0 del recinto G se encuentre con ella en un solo punto.

Supongamos que la ecuación de la curva L puede representarse en la forma

$$z = z_0 + \lambda(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

donde θ es el ángulo polar respecto de un sistema polar de coordenadas con el polo en el punto z_0. Entonces, para cualquier ρ, $0<\rho<1$, la curva L_ρ: $z = z_0 + \rho\lambda(\theta)$, que es semejante a L respecto del punto z_0, pertenece a G. Debido a esto, en virtud del teorema integral de Cauchy,

$$\int\limits_{L_\rho} f(z)\,dz = 0, \quad 0<\rho<1.$$

Si

$$\sum_0^n{}' f(z_k)(z_{k+1}-z_k) = \sum_0^n{}' f[z_0+\lambda(\theta_k)][\lambda(\theta_{k+1})-\lambda(\theta_k)]$$

es la suma integral para la integral $\int\limits_L f(z)\,dz$, entonces, debido a la semejanza de las curvas L_ρ y L, la expresión

$$\sum_0^n{}' f[z_0+\rho\lambda(\theta_k)]\cdot[\rho\lambda(\theta_{k+1})-\rho\lambda(\theta_k)]$$

será una suma integral para $\int\limits_{L_\rho} f(z)\,dz$. Por esto, esta última integral puede expresarse también en forma de la integral a lo largo de L:

$$\int\limits_L \rho f[z_0+\rho\lambda(\theta)]\,dz = 0.$$

Transformemos ahora la integral $\int\limits_L f(z)\,dz$ del modo siguiente:

$$\int\limits_L f[z_0+\lambda(\theta)]\,dz = \int\limits_L \{f[z_0+\lambda(\theta)] - \rho f[z_0+\rho\lambda(\theta)]\}\,dz =$$

$$= \int\limits_L \{(1-\rho) f[z_0+\lambda(\theta)] + \rho\,(f[z_0+\lambda(\theta)] - f[z_0+\rho\lambda(\theta)])\}\,dz.$$

Hagamos las notaciones: $M = \max_{\overline{G}} |f(z)|$ y $m = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\lambda(\theta)|$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ puede señalarse un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que se cumpla la desigualdad

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

para cada par de puntos z', z'' del recinto G que satisfagan a la condición $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$. Por lo tanto, tomando $1 - \rho < \frac{\delta(\varepsilon)}{m}$, tendremos:

$$|f[z_0 + \lambda(\theta)] - f[z_0 + \rho\lambda(\theta)]| < \varepsilon$$

y, por consiguiente,

$$\left| \int_L f(z)\, dz \right| < [(1-\rho) M + \rho\varepsilon] \cdot \text{long. } L.$$

Tomando aquí $\rho \to 1$, obtenemos:

$$\left| \int_L f(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \cdot \text{long. } L,$$

y, finalmente, haciendo $\varepsilon \to 0$, sacamos la conclusión de que

$$\int_L f(z)\, dz = 0,$$

como se quería demostrar.

En particular, se puede tomar por L una circunferencia o cualquier polígono convexo.

Obsérvese que del hecho de que nuestra proposición es justa para cualquier triángulo se deduce, por el método que ya conocemos, que es justa también para cualquier circuito poligonal cerrado sin autointersecciones (no necesariamente convexo).

No obstante, no podemos basarnos en el lema del ap. 2.2 y extender esta proposición al caso de una curva arbitraria de Jordan cerrada y rectificable L, puesto que las poligonales Δ inscritas en ella pueden salir parcialmente fuera de los márgenes del recinto cerrado $\overline{G}$, limitado por la curva L, y, por consiguiente, las integrales $\int_\Delta f(z)\, dz$ carecerán de sentido.

Como ya se ha advertido, la demostración del teorema en todo su volumen se dará más tarde (basándose en otras ideas).

2.4. En los primeros trabajos de Cauchy su teorema servía como un medio para calcular distintas integrales definidas de las funciones de variable real (fundamentalmente integrales impropias).

Para dar una idea de estas aplicaciones del teorema de Cauchy, que dieron vida al mismo teorema, expongamos tres ejemplos.

1. Integrales de Fresnel:

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 \, d\xi \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi.$$

Para calcular estas integrales, que aparecen en la teoría de la difracción, consideremos una función auxiliar de variable compleja $F(z) = e^{iz^2}$. Esta puede considerarse como una función compuesta

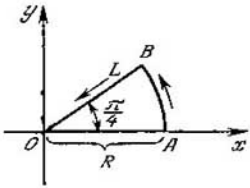

FIG. 49

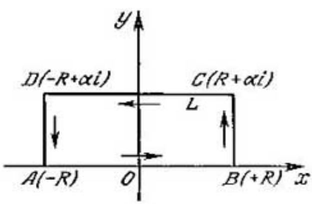

FIG. 50

$F(z) = \varphi[f(z)]$, donde $f(z) = iz^2$ y $\varphi(\zeta) = e^{\zeta}$. De aquí, según las reglas de derivación de una función compuesta, se deduce que $F(z)$ es derivable en todo el plano y $\frac{dF(z)}{dz} = 2ize^{iz^2}$. Por consiguiente, puede aplicarse el teorema integral de Cauchy.

Tomemos por circuito de integración la línea L de la fig. 49. Esta consta del segmento OA del semieje positivo, de longitud R (R es un número positivo arbitrario), del arco AB de la circunferencia de radio R con el centro en el origen de coordenadas y del segmento BO de la bisectriz del primer ángulo coordenado. Por lo tanto, el ángulo AOB es igual a $\frac{\pi}{4}$. Debido al teorema integral de Cauchy, la integral $\int_L e^{i\zeta^2} d\zeta$ es igual a cero:

$$\int_L e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_{OA} e^{i\zeta^2} d\zeta + \int_{AB} e^{i\zeta^2} d\zeta + \int_{BO} e^{i\zeta^2} d\zeta = 0.$$

Pero ζ en OA es igual al número real ξ, por lo cual, $d\zeta = d\xi$ y

$$J_1(R) = \int_{OA} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_0^R e^{i\xi^2} d\xi.$$

En AB, $\zeta = R(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, donde φ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$, por lo cual

$$\zeta^2 = R^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) \quad \left(0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$d\zeta = R(-\operatorname{sen}\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi = iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi$$

y

$$J_2(R) = \int\limits_{AB} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \exp[iR^2(\cos 2\varphi + i\operatorname{sen} 2\varphi)]\, iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Finalmente, en BO, $\zeta = \rho\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, donde ρ varía desde R hasta 0, por lo cual

$$\zeta^2 = \rho^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i\rho^2, \quad d\zeta = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) d\rho$$

y

$$J_3(R) = \int\limits_{BO} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int\limits_R^0 e^{-\rho^2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) d\rho =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\int\limits_0^R e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int\limits_0^R e^{-\rho^2} d\rho.$$

Al hacer crecer indefinidamente a R, $J_3(R)$ tenderá al límite

$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$, puesto que $\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *).

---

*) En efecto,

$$\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R} e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta = \left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-\xi^2} d\xi\right)^2 = 4\left(\int\limits_0^R e^{-\xi^2} d\xi\right)^2. \qquad (\alpha)$$

En el cuadrado con el centro en el origen de coordenadas, cuyos lados, de longitud a $2R$, son paralelos a los ejes de coordenadas, inscribamos un círculo k y circunscribamos un círculo K. Entonces, como la función subintegral es positiva

$$\iint\limits_k e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta < \int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R} e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta < \iint\limits_K e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta,$$

Demostremos que $J_2(R) \to 0$ cuando $R \to \infty$. Para esto, acotemos el módulo $|J_2(R)|$. Se tiene:

$$|J_2(R)| \leqslant R \int_0^{\pi/4} |\exp\{iR^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi\}| \cdot |\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi|\, d\varphi.$$

Aquí

$$|\exp\{iR^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi)\}| = \exp(-R^2 \operatorname{sen} 2\varphi)$$

y $|\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi| = 1$; debido a lo cual

$$|J_2(R)| \leqslant R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(-R^2 \operatorname{sen} 2\varphi)\, d\varphi.$$

Pero $\operatorname{sen} 2\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot 2\varphi$ para $0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ *).

---

o bien, sustituyendo las coordenadas cartesianas rectangulares ξ y η por las polares ρ y φ y aplicando la fórmula (α), tendremos:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi < 4\left(\int_0^{R} e^{-\xi^2}\, d\xi\right)^2 < \int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Efectuando la integración y extrayendo la raíz cuadrada de todos los miembros de la desigualdad, hallamos:

$$\sqrt{\pi(1-e^{-R^2})} < 2\int_0^{R} e^{-\xi^2}\, d\xi < \sqrt{\pi(1-e^{-2R^2})},$$

de donde

$$\lim_{R\to\infty} 2\int_0^{R} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi} \quad \text{o} \quad \int_0^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) En efecto, la función $f(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ decrece en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, puesto que su derivada

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha^2} = \frac{\cos\alpha\,(\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}{\alpha^2} < 0$$

cuando $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Por esto mismo $f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, o sea, $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, o bien

$$\operatorname{sen}\alpha > \frac{2}{\pi}\alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta desigualdad se convierte en igualdad para $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Por consiguiente,

$$|J_2(R)| \leqslant R \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{4}{\pi} R^2\varphi\right) d\varphi = R \left.\frac{\exp\left(-\frac{4}{\pi} R^2\varphi\right)}{-\frac{4}{\pi} R^2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-R^2}}{R},$$

de donde se deduce que

$$\lim_{R\to\infty} J_2(R) = 0.$$

Consideremos, finalmente,

$$J_1(R) = \int_0^R e^{i\xi^2} d\xi = \int_0^R \cos \xi^2 \, d\xi + i \int_0^R \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi.$$

Como $J_1(R) + J_2(R) + J_3(R) = 0$ para cualquier R, se tiene que $J_1(R) = -J_2(R) - J_3(R)$ y

$$\lim_{R\to\infty} J_1(R) = -\lim_{R\to\infty} J_2(R) - \lim_{R\to\infty} J_3(R) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i),$$

es decir,

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \cos \xi^2 \, d\xi + i \int_0^R \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i).$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que existen las integrales

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 \, d\xi = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos \xi^2 \, d\xi \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi$$

y, en segundo lugar, que

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 \, d\xi = \int_0^\infty \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

2. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x)\, dx \qquad (\lambda > 0,\ \alpha > 0).$$

Para calcularla integraremos la función $f(z)=e^{-\lambda z^2}$ sobre el contorno L del rectángulo representado en la fig. 50. Como esta función es derivable en todo el plano, puede aplicársele el teorema integral. Por consiguiente,

$$\int_L e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_{AB} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta+\int_{BC} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta+\int_{CD} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta+\int_{DA} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=0.$$

Sobre AB

$$\zeta=x\;(-R\leqslant x\leqslant R)\;\text{ y }\;d\zeta=dx;$$

por lo tanto,

$$J_1=\int_{AB} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2}\,dx.$$

Sobre BC

$$\zeta=R+iy\quad(0\leqslant y\leqslant\alpha),\quad \zeta^2=R^2+2iRy-y^2\quad\text{y}\quad d\zeta=i\,dy,$$

por lo tanto,

$$J_2=\int_{BC} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_0^{\alpha}\exp\left[-\lambda\,(R^2+i2Ry-y^2)\right]i\,dy=$$

$$=i\int_0^{\alpha}\exp\left[-\lambda\,(R^2-y^2)\right]\exp\left(-2Riy\lambda\right)dy.$$

Sobre CD

$$\zeta=x+i\alpha\,(R\geqslant x\geqslant -R),\quad \zeta^2=x^2+2i\alpha x-\alpha^2\quad\text{y}\quad d\zeta=dx,$$

por consiguiente,

$$J_3=\int_{CD} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_{+R}^{-R}\exp\left[-\lambda\,(x^2+2i\alpha x-\alpha^2)\right]dx=$$

$$=-e^{\lambda\alpha^2}\int_{-R}^{+R}\exp\left(-\lambda x^2-2i\alpha\lambda x\right)dx=$$

$$=-e^{\lambda\alpha^2}\int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2}\left[\cos\left(2\lambda\alpha x\right)-i\,\text{sen}\left(2\lambda\alpha x\right)\right]dx.$$

Finalmente, sobre DA

$$\zeta=-R+iy\,(\alpha\geqslant y\geqslant 0),\quad \zeta^2=R^2-2Riy-y^2\quad\text{y}\quad d\zeta=i\,dy;$$

por lo tanto

$$J_4 = \int\limits_{DA} e^{-\lambda\zeta^2}\, d\zeta = \int\limits_{\alpha}^{0} \exp\left[-\lambda\,(R^2 - 2Riy - y^2)\right] i\, dy =$$

$$= -i \int\limits_{0}^{\alpha} \exp\left[-\lambda\,(R^2 - y^2)\right] \exp\,(2Riy\lambda)\, dy.$$

Supongamos ahora que R crece indefinidamente. Entonces las integrales J_2 y J_4 tenderán a cero. En efecto,

$$|J_2| \leqslant \int\limits_{0}^{\alpha} \left|\exp\left[-\lambda\,(R^2 - y^2)\right]\right| \left|\exp\,(-2iR\lambda y)\right| dy = \int\limits_{0}^{\alpha} e^{-\lambda(R^2 - y^2)}\, dy.$$

Cuando $R > \alpha$, obtenemos:

$$|J_2| \leqslant \int\limits_{0}^{\alpha} \exp\left[-\lambda\,(R^2 - \alpha^2)\right] dy = \alpha \exp\left[-\lambda\,(R^2 - \alpha^2)\right] \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Del mismo modo

$$|J_4| \leqslant \int\limits_{0}^{\alpha} \left|\exp\left[-\lambda\,(R^2 - y^2)\right]\right| \left|\exp 2iR\lambda y\right| dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{\alpha} \exp\left[-\lambda\,(R^2 - y^2)\right] dy \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

La integral J_1, cuando $R \to \infty$, tiende al límite

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\,(-\lambda x^2)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(\sqrt{\lambda}\, x)^2\right] d\,(\sqrt{\lambda}\, x) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,,$$

$\left(\text{puesto que } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\text{; véase el ejemplo anterior}\right)$.

Finalmente, de la relación

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$$

obtenemos:

$$e^{\lambda\alpha^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \left[\cos\,(2\lambda\alpha x) - i \operatorname{sen}\,(2\lambda\alpha x)\right] dx =$$

$$= -\lim_{R\to\infty} J_3 = \lim_{R\to\infty} J_1 + \lim_{R\to\infty} J_2 + \lim_{R\to\infty} J_4 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,.$$

Igualando en esta relación las partes reales, resulta:

$$e^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,,$$

o sea,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{-\lambda\alpha^2}.$$

3. La integral

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Tomemos la funcion auxiliar $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$. Esta función está definida en el recinto G, formado por todos los puntos del plano,

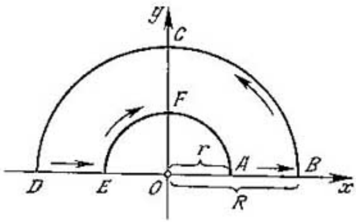

FIG. 51

a excepción del origen de coordenadas, y es derivable en este recinto (nos convencemos de esto último derivando directamente:

$$\left.\frac{df(z)}{dz}=\frac{e^{iz}(iz-1)}{z^2}\right).$$

Tomando el circuito de integración L representado en la fig. 51 (este circuito, así como su interior, está situado en el recinto G), aplicando el teorema integral a la función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, hallamos:

$$\int_L\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}=\int_{AB}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}+\int_{BCD}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}+\int_{DE}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}+\int_{EFA}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}=0.$$

Sobre AB ζ es igual al número real ξ. Por lo tanto, $d\zeta = d\xi$ y

$$J_1 = \int_{AB} \frac{e^{i\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = \int_r^R \frac{e^{i\xi}\, d\xi}{\xi} = \int_r^R \frac{\cos \xi\, d\xi}{\xi} + i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} \xi\, d\xi}{\xi}.$$

Sobre BCD $\zeta = R(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, por lo cual $d\zeta = R(-\operatorname{sen}\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi = iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi$ y

$$J_2 = \int_{BCD} \frac{e^{i\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = \int_0^\pi \frac{\exp[iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi]\, iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi}{R(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} =$$

$$= i\int_0^\pi \exp(iR\cos\varphi - R\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Sobre DE ζ es igual al número real ξ; por esta razón, $d\zeta = d\xi$ y

$$J_3 = \int_{DE} \frac{e^{i\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}\, d\xi}{\xi} = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos\xi\, d\xi}{\xi} + i\int_{-R}^{-r} \frac{\operatorname{sen}\xi\, d\xi}{\xi}.$$

Sustituyendo aquí la variable de integración ξ por $-\xi$, obtenemos:

$$J_3 = -\int_r^R \frac{\cos\xi\, d\xi}{\xi} + i\int_r^R \frac{\operatorname{sen}\xi\, d\xi}{\xi}.$$

Finalmente, sobre EFA

$$\zeta = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \quad (\pi \geqslant \varphi \geqslant 0);$$

por lo cual

$$d\zeta = ir(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi$$

y

$$J_4 = \int_{EFA} \frac{e^{i\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = \int_\pi^0 \frac{\exp[ir(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)]\, ir(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= -i\int_0^\pi \exp(ir\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Supongamos que R crece indefinidamente; entonces

$$J_2 = i\int_0^\pi \exp(iR\cos\varphi - R\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi$$

tenderá a cero. En efecto,

$$|J_2| = \left| \int_0^{\pi} \exp(iR\cos\varphi - R \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} |\exp(iR\cos\varphi - R\operatorname{sen}\varphi)|\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \exp(-R\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi <$$

$$< 2\int_0^{\pi/2} \exp\left(-R\frac{2}{\pi}\varphi\right) d\varphi = \pi\frac{1-e^{-R}}{R} < \frac{\pi}{R},$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{R\to\infty} J_2 = 0$.

Supongamos, finalmente, que r tiende a cero; hallemos el límite de la integral J_4, igual a

$$-i\int_0^{\pi} \exp(ir\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Como la función $\exp(iz)$ es continua en el punto $z=0$, en el cual toma el valor 1, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para $|z| = r < \delta(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$|\exp(iz) - 1| = |\exp(ir\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi) - 1| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que

$$\left| J_4 - \left(-i\int_0^{\pi} 1\cdot d\varphi\right)\right| = \left|\int_0^{\pi} [\exp(ir\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi) - 1]\, d\varphi\right| < \pi\varepsilon,$$

o sea,

$$\lim_{r\to 0} J_4 = -i\int_0^{\pi} 1\cdot d\varphi = -\pi i.$$

Volviendo a la relación fundamental

$$\int_L \frac{e^{i\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0,$$

deducimos de ésta que: $J_1 + J_3 = -J_2 - J_4$, o bien, aplicando las expresiones para J_1 y J_3 señalados anteriormente:

$$2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen}\xi\, d\xi}{\xi} = -J_2 - J_4.$$

Cuando $R\to\infty$ y $r\to 0$, como ya se vio, el segundo miembro tiende al límite: $-\lim\limits_{R\to\infty} J_2-\lim\limits_{r\to 0} J_4=\pi i$. Por consiguiente, el primer miembro también tiende al mismo límite:

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} 2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi=\pi i.$$

Designando $\lim\limits_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_r^R \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi$, cuya existencia hemos demostrado, mediante $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi$, obtenemos: $2i\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi=\pi i$, o bien, definitivamente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi=\frac{\pi}{2}\,.$$

2.5. Hemos demostrado el teorema integral para las funciones analíticas en los recintos simplemente conexos. Fácilmente se observa que este teorema no se extiende sin reserva alguna para los recintos que no son simplemente conexos. Examinemos, por ejemplo, la función $f(z)=\frac{1}{z}$, derivable para cualquier $z\neq 0$. Aquí se puede tomar por recinto G todo el plano finito, excluyendo del mismo el origen de coordenadas. Evidentemente, G no es un recinto simplemente conexo, puesto que el interior de cualquier circunferencia γ con el centro en el origen de coordenadas, perteneciente a G, no pertenece completamente a G. Por otra parte $\int\limits_\gamma \frac{1}{z}\,dz=2\pi i\neq 0$ (ap. 1.3, ejemplo 3).

Sin embargo, con ciertas restricciones impuestas a las curvas, el teorema integral puede aplicarse también a los recintos G que no son simplemente conexos. Supongamos, en primer lugar, que L es un triángulo perteneciente al recinto G junto con todos sus puntos interiores. Entonces, para cualquier función $f(z)$ uniforme y analítica en el recinto G (que no es simplemente conexo) son aplicables a la integral $\int\limits_L f(z)\,dz$ todos los razonamientos del ap. 2.3, b) y, por consiguiente, $\int\limits_L f(z)\,dz=0$. Llegaremos a la misma conclusión, con referencias al ap. 2.3, c), cuando L sea una poligonal cerrada arbitraria perteneciente a G tal, que todos los recintos poligonales

limitados por la misma pertenezcan a G. Sea, finalmente, L una curva rectificable cerrada arbitraria, perteneciente a G. Consideremos la integral $\int_L f(z)\,dz$. Según el lema del ap. 2.2, esta integral puede sustituirse por las integrales sobre las poligonales Λ inscritas en Γ y pertenecientes al recinto G, con una precisión $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeña. Si para tales poligonales, de lados suficientemente pequeños, los recintos poligonales limitados por ellas pertenecen

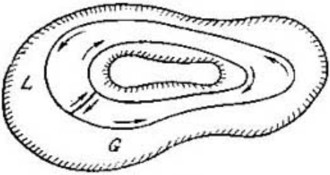

FIG. 52

a G, entonces las integrales correspondientes se anulan y, por consiguiente, también tiene que ser igual a cero la integral a lo largo de L (compárese con el ap. 2.3, d)).

Las condiciones indicadas son suficientes para que la integral de una función analítica $\int_L f(z)\,dz$, tomada a lo largo de una curva rectificable cerrada, perteneciente a un recinto que no es simplemente conexo, sea igual a cero. Estas condiciones se satisfacen cuando L, por ejemplo, pertenece a un recinto g simplemente conexo, que sea un subrecinto respecto de G, y no solamente en este caso. En la fig. 52 está representada una curva L perteneciente a un recinto G biconexo. Evidentemente, no existe un subrecinto simplemente conexo del recinto G que contenga a L. No obstante, para L se cumplen las condiciones expuestas anteriormente y, por consiguiente, $\int_L f(z)\,dz = 0$ para cualquier función $f(z)$ que sea analítica en G.

Teniendo en cuenta las observaciones hechas, no es difícil demostrar que se verifica el siguiente teorema, que aplicaremos a menudo.

T e o r e m a i n t e g r a l p a r a u n s i s t e m a d e c i r c u i t o s. *Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en un recinto arbitrario G y sea $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ un sistema de curvas de Jordan rectificables y cerradas, que están situadas en el recinto G y satisfacen a las siguientes condiciones:*

a) *las curvas* γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *pertenecen al interior de* Γ;

b) *para cualquier* k_0 $(k_0 = 1, 2, \ldots, n)$ *las curvas* γ_k *para* $k \neq k_0$ *están situadas en el exterior de* γ_k ;

c) *el recinto múltiplemente conexo* g, *limitado por las curvas* $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (*éste se obtiene exluyendo del interior de* Γ *los recintos*

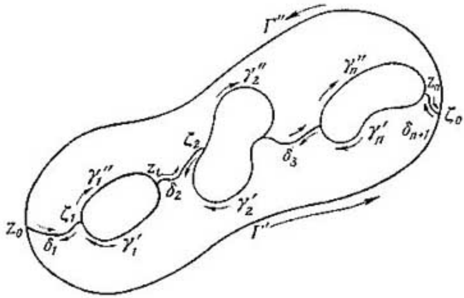

FIG. 53

cerrados limitados por las curvas γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$), *pertenece al recinto* G.

En estas condiciones, se verifica la igualdad

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz, \qquad (2.5:1)$$

donde todas las integrales se toman en un mismo sentido, por ejemplo, de modo que los interiores de las curvas queden a la izquierda del observador que recorre las curvas en dirección de la integración (*dirección positiva*).

Obsérvese que la tesis del teorema es trivial cuando el recinto G es simplemente conexo, puesto que en este caso todas las integrales en la igualdad (2.5:1) se anulan.

Para demostrar el teorema en el caso general, tracemos en el recinto G unos arcos de Jordan rectificables $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n', \delta_{n+1}'$ que unan consecutivamente un punto z_0 de la curva Γ con un punto ζ_1 de la curva γ_1, luego, un punto $z_1 \neq \zeta_1$ de la curva γ_1 con un punto ζ_2 situado en la curva γ_2, etc, finalmente, un punto z_n de la curva γ_n con un punto $\zeta_0 \neq z_0$ de la curva Γ. Por lo general, estos arcos saldrán parcialmente de los márgenes del recinto g. Pero siempre pueden sustituirse por otros arcos: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$ que, a excepción de sus extremos, pertenecen por completo al recinto g (fig. 53). Con

este fin, es suficiente, por ejemplo, señalar en el arco δ_1', recorrido en la dirección desde el punto $z_0 \in \Gamma$ hacia el punto ζ_1 situado en γ_1, su último punto de intersección con Γ y su primer punto de intersección con γ_1. La parte del arco δ_1' comprendida entre los puntos indicados será el arco δ_1 que se necesita. Del mismo modo se obtienen también $\delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$. Por lo general, arcos distintos δ_k y δ_m $(k \neq m)$ pueden tener puntos de intersección. Pero siempre pueden sustituirse por otros arcos que satisfagan a las condiciones impuestas y carezcan de puntos comunes dos a dos. Aquí no nos detendremos en esto, dejando realizar al lector los razonamientos necasarios. Los puntos iniciales y finales de los arcos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$ dividirán a cada una de las curvas $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ en dos partes, que designaremos con la misma letra que la curva entera, pero con una o dos rayitas por encima: $\Gamma', \Gamma'', \gamma_1', \gamma_1'', \ldots, \gamma_n', \gamma_n''$. Consideraremos que el origen de los arcos Γ' y Γ'' es el origen z_0 del arco δ_1 y el extremo, el extremo ζ_0 del arco δ_{n+1}; el origen de los arcos γ_1' y γ_1'' será el extremo ζ_1 del arco δ_1 y el extremo será el origen z_1 del arco δ_2, etc; finalmente, el origen de los arcos γ_n' y γ_n'' será el extremo ζ_n del arco δ_n y el extremo será el origen z_n del arco δ_{n+1}. Los arcos Γ', Γ''; γ_1', γ_1''; $\ldots$; γ_n', γ_n'', forman conjuntamente con los arcos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$ dos curvas rectificables de Jordan cerradas. Por ejemplo, una de ellas Λ' estará formada por los arcos $\Gamma', -\delta_{n+1}, -\gamma_n', -\delta_n, \ldots, -\gamma_1', -\delta_1$, mientras que la otra, Λ'' por los arcos $-\Gamma''$, $\delta_1, \gamma_1'', \ldots, \delta_n, \gamma_n''$.

Debido a la construcción, los interiores de las curvas Λ' y Λ'' estarán situados en el recinto g y, por consiguiente, pertenecerán al recinto G. Por lo tanto, puede aplicárseles a éstas el teorema integral de Cauchy:

$$\int_{\Lambda'} f(z)\, dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Lambda''} f(z)\, dz = 0.$$

Sumando término a término las igualdades obtenidas y observando que las partes de las integrales sobre los arcos δ_k y $-\delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ se eliminan entre sí, mientras que las partes de las integrales sobre los pares de arcos $\Gamma', -\Gamma'', -\gamma_1', \gamma_1'', \ldots, -\gamma_n', \gamma_n''$ dan las integrales $\int_{\Gamma} f(z)\, dz$, $\int_{-\gamma_1} f(z)\, dz, \ldots, \int_{-\gamma_n} f(z)\, dz$, obtenemos:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz + \int_{-\gamma_1} f(z)\, dz + \ldots + \int_{-\gamma_n} f(z)\, dz = 0,$$

o bien,

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\, dz.$$

Este es el resultado que se necesitaba.

2.6. Consideremos una función uniforme $f(z)$, analítica en un recinto G simplemente conexo. Sea z_0 un punto fijado del recinto G y L' y L'', dos curvas rectificables situadas en este recinto que unan el punto z_0 con un punto arbitrario z del recinto G. Si se supone que z_0 es el punto inicial y z el punto final de las curvas L' y L'', entonces las curvas L' y $-L''$ formarán conjuntamente una curva rectificable cerrada, sobre la cual la integral de $f(z)$, debido al teorema integral, tendrá que ser igual a cero. Pero esto significa que

$$\int_{L'} f(z)\,dz + \int_{-L''} f(z)\,dz = 0,$$

es decir,

$$\int_{L'} f(z)\,dz = \int_{L''} f(z)\,dz.$$

Así, pues, el valor de la integral de una función analítica $f(z)$ no depende de la curva sobre la cual se efectúe la integración (del camino de integración), sino que depende sólo de los puntos inicial y final de la misma. Por esta razón, para designar la integral se puede emplear la notación

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

omitiendo la indicación del camino de integración y señalando solamente los puntos inicial y final z_0 y z.

Como el punto z_0 está fijado, esta integral representa una función uniforme de z:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Demostremos que ésta es una función analítica en el recinto G y que su derivada es igual a la función subintegral

$$F'(z) = f(z).$$

Como la función $f(z)$ es continua se puede trazar un entorno U del punto z de modo que, en primer lugar, este entorno pertenezca al recinto G, y, en segundo lugar, para cualquiera de sus puntos ζ se cumpla la desigualdad

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Designemos mediante γ alguna curva rectificable que una z_0 y z por el interior del recinto G, y mediante δ, el segmento rectilíneo que una el punto z con un punto arbitrario ζ del entorno indicado.

Entonces (designando la variable de integración con la letra t), tendremos:

$$F(\zeta)-F(z)=\int_{\gamma+\delta} f(t)\,dt-\int_{\gamma} f(t)\,dt=\int_{\delta} f_1(t)\,dt$$

y

$$\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}-f(z)=\frac{\int_{\delta} f(t)\,dt-f(z)(\zeta-z)}{\zeta-z}=$$
$$=\frac{\int_{\delta} f(t)\,dt-f(z)\int_{\delta} dt}{\zeta-z}=\frac{\int_{\delta} [f(t)-f(z)]\,dt}{\zeta-z}.$$

Pero para todos los puntos $t\in\delta$, se tiene:

$$|f(t)-f(z)|<\varepsilon;$$

por consiguiente,

$$\left|\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}-f(z)\right|=\frac{\left|\int_{\delta} [f(t)-f(z)]\,dt\right|}{|\zeta-z|}\leqslant\frac{\varepsilon\delta}{|\zeta-z|}=\varepsilon \qquad (\zeta\in U).$$

Como ε es arbitrario, de la última desigualdad se deduce que

$$\lim_{\zeta\to z}\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}=f(z), \text{ es decir } F'(z)=f(z),$$

que es lo que se quería demostrar.

Llamaremos, en general, a una función $\Phi(z)$ primitiva de la función $f(z)$ en el recinto G, si $\Phi(z)$ es analítica en el recinto G y $\Phi'(z)=f(z)$. De lo demostrado se deduce que la integral $F(z)=$ $=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ es una primitiva de $f(z)$.

Demostremos que cualquier primitiva de $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz+C,$$

donde C es cierto número complejo (constante arbitraria).

En efecto, sea

$$\Phi(z)-\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz=u(x, y)+iv(x, y)=\varphi(z).$$

Entonces tendremos:

$$\varphi'(z)=\Phi'(z)-f(z)\equiv 0.$$

Por otra parte,

$$\varphi'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

en el recinto G, y como $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones diferenciables de x e y, se tiene:

$$u(x, y)\equiv C_1 \quad \text{y} \quad v(x, y)\equiv C_2,$$

o bien,

$$\varphi(z)\equiv C_1+iC_2=C.$$

Así, pues,

$$\Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz+C,$$

como se quería demostrar.

Poniendo aquí $z=z_0$, obtenemos:

$$\Phi(z_0)=C.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

Hemos obtenido la expresión de la integral de una función analítica de variable compleja mediante una primitiva arbitraria de $f(z)$. De aquí se deducen numerosas fórmulas para las integrales de las funciones elementales, que tienen la misma forma que las fórmulas correspondientes para las funciones de variable real. Así, por ejemplo, $\int\limits_{z_0}^{z} z^n\,dz=\frac{z^{n+1}-z_0^{n+1}}{n+1}$ (n es un número entero, diferente de -1):

$$\int\limits_{z_0}^{z} \exp z\,dz=\exp z-\exp z_0;$$

$$\int\limits_{z_0}^{z} \cos z\,dz=\operatorname{sen} z-\operatorname{sen} z_0;$$

$$\int\limits_{z_0}^{z} \operatorname{sen} z\,dz=\cos z_0-\cos z,$$

etc.

2.7. Supongamos ahora que G es un recinto que no es simplemente conexo y que $f(z)$ es una función uniforme y analítica en este recinto. Fijando algún punto z_0 de este recinto, consideremos dos curvas rectificables L' y L'' que unan z_0 con un punto arbitrario z del recinto G. Generalmente, no se puede afirmar que las integrales $\int\limits_{L'} f(z)\,dz$ y $\int\limits_{L''} f(z)\,dz$ sean iguales entre sí.

En efecto, tal afirmación sería equivalente a decir que la integral de $f(z)$ sobre la curva cerrada $L' - L''$ es igual a cero, cosa que para las curvas pertenecientes a un recinto múltiplemente conexo, puede no cumplirse.

Designando como anteriormente la integral $\int\limits_{L} f(z)\,dz$, tomada a lo largo de la curva que une los puntos z_0 y z, mediante $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, podemos considerarla de nuevo como una función del límite superior de integración:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z). \tag{2.7:1}$$

Pero esta vez la función $F(z)$ será multiforme (puesto que sus valores, por lo general, variarán conjuntamente con el camino de integración). Cerciorémonos de que en cualquier recinto g simplemente conexo, perteneciente a G, se pueden elegir ramas uniformes y continuas de la función (2.7:1), que serán en este recinto diversas primitivas de $f(z)$ y, por consiguiente, se diferenciarán una de otra en constantes aditivas. Con este fin, fijemos uno de los valores de $F(z)$ en cierto punto $z_1 \in g$, es decir, fijemos un camino de integración L que una z_0 y z_1 en el recinto G, e integremos después $f(z)$ sobre todas las curvas rectificables l posibles, que unan dentro del recinto g el punto z_1 con todos los puntos posibles de este recinto. Obtendremos el valor de $F(z)$ en la forma

$$F(z) = \int\limits_{L} f(z)\,dz + \int\limits_{l} f(z)\,dz.$$

El segundo término del segundo miembro de esta fórmula es la integral de la función uniforme y analítica $f(z)$, tomada sobre la curva l, perteneciente al recinto simplemente conexo g que une z_1 y z. Según el ap. 2.6, ésta es una función uniforme de z, que representa una de las primitivas de $f(z)$ en el recinto g.

Hagamos

$$\int_l f(z)\,dz = \varphi(z).$$

Entonces tendremos una rama uniforme de la función $F(z)$ en el recinto g de la forma siguiente:

$$F(z) = \int_L f(z)\,dz + \varphi(z). \tag{2.7:2}$$

Aquí, el primer sumando representa uno de los valores de $F(z)$ en el punto $z_1 \in g$. Variándolo de todos los modos posibles, obtendremos distintas ramas uniformes de la función $F(z)$ en el recinto g que, por lo tanto, se diferenciarán una de otra en constantes aditivas y serán distintas primitivas de $f(z)$ en el recinto g.

Obsérvese que los valores de las ramas (2.7:2) obtenidas agotan todos los valores posibles de la integral $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ sobre todas las curvas del recinto G que unen el punto z_0 con un punto arbitrario z del recinto g. En efecto, sea Λ una curva rectificable arbitraria del recinto G que una z_0 con z, y sea λ cualquier curva rectificable del recinto g que una z_1 con z. Entonces, tendremos:

$$\int_\Lambda f(z)\,dz = \int_\Lambda f(z)\,dz - \int_\lambda f(z)\,dz + \int_\lambda f(z)\,dz = \int_{\Lambda+(-\lambda)} f(z)\,dz + \int_\lambda f(z)\,dz.$$

Aquí $\Lambda + (-\lambda)$ es una curva rectificable del recinto G que une z_0 con z_1; designémosla con L. La integral $\int\limits_\lambda f(z)\,dz$ es el valor de la función $\varphi(z)$ en el punto z. Por lo tanto,

$$\int_\Lambda f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz + \varphi(z),$$

es decir, cualquier valor de la integral $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ coincide con el valor en el punto z de una de las ramas uniformes (2.7:2).

Supongamos, por ejemplo, que G es el plano del cual se han excluido los puntos 0 y ∞, y $f(z) = \frac{1}{z}$. Tomemos por recinto simplemente conexo g, por ejemplo, el plano del cual se ha excluido la parte no positiva del eje real: $x \leqslant 0$, $y = 0$; sea, finalmente, $z_1 = z_0 = 1$.

Entonces tendremos:

$$F(z)=\int_L \frac{dz}{z}+\varphi(z), \quad \text{donde} \quad \varphi(z)=\int_1^z \frac{dz}{z}$$

y la integración se efectúa sobre curvas situadas por completo en el recinto g, mientras que L es una curva rectificable cualquiera del recinto G que comienza en el punto z_0 y termina en el punto $z_1 = z_0$, es decir, es una curva rectificable cerrada.

Según el ap. 2.6, $\varphi(z)$ se expresa mediante cualquier primitiva $\Phi(z)$ de la función $\frac{1}{z}$ en el recinto g por la fórmula

$$\varphi(z)=\Phi(z)-\Phi(1).$$

Se puede tomar por primitiva cualquier rama uniforme del logaritmo en el recinto g, por ejemplo, la rama que toma el valor 0 en el punto $z = 1$. Esta rama representa el valor principal del logaritmo:

$$\Phi(z)=\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

Por consiguiente,

$$\varphi(z)=\Phi(z)-\Phi(1)=\ln z$$

y

$$F(z)=\int_L \frac{dz}{z}+\ln z.$$

Tomemos por L la circunferencia unidad γ, recorrida n veces en la dirección positiva o negativa. Como al recorrer una vez en la dirección positiva la integral correspondiente es igual a $2\pi i$ (véase el ejemplo 3 en el ap. 1.3), resulta

$$\int_L \frac{dz}{z}=\int_{\pm n\gamma}\frac{dz}{z}=\pm\left(\int_\gamma \frac{dz}{z}+\ldots+\int_\gamma \frac{dz}{z}\right)=\pm 2n\pi i,$$

y obtenemos:

$$F(z)=\ln z\pm 2n\pi i.$$

Aquí n es diferente de cero; si se toma por L alguna curva rectificable de Jordan cerrada del recinto G que no contenga en su interior al origen de coordenadas, entonces a la integral $\int_L \frac{dz}{z}$ puede aplicársele el teorema integral y obtenemos: $\int_L \frac{dz}{z}=0$. Así, pues, como valores de la integral $\int_L \frac{dz}{z}$ puede resultar cualquier entero múltiplo

de $2\pi i$, y obtenemos definitivamente las siguientes ramas uniformes de $F(z)$ en el recinto g:

$$F(z) = \ln z + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Como la curva cerrada L del recinto G, que pasa por el punto 1, y la curva l que une el punto 1 con el punto z del recinto g, forman conjuntamente una curva rectificable del recinto G, que une 1 con z, en lugar de $F(z)$ se puede escribir simplemente $\int\limits_1^z \frac{dz}{z}$. El segundo miembro de la fórmula da todos los valores del logaritmo $\operatorname{Ln} z$ en el punto z. Por consiguiente,

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z \qquad (z \in g).$$

Aquí vemos que todos los valores de $\operatorname{Ln} z$ en cualquier punto z del recinto g pueden obtenerse integrando la función $\frac{1}{z}$ a lo largo de las curvas correspondientes del recinto G, que se diferencian entre sí por la cantidad y dirección de recorridos alrededor del origen de coordenadas.

En este ejemplo los puntos de la parte negativa del eje real pertenecían a la frontera del recinto g y por esta razón se excluían. Sin embargo, en lugar del recinto g se podría haber tomado el recinto g' cuya frontera es, por ejemplo, la parte no positiva del eje imaginario: $y \leqslant 0$, $x = 0$, pudiendo repetir los razonamientos precedentes. De nuevo obtendríamos el conjunto de ramas uniformes de la integral $\int\limits_1^z \frac{dz}{z}$, que coincide en g' con todas las ramas uniformes del $\operatorname{Ln} z$. En otras palabras,

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z \qquad (z \in g').$$

En este caso los puntos de la parte negativa del eje real serán puntos interiores del recinto g' y no se excluyen.

Hemos verificado ahora que en cualquier punto finito del plano z, distinto del origen de coordenadas, todos los valores de $\operatorname{Ln} z$ pueden obtenerse en forma de la integral de la función $\frac{1}{z}$, tomada sobre cierto camino rectificable que una los puntos 1 y z. Por lo tanto, la multiplicidad del logaritmo encuentra su significado en la multiplicidad de la integral, que puede tomar diferentes valores a lo largo de distintos caminos que unan 1 con z.

A todo lo dicho hay que agregar aún que todas las ramas uniformes de la integral $\int\limits_1^z \frac{dz}{z}$ (en los recintos del tipo g, g' u otros subrecintos simplemente conexos del recinto G) se agotan con las ramas respectivas de $\operatorname{Ln} z$.

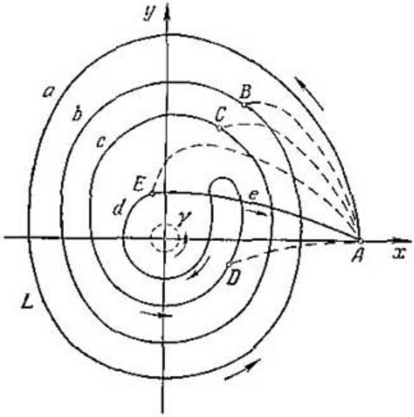

FIG. 54

Para precisar, consideremos el caso del recinto g. Todas las ramas uniformes de $\int\limits_1^z \frac{dz}{z}$ se expresan en este caso por la fórmula (2.7:2), que toma la forma:

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{z} = \int\limits_L \frac{dz}{z} + \ln z,$$

donde L es una curva rectificable cerrada arbitraria del recinto G, que pasa por el punto 1. Para obtener lo que se afirma hay que demostrar que la integral $\int\limits_L \frac{dz}{z}$, para cualquier curva rectificable cerrada L, es igual a un entero múltiplo de $2\pi i$. Limitémonos a estudiar un caso particular, que aclarará suficientemente la esencia del asunto. Sea L la curva cerrada representada en la fig. 54. Agreguemos a L los arcos auxiliares AB, AC, AD y AE, recorridos cada uno

dos veces en direcciones opuestas. Resulta:

$$\int\limits_L \frac{dz}{z}=\int\limits_{AaBA}\frac{dz}{z}+\int\limits_{ABbCA}\frac{dz}{z}+\int\limits_{ACcDA}\frac{dz}{z}+\int\limits_{ADdEA}\frac{dz}{z}+\int\limits_{AEeA}\frac{dz}{z}.$$

Aplicando a cada una de las cuatro curvas cerradas, sobre las cuales se toman las primeras cuatro integrales del segundo miembro, y a la circunferencia γ con el centro en el origen de coordenadas, el teorema integral para el caso de un sistema de curvas (en el caso dado, de un sistema de dos curvas), obtenemos:

$$\int\limits_L \frac{dz}{z}=2\pi i+2\pi i+2\pi i-2\pi i+\int\limits_{AEeA}\frac{dz}{z}.$$

Obsérvese también que la integral $\int\limits_{AEeA}\frac{dz}{z}$, en virtud del teorema integral de Cauchy, es igual a cero. Por consiguiente,

$$\int\limits_L \frac{dz}{z}=2\cdot 2\pi i.$$

Hemos obtenido un entero múltiplo de $2\pi i$. Evidentemente, el razonamiento hecho es de carácter general.

§ 3. INTEGRAL DE CAUCHY. FORMULAS DE Y. SOJOTSKI

3.1. *Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en el recinto G y sea L una curva rectificable de Jordan cerrada, perteneciente a este recinto conjuntamente con su interior g. En estas condiciones se verifica la siguiente fórmula* (que es la fundamental para toda la teoría de las funciones analíticas):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad (z\in g). \tag{3.1:1}$$

Esta se llama fórmula integral de Cauchy, y la integral que figura en el segundo miembro, integral de Cauchy. Para la integral de Cauchy son característicos dos síntomas:

1) ésta se toma sobre una curva rectificable de Jordan cerrada L;

2) la función subintegral es de la forma $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ (el factor $\frac{1}{2\pi i}$ se saca fuera de la integral), donde $f(z)$ es una función analítica en un recinto al cual pertenece la curva L conjuntamente con su interior.

Para demostrar la fórmula (3.1:1) describamos desde el punto z, como centro, una circunferencia γ_ρ de un radio ρ tan pequeño que

quede contenida en el interior de L. Consideremos la función $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ como una función de ζ en el recinto G' que se obtiene de G excluyendo el punto z. Evidentemente, $\varphi(\zeta)$ está definida en todo el recinto G' y, como el cociente de dos funciones derivables, es derivable.

Apliquemos a la función $\varphi(\zeta)$ y a las curvas L y γ_ρ el teorema integral para un sistema de circuitos. Resulta:

$$\int_L \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_\rho} \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

o bien,

$$\int_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.1:2}$$

La fórmula (3.1:1) quedará demostrada si conseguimos verificar la relación

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z). \tag{3.1:3}$$

Por lo tanto, en lugar de la curva dada L podemos considerar en la demostración de la fórmula (3.1:1) una circunferencia de radio arbitrariamente pequeño ρ con el centro en z.

Como de la fórmula (3.1:2) se deduce que el valor de la integral $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$ no varía al disminuir el radio, se tiene:

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

y, por consiguiente, en vez de demostrar (3.1:3) es suficiente verificar la igualdad

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z), \tag{3.1:4}$$

es decir, demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $\rho < \delta(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z) \right| < \varepsilon. \tag{3.1:5}$$

Observando que $\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i$ (véase el ejemplo 3 del ap. 1.3), representemos la expresión del primer miembro de la fórmula (3.1:5) en la forma

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} - f(z) \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta-z} \right| = \left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta \right|.$$

Como $f(z)$ es continua, el módulo de la diferencia $|f(\zeta) - f(z)|$ puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ si $|\zeta - z| = \rho < \delta(\varepsilon)$. En estas condiciones tendremos:

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - 2\pi i f(z) \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2\pi}}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon,$$

con lo cual se termina toda la demostración.

Al aplicar la fórmula de Cauchy (3.1:1) hay que tener presente las condiciones en las cuales se demostró y, en particular, hay que recordar que el punto z tiene que pertenecer al interior del circuito L. Si en la integral de Cauchy se pone algún punto z perteneciente al exterior del circuito L, ésta se anula. En efecto, si el punto z está situado en el exterior del circuito L, entonces la función $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, considerada como función de ζ, es derivable en todos los puntos del recinto G (a excepción, posiblemente, del punto $\zeta = z$), y como la curva L conjuntamente con su interior pertenecen a este último recinto, según el teorema integral de Cauchy, la integral de $\varphi(\zeta)$, tomada a lo largo de L, tiene que ser igual a cero.

En resumen,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0,$$

si z pertenece al exterior del circuito L.

Sea z un punto arbitrario del recinto G y sea γ_ρ una circunferencia de radio ρ con el centro en este punto y contenida en el recinto conjuntamente con su interior. Según la fórmula (3.1:1), se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Como la ecuación de la circunferencia γ_ρ es

$$\zeta = z + \rho e^{i\theta} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

la fórmula precedente puede transformarse a la forma siguiente (véase la fórmula (1.2:5):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})\cdot\rho e^{i\theta}\cdot i\,d\theta}{\rho e^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta. \quad (3.1:6)$$

El enunciado de esta última fórmula dice: *el valor de una función analítica en cualquier punto del recinto G es la media aritmética (el promedio) de sus valores, tomados sobre cualquier circunferencia γ_ρ con el centro en z.*

Hagamos la notación

$$\max_{\gamma_\rho}|f(\zeta)|=M(\rho).$$

Entonces, de la fórmula (3.1:6), tendremos:

$$|f(z)|\leqslant M(\rho). \quad (3.1:7)$$

Como la función $f(\zeta)$ es continua en la circunferencia γ_ρ, el valor $M(\rho)$ se alcanza en algún punto de esta circunferencia. Como su radio puede tomarse lo más pequeño que se quiera, de la desigualdad (3.1:7) se deduce que en cualquier entorno del punto $z\in G$ existirán otros puntos en los cuales el módulo de la función analítica será no menor que su módulo en el punto z. Por lo tanto, *el módulo de una función analítica en el recinto G no puede tener un máximo estricto en ningún punto del recinto.* Tal es el contenido del denominado *principio del módulo máximo*, que lo completaremos esencialmente más adelante (ap. 6.2) demostrando que, si $f(z)\not\equiv$ const, el módulo máximo no estricto tampoco puede alcanzarse en un punto interior del recinto.

3.2. En la teoría de las funciones desempeña un papel importante una generalización de la integral de Cauchy, denominada integral de tipo Cauchy. Así se llama la integral de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \quad (3.2:1)$$

donde Γ es alguna curva rectificable (no necesariamente cerrada), $\varphi(\zeta)$ es una función continua en Γ, y z es un punto no situado en Γ. Evidentemente, la integral de Cauchy es un caso particular de la integral de tipo Cauchy. Precisamente la expresión (3.2:1) se convierte en integral de Cauchy si se cumplen las condiciones 1) y 2) del ap. 3.1.

Veamos algunos ejemplos de integrales de tipo Cauchy que no son integrales de Cauchy:

a) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\delta\frac{f(x)\,dx}{x-z}$,

donde $f(x) \not\equiv 0$ es una función de variable real, continua en un segmento δ del eje real, sobre el cual se toma la integral. En particular, señalemos la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x-z}$;

$$\text{b)}\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\bar{\zeta}\,d\zeta}{\zeta-z};\qquad \text{c)}\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{-2}\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Proponemos al lector explicar en cada uno de estos ejemplos por qué la integral correspondiente no es integral de Cauchy.

Evidentemente, la integral de tipo Cauchy determina una función uniforme $F(z)$ en todo recinto G que no contenga ningún punto de la curva Γ. Demostremos que *esta función posee derivadas de orden cualquiera* (es decir, es infinitamente derivable) *en el recinto G, y que su derivada de cualquier orden n puede obtenerse derivando n veces la función subintegral respecto de z*:

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{3.2:2}$$

La demostración la haremos por inducción. En virtud de la definición de la función $F(z)=F^{(0)}(z)$, la fórmula (3.2:2) es válida para $n=0$ (recuérdese que $0!=1$). Supongamos que la fórmula (3.2:2) ya está demostrada para un entero n no negativo, y demostrémosla para $n+1$. La demostración se hará calculando directamente la derivada de $F^{(n)}(z)$, es decir, hallando el límite:

$$\lim_{z'\to z}\frac{F^{(n)}(z')-F^{(n)}(z)}{z'-z}.$$

Tomemos un círculo cerrado k: $|z'-z|\leqslant\rho$, perteneciente al recinto G. Sea $\delta>0$ la distancia entre su circunferencia y la curva Γ. Supongamos que K: $|z|<R$ es un círculo con el centro en el origen de coordenadas que contiene en su interior tanto al círculo k como a la curva Γ. Para un punto $z'\in k$, se tiene:

$$F^{(n)}(z)'-F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)^{n+1}-(\zeta-z')^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+1}(\zeta-z')^{n+1}}\,d\zeta,$$

o bien, haciendo $\zeta-z=t$, $z'-z=h$ y, por consiguiente, $\zeta-z'=$ $=t-h$:

$$\frac{F^{(n)}(z+h)-F^{(n)}(z)}{h}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\,\frac{(t-h)^{n}+t\,(t-h)^{n-1}+\ldots+t^{n}}{t^{n+1}\,(t-h)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{3.2:3}$$

Queremos demostrar que la expresión (3.2:3), cuando $h \to 0$, tiende a un límite igual a

$$\psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{1}{t^{n+2}}\, d\zeta. \qquad (3.2:4)$$

Consideremos la diferencia

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \psi(z) =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{t(t-h)^n + t^2(t-h)^{n-1} + \ldots + t^{n+1} - (n+1)(t-h)^{n+1}}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{n!\, h}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{(t-h)^n + [t + (t-h)](t-h)^{n-1} + \ldots + [t^n + t^{n-1}(t-h) + \ldots + (t-h)^n]}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}}\, d\zeta.$$

(3.2:5)

En nuestras condiciones

$$2R > |t| = |\zeta - z| > \delta, \qquad 2R > |t-h| = |\zeta - z'| \geqslant \delta.$$

Supongamos que $\mu = \max\limits_\Gamma |\varphi(\zeta)|$ y que λ es la longitud de Γ; de (3.2:5) obtenemos:

$$\left| \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \psi(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!\,|h|}{2\pi} \mu \frac{(2R)^n + 2(2R)^n + 3(2R)^n + \ldots + (n+1)(2R)^n}{\delta^{2n+3}} \lambda.$$

Pero, evidentemente, el segundo miembro tiende a cero cuando $h \to 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = F^{(n+1)}(z) = \psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - t)^{n+2}},$$

con lo cual se termina la demostración.

Del teorema demostrado se deducen unas consecuencias importantes:

a) *Toda función de variable compleja, analítica en un recinto G, es infinitamente derivable en este recinto.*

En efecto, sea $f(z)$ una función analítica en el recinto G; supongamos que z_0 es algún punto de este recinto y que γ es una circunferencia con el centro en el punto z_0, perteneciente al recinto G conjuntamente con todos sus puntos situados en el interior de γ.

Aplicando a $f(z)$ y a γ la fórmula integral de Cauchy, obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \qquad (3.2:6)$$

Así, pues, $f(z)$ se representa en el interior de γ por la integral de Cauchy (y, por lo tanto, por la integral de tipo Cauchy). De aquí, por lo demostrado anteriormente, se deduce que $f(z)$ es indefinidamente derivable en el interior de γ y que

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots). \qquad (3.2{:}7)$$

Claro, en los razonamientos expuestos, en lugar de la circunferencia γ se podría haber tomado una curva rectificable de Jordan cerrada arbitraria L, perteneciente al recinto G conjuntamente con su interior g. Entonces, para cualquier punto $z\in g$ tendremos:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots). \qquad (3.2{:}8)$$

b) *Las derivadas de cualquier orden de una función $f(z)$ que es analítica en un recinto G, también son analíticas en este recinto.*

Esto se deduce de que, según lo demostrado, cada función $f^{(n)}(z)$ es derivable en el recinto G.

c) Teorema de Morera. *Toda función $f(z)$, uniforme y continua en un recinto simplemente conexo G, tal que la integral de $f(z)$ tomada sobre cualquier circuito triangular Δ, situado en el recinto, es igual a cero, es analítica en este recinto.*

De las condiciones del teorema se deduce que la integral de $f(z)$ sobre cualquier circuito poligonal, perteneciente al recinto G, y luego, sobre cualquier circuito rectificable cerrado, es igual a cero (compárese con la demostración del teorema integral de Cauchy). Por lo tanto, el teorema de Morera es el recíproco del teorema integral de Cauchy.

Para demostrar el teorema examinemos la integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz=F(z).$$

En virtud de lo dicho, ésta representa una función uniforme en el recinto G y pueden aplicarse todos los razonamientos del ap. 2.6, según los cuales $F(z)$ es una función analítica, cuya derivada coincide con $f(z)$:

$$F'(z)=f(z).$$

Pero acabamos de ver que la derivada de una función analítica también es analítica. Así, pues, $f(z)$ es una función analítica y con esto se termina la demostración.

d) Volvamos a examinar la fórmula (3.2:7) y hagamos en ella $z=z_0$ (z_0 es el centro de la circunferencia γ). Si ρ es el radio γ

y $M(\rho) = \max\limits_{\gamma} |f(z)|$, entonces para el módulo de la derivada de orden n en el punto z_0 resulta la siguiente cota:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!\,M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{n!\,M(\rho)}{\rho^n}.$$

Evidentemente, este resultado es válido también para $n = 0$ (en este caso se obtiene la desigualdad conocida (3.1:7)).

Así, pues, en cualquier punto z del recinto G se verifican las desigualdades

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant n!\,\frac{M(\rho)}{\rho^n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.2:9)$$

Aquí ρ designa el radio de una circunferencia arbitraria γ con el centro en el punto z, contenida en el recinto G conjuntamente con todos sus puntos interiores, y $M(\rho)$ es el máximo del módulo de la función en γ. Las desigualdades (3.2:9) desempeñan un papel capital en la teoría de las funciones. Estas se llaman **desigualdades de Cauchy**.

La cota dada por las desigualdades (3.2:9) para n y z dados, depende de la magnitud ρ, que se puede tomar arbitrariamente entre los límites $0 < \rho < \Delta$, donde Δ es la distancia desde el punto z hasta la frontera del recinto G.

Cuando se necesita una cota más exacta, se busca el mínimo de la función $\frac{M(\rho)}{\rho^n}$ y se toma precisamente tal valor de ρ para el cual esta función tome el valor mínimo. Para ilustrar esto, supongamos que G es el círculo unidad $|z| < 1$, y que el punto z en el cual se acotan las derivadas es el centro del círculo $z = 0$, y, finalmente, que $M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$ satisface a la desigualdad

$$M(\rho) \leqslant \frac{4}{1-\rho}.$$

Entonces, por la desigualdad (3.2:9), se tiene:

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\,\frac{1}{(1-\rho)\rho^n} \qquad (0<\rho<1),$$

y para obtener la cota óptima se debe buscar el mínimo de la función $\frac{1}{(1-\rho)\rho^n}$, o sea, el máximo de la función $(1-\rho)\rho^n$ en el intervalo $(0,\ 1)$. Aplicando las reglas corrientes del cálculo diferencial hallaremos que el extemo buscado se alcanza para $\rho = \frac{n}{n+1}$ y es igual a $(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e\,(n+1)$. Por consiguiente, para cualquier

$n = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene:

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant e\,(n+1)!.$$

En el caso particular, cuando $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $\left(\text{esta función es analítica en el círculo unidad, y para ella } M(\rho) = \frac{1}{1-\rho}\right)$, mediante un cálculo directo obtenemos:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{y} \quad f^{(n)}(0) = n!.$$

La importancia de las desigualdades de Cauchy consiste en que permiten señalar cotas para las derivadas de una función analítica (no importa que sean elevadas) basándose en el solo conocimiento del valor máximo del módulo de la función $M(\rho)$.

Fijando $\rho < \Delta$ en las desigualdades (3.2:9), escribámoslas en la forma

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leqslant \frac{\sqrt[n]{M(\rho)}}{\rho}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M(\rho)} = 1$, de aquí se deduce que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leqslant \frac{1}{\rho}$$

(la notación $\overline{\lim}$ designa, como ordinariamente, el límite superior de una sucesión de números reales).

Como en esta desigualdad en lugar de ρ se puede tomar cualquier número positivo menor que Δ, pasando al límite cuando $\rho \to \Delta$ obtenemos:

$$\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leqslant \frac{1}{\Delta}. \tag{3.2:10}$$

Esta desigualdad, denominada desigualdad de Cauchy-Hadamard, muestra que la magnitud Λ, que depende de los valores de las derivadas de la función analítica en un punto del recinto G, está ligada con la distancia Δ desde este punto z hasta la frontera del recinto. Esta ligazón se expresa en que el número Λ no puede ser grande allí donde Δ es grande, es decir, donde la frontera del recinto de analiticidad dista mucho del punto z. En particular, para las funciones enteras, es decir, para las funciones que son analíticas en todo el plano, donde el único punto frontera del recinto está en el ∞, $\Delta = \infty$ para cualquier punto del plano y, por consiguiente, $\frac{1}{\Delta} = 0$. Por esto, para las funciones enteras, en cual-

quier punto del plano se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} = 0.$$

Como ejemplo, tomemos $f(z) = \exp z$. Aquí $f^{(n)}(z) = \exp z$ para cualquier n, y, por consiguiente, $|f^{(n)}(z)| = |\exp z| = e^x$. Por otra parte, si $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ $\left(\text{la parte entera de } \frac{n}{2}\right)$ se tiene,

$n! \geqslant n(n-1)\ldots(n-k+1) > k^{n-k}$ y $\sqrt[n]{n!} > k^{1-\frac{k}{n}} \geqslant \sqrt{k}$. Por lo tanto,

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} < \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}} \to 0 \text{ para } n \to \infty.$$

Empleemos el hecho, demostrado en el presente apartado, de que la derivada $f'(z)$ de una función analítica es también analítica y, por consiguiente, continua, para obtener la r e g l a d e s u s t i t u c i ó n d e l a v a r i a b l e e n l a s i n t e g r a l e s d e l a s f u n c i o n e s c o m p l e j a s.

Supongamos que $f(z)$ es una función analítica en el recinto G y sea L una curva rectificable, situada en este recinto. La función $w = f(z)$ transforma la curva L en una curva Γ que también es rectificable. En efecto, si $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, es la ecuación de la curva L, entonces la ecuación de la curva Γ tendrá la forma

$$w = f[\lambda(t)].$$

Considerando una partición arbitraria del segmento $[\alpha, \beta]$ por los puntos $t_0 = \alpha, t_1, \ldots, t_n = \beta$ y haciendo $z_j = \lambda(t_j)$, $w_j = f[\lambda(t_j)]$ hallaremos:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |w_{j+1} - w_j| =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{z_j}^{z_{j+1}} f'(z)\,dz \right| \leqslant \max_L |f'(z)| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |dz| \leqslant \max |f'(z)| \text{ long. } L,$$

de donde se deduce que la curva Γ es rectificable.

Demostremos que para cualquier función $\Phi(w)$, continua en Γ, se verifica la fórmula

$$\int_\Gamma \Phi(w)\,dw = \int_L \Phi[f(z)]\,f'(z)\,dz. \qquad (3.2{:}11)$$

que expresa la regla de sustitución de la variable bajo el signo integral.

Para demostrarla, consideremos las sumas integrales cuyo límite es igual a la integral $\int_\Gamma \Phi(w)\,dw$. Se tiene:

$$\sum_0^{n-1} \Phi(w_j)(w_{j+1}-w_j) = \sum_0^{n-1} \Phi[f(z_j)] \int_{z_j}^{z_{j+1}} f'(z)\,dz.$$

Por otra parte, la integral $\int_L \Phi[f(z)]\,f'(z)\,dz$ puede representarse en la forma $\sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \Phi[f(z)]\,f'(z)\,dz$, y, por consiguiente,

$$\sum_0^{n-1} \Phi(w_j)(w_{j+1}-w_j) - \int_L \Phi[f(z)]\,f'(z)\,dz =$$

$$= \sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \{\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]\}\,f'(z)\,dz.$$

Con una partición del segmento $[\alpha, \beta]$ suficientemente menuda, todas las magnitudes

$$\max_{t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}} |\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]|$$

se pueden hacer menores que cualquier ε. Haciendo luego la notación $M = \max_L |f'(z)|$, obtenemos:

$$\left| \sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \{\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]\}\,f'(z)\,dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon \sum_0^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |dz| \leqslant M\varepsilon \cdot \text{long.}\, L,$$

por consiguiente, las sumas integrales

$$\sum_0^{n-1} \Phi[f(w_j)](w_{j+1}-w_j)$$

tienden al límite

$$\int_L \Phi[f(z)]\, f'(z)\, dz,$$

cuando la partición del curva Γ disminuye indefinidamente.

De aquí se deduce la igualdad (3.2:11).

3.3. Aquí nos dedicaremos al problema de los valores frontera de la integral de tipo Cauchy. Los resultados fundamentales referentes a esto fueron obtenidos por el matemático ruso Y. Sojotski en el año 1873 *). Esta cuestión, en las hipótesis más generales respecto de la curva (que se supone rectificable) y de la función (que se supone sumable en el sentido de Lebesgue), se estudió en los trabajos de V. Gólubiev y Priválov **).

En las obras de Musjelishvili y su escuela se han tratado las aplicaciones de la integral de tipo Cauchy a los problemas de mecánica y sobre todo a la teoría de la elasticidad ***).

Supongamos primero que $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$ es una integral de Cauchy. Entonces, en el recinto g que es interior a la curva L, $F(z)$ coincide con $f(z)$, la cual es analítica en todos los puntos de un recinto G que contiene a L y a g. Por esto, si ζ_0 es algún punto de L, entonces $F(z) = f(z)$ tiende al límite $f(\zeta_0)$ cuando z tiende a ζ_0 por el interior de L. En el exterior a L la integral de Cauchy se anula (véase el ap. 3.1). Por esta razón, cuando z tiende al punto ζ_0 manteniéndose en el exterior de la curva L, la integral de Cauchy tiende al límite cero.

En resumen, para la integral de Cauchy, en cada punto ζ_0 de la curva L existen valores frontera, iguales a $f(\zeta_0)$ por el interior a L e iguales a 0 por el exterior a L.

Consideremos ahora la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ bajo las siguientes hipótesis particulares:

---

*) Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. Сочинение Ю. Сохоцкого, СПб, 1873 (Y. Sojotski, Sobre las integrales definidas y las funciones que se emplean en los desarrollos en series).

**) 1. В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М., 1916 (V. Gólubiev, Funciones uniformes analíticas con un conjunto perfecto de puntos singulares).

2. И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Саратов, 1919 (I. Priválov, Integral de Cauchy).

3. И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций, Гостехиздат, 1950 (I. Priválov, Propiedades de frontera de las funciones uniformes analíticas).

***) 1. N. Musjelishvili, Applications des Intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problémes de la physique mathématique. Tiflis, 1922.

2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения (Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике), М., Физматгиз, 1962 (N. Musjelishvili, Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics Dep of supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949, Noordhoff, Groningen, 1953).

a) γ es una curva rectificable de Jordan,
b) la función $\varphi(\zeta)$ es analítica en cierto entorno de cada punto de la curva γ.

Demostremos que en estas condiciones también existen dos valores frontera de la integral en cada punto $\zeta_0 \in \gamma$, distinto de los extremos de L. A diferencia del caso de la integral de Cauchy, estos valores no se expresarán directamente mediante $\varphi(\zeta_0)$. No obstante, la diferencia de ellos en el punto ζ_0 será igual a $\varphi(\zeta_0)$ (tomando adecuadamente uno de ellos por minuendo y el otro por sustraendo). Por consiguiente, aquí se observa la misma ley que en el caso de la integral de Cauchy, donde la diferencia entre los valores frontera interior y exterior es igual a $f(\zeta_0) - 0 = f(\zeta_0)$.

Para la demostración, tomemos un entorno U del punto ζ_0, de modo que la función $\varphi(z)$ sea analítica en U, y tracemos una circunferencia C con el centro en ζ_0, contenida en U y de un radio tan pequeño que entre los puntos de la curva

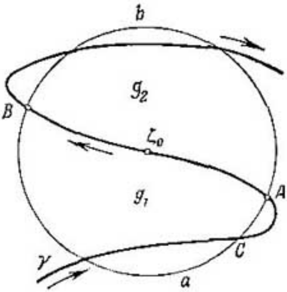

FIG. 55

γ que preceden a ζ_0 y que siguen después de ζ_0 (en dirección de la integración), haya puntos situados en C. Entonces, partiendo del punto ζ_0, primero en dirección del recorrido de la curva γ hasta el primer punto B de intersección de γ con la circunferencia C, y después desde el mismo punto ζ_0 en dirección contraria, también hasta el primer punto A de intersección de γ con la circunferencia C, obtenemos un arco $AB \subset \gamma$ que contiene al punto ζ_0 y pertenece al interior de C, a excepción de sus extremos A y B situados en C. Los puntos A y B dividen a la circunferencia C en dos arcos AaB y AbB, que junto con el arco AB, perteneciente a γ, forman dos curvas de Jordan cerradas γ_1 $(ABaA)$ y γ_2 $(ABbA)$, con las partes interiores g_1 y g_2, situadas dentro de C (fig. 55).

Obsérvese que las designaciones se han adoptado de modo que el recinto g_1 quede a la izquierda del observador que se mueva sobre AB en la dirección de la integración, y el recinto g_2 quede a la derecha del mismo. Supongamos ahora que el punto $z \in g_1$ tiende al límite ζ_0. Como z está situado en el exterior de la curva γ_2, la cual, junto con su interior g_2, pertenece al recinto U, donde la función $\varphi(\zeta)$ es analítica, según el teorema integral de Cauchy se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

o sea,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

De aquí se deduce que para los puntos $z \in g_1$ el valor de la integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

no varía si en lugar del arco AB se efectúa la integración sobre el arco de la circunferencia AbB.

Así, pues, en el recinto g_1 se tiene:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.3:1}$$

donde γ' se obtiene de γ eliminando el arco AB.

Pero $\gamma' + AbB$ es una curva rectificable (que puede no ser de Jordan) y, por consiguiente, la integral (3.3:1) es una integral de tipo Cauchy que, en virtud del ap. 3.2, tiene que representar una función analítica $\Phi_1(z)$ en cualquier entorno del punto ζ_0 que no contenga puntos de la curva $\gamma' + AbB$; en los puntos de este entorno que pertenecen a g_1, como muestra la igualdad (3.3:1), $\Phi_1(z)$ coincide con $F(z)$. Por consiguiente,

$$\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in g_1}} F(z) = \lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in g_1}} \Phi_1(z) = \Phi_1(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \tag{3.3:2}$$

Del mismo modo, para los puntos del recinto g_2 podemos escribir:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AaB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \tag{3.3:3}$$

donde la integral de tipo Cauchy que figura en el segundo miembro representa en un entorno de ζ_0 una función analítica $\Phi_2(z)$ que coincide con $F(z)$ en los puntos de este entorno pertenecientes a g_2.

De aquí se deduce que

$$\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in g_2}} F(z) = \lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in g_2}} \Phi_2(z) = \Phi_2(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' + AaB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \tag{3.3:4}$$

Por lo tanto, queda demostrado que existen dos valores frontera de la integral de tipo Cauchy en un punto arbitrario ζ_0 de la curva rectificable y se han hallado sus valores (3.3:2) y (3.3:4). Uno de ellos, el que corresponde al caso en que z tiende a ζ_0 por el recinto g_1 contiguo al arco $\widehat{AB} \subset \gamma$ hacia la izquierda según la dirección de integración, lo llamaremos valor frontera de la izquierda, y el otro, valor frontera de la derecha; los designaremos mediante $F_I(\zeta_0)$ (3.3:2) y $F_D(\zeta_0)$ (3.3:4), respectivamente.

De las fórmulas (3.3:2) y (3.3:4) se deduce que

$$F_I(\zeta_0) - F_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AbB - AaB} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}.$$

Debido a las hipótesis hechas, la integral obtenida es una integral de Cauchy, formada para la función $\varphi(z)$ y la circunferencia C. Según la fórmula integral de Cauchy, su valor es igual a $\varphi(\zeta_0)$. Resumiendo,

$$F_I(\zeta_0) - F_D(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0), \tag{3.3:5}$$

que es lo que se afirmaba.

Como ejemplo, consideremos la integral de tipo Cauchy

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta}\frac{dx}{x-z},$$

donde Δ representa el segmento del eje real $-1\leqslant x\leqslant 1$ (la integración se efectúa en la dirección del crecimiento de x), y tomemos para mayor sencillez $\zeta_0=0$. Aquí $\varphi(\zeta)=1$ es una función analítica en todo el plano. Por consiguiente, no hay ninguna restricción para elegir la circunferencia C con centro en 0, sin contar la única condición de que en C tienen que estar situados todos los puntos del segmento Δ que precedan al punto 0 y los que sigan después. Tomemos por C la circunferencia unidad. Entonces el arco AB coincidirá con todo el segmento Δ y los arcos de la circunferencia AbB y AaB serán las semicircunferencias inferior y superior, respectivamente.

En la fórmula (3.3:5), para la diferencia de los valores frontera de la integral de tipo Cauchy tendremos que tener:

$$F_I(0)-F_D(0)=\varphi(0)=1.$$

En cuanto a cada uno de éstos por separado, la fórmula (3.3:2) da:

$$F_I(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AbB}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}i\,d\theta}{e^{i\theta}}=\frac{1}{2},$$

y la fórmula (3.3:4):

$$F_D(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AaB}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\theta}i\,d\theta}{e^{i\theta}}=-\frac{1}{2}.$$

3.4. En lo que se refiere al resultado (3.3:5) obtenido en el apartado precedente, se puede hacer una objeción esencial de que éste se ha conseguido suponiendo que la función $\varphi(\zeta)$ es analítica, mientras que en las aplicaciones suele ser frecuentemente importante el caso en que $\varphi(\zeta)$ no es una función analítica.

Debido a esto daremos aquí otra demostración del mismo resultado, que a la vez dará lugar a unas fórmulas importantes para $F_I(\zeta_0)$ y $F_D(\zeta_0)$, distintas de las fórmulas (3.3:2) y (3.3:4).

Sea γ, como anteriormente, una curva rectificable de Jordan y supongamos que $\varphi(\zeta)$ es una función continua en γ. Considerando a ζ como una función de la longitud del arco s, medida desde el punto inicial de γ:

$$\zeta=\lambda(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l\quad (l \text{ es la longitud de } \gamma),$$

supongamos que en cierto punto $\zeta_0=\lambda(s_0)$ $(0<s_0<l)$ existe la derivada $\lambda'(s)$, siendo ésta finita y no nula *).

Supongamos ahora que existen unos números $K>0$ y $\alpha>0$ tales que

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)|<K|\zeta-\zeta_0|^{\alpha}. \tag{3.4:1}$$

Fácilmente se observa que en estas hipótesis la integral impropia

$$I_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta \tag{3.4:2}$$

---

*) En la teoría de funciones de variable real se demuestra que en todo el intervalo $(0, l)$, a excepción, posiblemente, de un conjunto de medida nula, existe $\lambda'(s)$ y $|\lambda'(s)|=1$. Véase, por ejemplo, Ch. de la Vallée Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, Vol. I, 10ª ed., 1947.

es absolutamente convergente. Para cerciorarse de esto, convengamos en designar el arco de la curva γ que corresponde a un segmento determinado de variación de la longitud del arco s: $a \leqslant s \leqslant b$, con la notación $[a, b]$. Entonces, para cualquier arco $[a, b]$ que no contenga al punto ζ_0 (supongamos, para precisar, que $s_0 < a < b$), en virtud de (3.4:1), tendremos:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[a,\,b]} \left| \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} \right| ds < \frac{K}{2\pi} \int\limits_{[a,\,b]} |\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}\, ds.$$

Por la hipótesis, $\lim\limits_{s\to s_0} \left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| = |\lambda'(s_0)| \neq 0$ de donde se deduce que $\left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| > \frac{1}{2} |\lambda'(s_0)|$ para $|\zeta-\zeta_0| < \rho$; si $|\zeta-\zeta_0| \geqslant \rho$, entonces $\left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| > \frac{\rho}{l}$. Así, pues, $\left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| > c > 0$ para todos los puntos $\zeta \in \gamma$. De aquí se deduce que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[a,\,b]} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\, d\zeta \right| < K' \int\limits_a^b (s-s_0)^{\alpha-1}\, ds =$$

$$= K' \frac{(b-s_0)^\alpha-(a-s_0)^\alpha}{\alpha} \to 0$$

cuando a y $b \to s_0$. Por lo tanto, la integral (3.4:2) es absolutamente convergente.

Considerando la integral de tipo Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta,$$

representémosla en la forma

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\, d\zeta \tag{3.4:3}$$

y demostremos que

$$\lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\, d\zeta = I_0. \tag{3.4:4}$$

Aquí se supondrá que z tiende a ζ_0 manteniéndose en el interior de un ángulo arbitrario g_0, de magnitud menor que $2\theta < \pi$, con el vértice en el punto ζ_0 y cuya bisectriz coincide con la normal a la curva en este punto. El modo en que z tiende a ζ_0 se caracteriza diciendo que «*tiende por caminos no tangentes a γ*». En particular, queda satisfecha esta condición cuando el punto z tiende a ζ_0 por la normal a γ. Fácilmente se observa que en un entorno del punto ζ_0 suficientemente pequeño ningún punto de la curva γ caerá en el interior de un ángulo fijado g_{θ_0} (y tampoco en el interior del ángulo opuesto al mismo). En efecto, supongamos lo contrario. Entonces tiene que existir una sucesión de puntos $\zeta_n = \lambda(s_n) \in \gamma$, situados en el interior de g_{θ_0} (o en el interior del ángulo opuesto al mismo) que convergerá a ζ_0. Se puede suponer también que $\{s_n\}$ es convergente, es decir, que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s'$, de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n =$

$= \lambda(s')$. Pero, por otra parte, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0 = \lambda(s_0)$; como γ es una curva de Jordan (y ζ_0 es distinto de sus extremos), sacamos la conclusión de que $s' = s_0$. Por lo tanto, las direcciones de los vectores $\zeta_n - \zeta_0$ tienen que tender a la dirección tangente en el punto ζ_0 y, por consiguiente, todos estos vectores no pueden quedarse en el interior del ángulo g_{θ_0}.

Sea θ un número que satisface a la condición $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; fijemos θ_0, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ y consideremos un entorno $|z - \zeta_0| < \rho$ tal que ningún punto de la curva γ situado en este entorno pertenezca al ángulo g_{θ_0} (y tampoco al

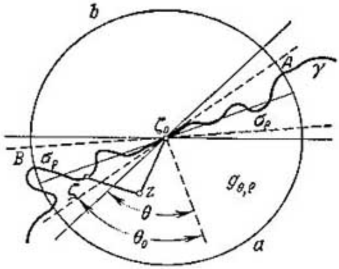

FIG. 56

ángulo opuesto al mismo), y sea $g_{\theta,\rho}$ la parte del ángulo g_θ que pertenece al entorno indicado. Prolongando γ desde el punto ζ_0 en dos direcciones hasta los primeros puntos A y B de intersección con la circunferencia $|z - z_0| = \rho$, se obtiene un arco

$$\sigma_\rho = [s_0 - \varepsilon',\ s_0 + \varepsilon''] \subset \gamma.$$

Evidentemente, para cualesquiera puntos $z \in g_{\theta,\rho}$ y $\zeta \in \sigma_\rho$, tendremos:

$$\frac{|z - \zeta_0|}{|z - \zeta|} < \operatorname{cosec}(\theta_0 - \theta)$$

(fig. 56), por lo cual,

$$A = \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} [\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)] \frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - \sigma_\rho} [\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)] \frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)}\, d\zeta \right| +$$

$$+ \operatorname{cosec}(\theta_0 - \theta) \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_\rho} \left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right| ds = i_1 + i_2.$$

Si ε es un número positivo arbitrario, se puede suponer que ρ es tan pequeño que i_2 resulte menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; fijemos este valor de ρ. Obsérvese ahora que la distancia δ_0 desde el punto ζ_0 hasta el arco $\gamma - \sigma_\rho$ es positiva; por lo tanto, $|\zeta - \zeta_0| \geqslant \delta_0 > 0$ si $\zeta \in \gamma - \delta_\rho$ y $|\zeta - z| \geqslant \delta_0 - |\zeta_0 - z|$. Por esta razón, si $|z - \zeta_0| < \frac{\delta_0}{2}$, se tiene:

$$i_1 < \frac{1}{\pi} \frac{|\zeta_0 - z|}{\delta_0^2} \int\limits_{\gamma-\sigma_\rho} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\zeta_0 - z|}{\pi\delta_0^2} \int\limits_{\gamma} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)|\, ds.$$

de donde, para todos los puntos z suficientemente próximos a ζ_0 resulta; $i_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, pues $A < \varepsilon$ para todos los puntos z suficientemente próximos a ζ_0 y pertenecientes a $g_{\theta,\rho}$, es decir, queda demostrada la relación (3.4:4) para el caso en que z tienda a ζ_0 por caminos no tangentes a γ.

Consideremos ahora la segunda de las integrales del segundo miembro de la igualdad (3.4:3). Evidentemente, ésta es una integral de tipo Cauchy con una función constante y, por consiguiente, analítica $\varphi(\zeta)$ $(\equiv \varphi(\zeta_0))$. Además, representa $\varphi(\zeta_0)$ Ln $\frac{Q-z}{P-z}$, donde P es el punto inicial y Q el punto final de la curva γ. No obstante, no utilizaremos esta última observación, pero aplicaremos los resultados del precedente apartado, según los cuales

$$f_I(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'+AbB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad f_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'+AaB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (3.4:5)$$

Confrontando (3.4:3), (3.4:4) y (3.4:5), sacamos la conclusión de que en las condiciones referentes a γ, $\varphi(\zeta)$ y $\zeta_0 \in \gamma$, enunciadas en este apartado, existen los valores frontera $F_I(\zeta_0)$ y $F_D(\zeta_0)$ de la integral de tipo Cauchy, expresadas por las fórmulas:

$$F_I(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'+AbB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \qquad (3.4:6)$$

$$F_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'+AaB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \qquad (3.4:7)$$

Restando término a término (3.4:7) de (3.4:6), obtenemos:

$$F_I(\zeta_0) - F_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\zeta_0|=\rho} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \varphi(\zeta_0). \qquad (3.4:8)$$

Hemos obtenido esta fórmula, que coincide con la fórmula (3.3:5), sin suponer que la función $\varphi(\zeta)$ sea analítica.

Transformemos (3.4:6) y (3.4:7) a una forma más simple; precisamente, escribamos (3.4:6) del modo siguiente:

$$F_I(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{AbB}\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{AbB}\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta. \qquad (3.4:9)$$

Cuando $\rho\to 0$, la segunda de las integrales del segundo miembro de la fórmula (3.4:9) tiende a cero (debido a la convergencia de la integral (3.4:2), establecida anteriormente). La tercera integral puede escribirse en la forma $\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\operatorname*{Var}_{AbB}\operatorname{Ln}(\zeta-\zeta_0)$ y, como $\operatorname{Ln}(\zeta-\zeta_0)=\ln\rho+i\operatorname{Arg}(\zeta-\zeta_0)$, coincide con

$$\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\operatorname*{Var}_{AbB}\operatorname{Arg}(\zeta-\zeta_0)=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\,\frac{\operatorname{long}AbB}{\rho}.$$

Pero, según lo anterior, el arco $\sigma_\rho\in\gamma$ con los extremos A y B puede encerrarse en ángulos opuestos arbitrariamente estrechos con el vértice común ζ_0 cuya bisectriz coincide con la tangente a γ en el punto ζ_0. Por esta razón, cuando $\rho\to 0$, los puntos A y B tienden respectivamente a los dos puntos de intersección de esta tangente con la circunferencia $|\zeta-\zeta_0|=\rho$, de donde se deduce que

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{AbB}\frac{\varphi(\zeta_0)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\,\pi=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2}.$$

Como el primer miembro de la fórmula (3.4:9) no depende de ρ, sacamos la conclusión de que existe también

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}, \qquad (3.4:10)$$

que designaremos mediante $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}'\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$ *).

---

*) Obsérvese que, en general, la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$ es divergente. La notación $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}'\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta}$ se ha admitido solamente para designar el límite (3.4:10), cuya existencia se ha establecido. Este límite se llama **valor principal de la integral** $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta$ (en el sentido de Cauchy).

Así, pues, obtenemos definitivamente:

$$F_I(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}' \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) \qquad (3.4:11)$$

De aquí y de la fórmula (3.4:8) se deduce que

$$F_D(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}' \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \qquad (3.4:12)$$

Estas fórmulas, que tienen importantes aplicaciones en la mecánica, fueron obtenidas por primera vez por Y. Sojotski en las condiciones mismas del presente párrafo, por lo cual, se llaman **f ó r m u l a s d e S o j o t s k i**.

3.5. La fórmula de Cauchy puede obtenerse como un caso particular de una fórmula más general, que es válida para funciones, generalmente, no analíticas.

Sea Δ un recinto limitado por un número finito de curvas elementales de Jordan cerradas: Γ (el contorno exterior), $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (los contornos interiores); $F(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$ es una función continua con derivadas parciales de primer orden en el recinto cerrado $\overline{\Delta}$. Entonces, aplicando la fórmula de Green, obtenemos:

$$\int\limits_{\Gamma} F(z)\,dz-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\gamma_j} F(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma} P\,dx-Q\,dy+i\int\limits_{\Gamma} Q\,dx+P\,dy-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\Big[\int\limits_{\gamma_j} P\,dx-Q\,dy+i\int\limits_{\gamma_j} Q\,dx+P\,dy\Big]=\iint\limits_{\Delta}\Big[-\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\Big)+$$

$$+i\Big(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\Big]\,dx\,dy=2i\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar z}\,dx\,dy \qquad (3.5:1)$$

$\Big($aquí $\dfrac{\partial F}{\partial \bar z}$ es la derivada formal, véase el ap. 1.3$\Big)$. Fijemos $z_0\in\Delta$ y excluyamos de Δ un entorno $|z-z_0|<\varepsilon$ cuyo radio sea menor que la distancia desde z_0 hasta la frontera del recinto Δ. Obtenemos un recinto Δ_ε cuya frontera consta de $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ y de la circunferencia $\gamma_\varepsilon: |z-z_0|=\varepsilon$. Apliquemos la fórmula (3.5:1) a la función $\Phi(z)=\dfrac{F(z)}{z-z_0}$; obtendremos:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}=$$

$$=2i\iint\limits_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big[\frac{F(z)}{z-z_0}\Big]\,dx\,dy=2i\iint\limits_{\Delta_\varepsilon}\Big[\frac{\partial F}{\partial \bar z}\,\frac{1}{z-z_0}+$$

$$+F(z)\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)\Big]\,dx\,dy=2i\iint\limits_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar z}\,\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy,$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)=0\right.$, puesto que $\frac{1}{z-z_0}$ es una función analítica en el recinto $\left.\Delta_\varepsilon\right)$.

Si $\varepsilon \to 0$, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi i F(z_0), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}\,\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}\,\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy$$

y, por consiguiente,

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy. \tag{3.5:2}$$

Esta es la fórmula general buscada. En ella, la suma de las integrales de tipo Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}=\psi(z_0)$$

es una función analítica de z_0.

Por consiguiente, la función

$$F(z_0)-\psi(z_0)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy$$

al igual que $F(z_0)$, es continua junto con sus derivadas parciales de primer orden en el recinto Δ y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy\right]=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}\left[F(z_0)-\psi(z_0)\right]=\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}.$$

Cuando $F(z_0)$ es una función analítica en el recinto Δ, la derivada formal $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\equiv 0$ y la fórmula (3.5:2) se convierte en la fórmula integral de Cauchy:

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}.$$

§ 4. SERIES DE FUNCIONES Y PRODUCTOS INFINITOS

4.1. Sea

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots=\sum_0^\infty f_n(z) \qquad (4.1:1)$$

una serie de funciones de variable compleja, definidas en un conjunto infinito de puntos E. Designemos con $S_n(z)$ la suma parcial de los primeros $n+1$ términos de la serie:

$$S_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_n(z). \qquad (4.1:2)$$

La serie (4.1:1) se llama u n i f o r m e m e n t e c o n v e r g e n t e en E, si para cualquier $\varepsilon, \varepsilon>0$, se puede señalar un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n>N(\varepsilon)$ y para cualquier p natural, se cumple la desigualdad

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\varepsilon \qquad (4.1:3)$$

en todos los puntos del conjunto E.

De esta definición se deduce que una serie que es uniformemente convergente en el conjunto E, es convergente en cada punto de este conjunto (en virtud del criterio de Cauchy). El recíproco, generalmente, no es válido, como muestra el ejemplo de la serie geométrica

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

En efecto, esta serie es convergente en el círculo unidad, puesto que

$$1+z+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\to\frac{1}{1-z}$$

para $n\to\infty$, si $|z|<1$. Sin embargo, la convergencia no es uniforme. En efecto, en este caso

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|=|z^{n+1}(1+z+\ldots+z^{p-1})|=$$
$$=\frac{|z|^{n+1}|1-z^p|}{|1-z|}\geqslant\frac{|z|^{n+1}(1-|z|^p)}{|1-z|}.$$

Tomemos un n arbitrario y hagamos $p=n$, $z_n=\frac{n}{n+1}$. Entonces tendremos:

$$|S_{2n}(z_n)-S_n(z_n)|\geqslant\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]}{\frac{1}{n+1}}=$$
$$=n\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\infty \text{ para } n\to\infty.$$

De este modo, para n arbitrariamente grandes, existen tales p $(=n)$ y tales puntos z_n del círculo unidad, en los cuales los números $|S_{2n}(z_n) - S_n(z_n)|$ son arbitrariamente grandes. De aquí se deduce que la serie geométrica no es uniformemente convergente en el círculo unidad.

Designando la suma de la serie (4.1:1) mediante $f(z)$:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z), \tag{4.1:4}$$

se puede expresar la condición de convergencia uniforme de otra forma. Precisamente, para la convergencia uniforme de la serie (4.1:1) es necesario y suficiente que para cualquier ε, $\varepsilon > 0$, se pueda hallar un $N(\varepsilon)$ tal, que se cumpla la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon \tag{4.1:5}$$

en cualquier punto $z \in E$ para $n > N(\varepsilon)$.

En efecto, supongamos que la serie (4.1:1) es uniformemente convergente. Hallemos un $N_1(\varepsilon)$ tal, que para $n > N_1(\varepsilon)$ y para cualesquiera z y p ($z \in E$, p es un número natural), se cumpla la desigualdad

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo crecer p indefinidamente, obtenemos:

$$|f(z) - S_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para $n > N_1(\varepsilon)$ y para cualquier $z \in E$. Así, pues, el cumplimiento de la condición (4.1:3) implica el cumplimiento de la condición (4.1:5).

Recíprocamente, si la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se cumple para $n > N_2(\varepsilon)$ y para cualquier punto $z \in E$, entonces, en las mismas condiciones, para cualquier p natural se tendrá

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = |f(z) - S_n(z) - [f(z) - S_{n+p}(z)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(z) - S_n(z)| + |f(z) - S_{n+p}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, del cumplimiento de la condición (4.1:5) también se deduce el cumplimiento de la condición (4.1:3).

Comprando la serie de funciones con una serie convergente de términos positivos constantes, se obtiene un criterio bastante sencillo de convergencia uniforme de la serie (4.1:1). Precisando, si desde cierto valor de $n \geqslant \nu$ los módulos de los términos de la serie (4.1:1)

no son superiores en E a los términos correspondientes de la serie convergente

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots \tag{4.1:6}$$

de términos positivos constantes, la serie (4.1:1) es uniformemente convergente en E. En efecto, en virtud a la convergencia de la serie (4.1:6), para cualquier $\varepsilon>0$, existe un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n>N(\varepsilon)$ y cualquier p se cumple la desigualdad

$$\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+p}<\varepsilon.$$

Pero, según la hipótesis, en el conjunto E se cumplen las desigualdades

$$|f_k(z)|\leqslant\alpha_k \qquad (k\geqslant\nu).$$

Por consiguiente, en cualquier punto $z\in E$ para $n>\max(N(\varepsilon),\ \nu)$ y cualquier p natural, se tiene:

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|\leqslant|f_{n+1}(z)|+\ldots+|f_{n+p}(z)|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+p}<\varepsilon,$$

lo cual significa que la serie (4.1:1) es uniformemente convergente.

Supongamos que cada punto del conjunto E es un punto de acumulación de este conjunto, o sea, como suele decirse, E es un conjunto denso en sí. Esto ocurrirá, por ejemplo, cuando E sea un conjunto (no vacío) abierto arbitrario, en particular, un recinto, o también cuando E sea una curva continua. Entonces, si cada término de la serie, uniformemente convergente en E, es una función continua en E, la suma de la serie será una función continua en E.

Para demostrar esto, consideremos dos puntos cualesquiera z_0 y z del conjunto E y acotemos $|f(z)-f(z_0)|$ del modo siguiente:

$$|f(z)-f(z_0)|=|[f(z)-S_n(z)]+[S_n(z)-S_n(z_0)]+[S_n(z_0)-f(z_0)]|\leqslant$$
$$\leqslant|f(z)-S_n(z)|+|S_n(z)-S_n(z_0)|+|f(z_0)-S_n(z_0)|. \tag{4.1:7}$$

Sea ε un número positivo arbitrario. En virtud de la convergencia uniforme de la serie, existe un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n>N(\varepsilon)$ y para cualesquiera puntos del conjunto E se verifica la desigualdad:

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.1:8}$$

Por consiguiente, en particular, tendremos:

$$|f(z_0)-S_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.1:9}$$

Fijemos arbitrariamente $n_0>N(\varepsilon)$. Como la función $S_{n_0}(z)$ es continua en el punto z_0, puede señalarse un $\delta(\varepsilon)>0$ tal, que para

$|z-z_0|<\delta(\varepsilon)\ (z,\ z_0\in E)$ se cumpla la desigualdad

$$|S_{n_0}(z)-S_{n_0}(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.1:10}$$

Haciendo en (4.1:7) $n=n_0$ y tomando $|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$, en virtud de las desigualdades (4.1:8), (4.1:9) y (4.1:10), obtenemos:

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

de donde se deduce que la función $f(z)$ es continua en cualquier punto $z_0\in E$.

Supongamos, en particular, que E es una curva rectificable L. Demostremos que si los términos de la serie (4.1:1) son funciones continuas en L y esta serie es uniformemente convergente en L, entonces ésta puede integrarse término a término a lo largo de L, es decir,

$$\int_L f(z)\,dz=\int_L f_0(z)\,dz+\int_L f_1(z)\,dz+\ldots+\int_L f_n(z)\,dz+\ldots \tag{4.1:11}$$

En efecto, como los términos de la serie son funciones continuas y la serie es uniformemente convergente en L, de lo demostrado anteriormente se deduce que $f(z)$ es continua en L. Designemos con Δ la longitud de la curva L. Siendo ε un número positivo arbitrario, si $N(\varepsilon)$ es tal, que para $n>N(\varepsilon)$ en todos los puntos de la curva L se verifica la desigualdad

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{\Delta},$$

entonces, evidentemente,

$$\left|\int_L f(z)\,dz-\left[\int_L f_0(z)\,dz+\ldots+\int_L f_n(z)\,dz\right]\right|=$$
$$=\left|\int_L [f(z)-S_n(z)]\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{\Delta}\,\Delta=\varepsilon$$

(para $n>N(\varepsilon)$), de donde se deduce la relación (4.1:11).

Frecuentemente, el teorema de la posibilidad de integrar término a término una serie se suele aplicar de la forma siguiente. Supongamos que los términos de la serie (4.1:1) son funciones continuas en cierto recinto G y que la serie es uniformemente convergente en cada conjunto cerrado de puntos de este recinto. Entonces la serie (4.1:1) puede integrarse término a término a lo largo de cualquier curva rectificable L situada en el recinto G.

Para reducir este teorema al anterior es suficiente observar que toda curva rectificable L (y, en general, toda curva continua), situada en el recinto G, reprsenta un conjunto cerrado de puntos del

recinto. Por consiguiente, según la condición del teorema, la serie (4.1:1) es uniformemente convergente en L.

En la teoría de las funciones analíticas la convergencia uniforme de una serie de funciones en todo conjunto cerrado y acotado de un recinto G, desempeña un papel muy importante. A semejante convergencia la llamaremos *convergencia uniforme en el interior del recinto* G, distinguiéndola de la convergencia uniforme *en el recinto* G. Toda serie que es uniformemente convergente en el recinto G, es uniformemente convergente también en todo conjunto cerrado de sus puntos y, por consiguiente, es uniformemente convergente en el interior de G. Lo recíproco, generalmente, no es cierto, como muestra el ejemplo de la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

En efecto, como se vio anteriormente, esta serie es convergente en el círculo unidad $|z| < 1$, pero no lo es uniformemente. No obstante, es uniformemente convergente en el interior del círculo unidad. En efecto, sea F un conjunto cerrado de puntos del círculo unidad y sea $\delta > 0$ la distancia de F hasta la frontera del recinto (hasta la circunferencia unidad). Entonces, para cualquier punto $z \in F$; se tiene: $|z| \leqslant 1 - \delta$ y, por consiguiente,

$$|z^{n+1} + \ldots + z^{n+p}| = \left| z^{n+1} \frac{1 - z^p}{1 - z} \right| \leqslant |z|^{n+1} \frac{1 + |z|^p}{1 - |z|} \leqslant (1 - \delta)^{n+1} \frac{2}{\delta}.$$

Evidentemente, la magnitud $(1 - \delta)^{n+1} \frac{2}{\delta}$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ y puede hacerse menor que $\varepsilon > 0$ para $n > N(\varepsilon)$. Así, pues, la serie geométrica es uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado F de puntos del círculo unidad y, por consiguiente, es uniformemente convergente en el interior del círculo, a pesar de que no es uniformemente convergente en el círculo.

Demostremos que para que la serie (4.1:1) sea uniformemente convergente en el interior de un recinto G, es necesario y suficiente que para todo punto z_0 del recinto exista un entorno del mismo en el cual esta serie converja uniformemente. La necesidad de esta condición es evidente, puesto que si $|z - z_0| \leqslant \rho$ es un círculo cerrado con el centro en el punto z_0, perteneciente a G, la serie tiene que converger uniformemente en el mismo y, por consiguiente, también en el entorno $|z - z_0| < \rho$ del punto z_0. Para cerciorarse de que la condición es suficiente, haremos la demostración por reducción a lo absurdo. Supongamos que, cumpliéndose la condición, la serie converge no uniformemente en cierto conjunto cerrado $F \subset G$. Entonces tienen que existir: un número positivo ε_0, unos números naturales n_k $(n_k < n_{k+1})$ arbitrariamente grandes y unos puntos

$z_k \in F$ tales que

$$|f(z_k) - S_{n_k}(z_k)| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (4.1:12)$$

(Aquí se ha formulado la negación de la convergencia uniforme de la serie (4.1:1) en el conjunto F).

De la sucesión de puntos $\{z_k\}$ se puede extraer otra sucesión parcial contenida en la misma $\{z_{k'}\}$, que converge hacia cierto punto $z_0 \in F$ (F es un conjunto cerrado). Como z_0 es un punto del recinto G, según la hipótesis, para éste existe un entorno U perteneciente a G en el cual la serie es uniformemente convergente. Por consiguiente, en todos los puntos de U tiene que verificarse la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon_0,$$

si n es suficientemente grande.

Por otra parte, debido a la hipótesis, existen unos números $n_{k'}$ arbitrariamente grandes, tales que en los puntos $z_{k'}$ situados en U (y a U pertenecen todos los puntos $\{z_{k'}\}$, comenzando desde uno de ellos,) se cumple la desigualdad opuesta:

$$|f(z_{k'}) - S_{n_{k'}}(z_{k'})| \geqslant \varepsilon_0.$$

De la contradicción obtenida se deduce la justeza de nuestra afirmación.

Volvamos a estudiar el problema de la integración de una serie uniformemente convergente de funciones analíticas $\sum\limits_0^\infty f_k(z)$. Fijando un punto arbitrario $z_0 \in G$, para cualquier curva rectificable γ, perteneciente a G, que una z_0 con el punto z, también perteneciente a G, tendremos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_0^\infty \int_\gamma f_k(z)\,dz.$$

Las integrales $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ y $\int\limits_\gamma f_n(z)\,dz$ pueden considerarse como funciones de z, generalmente multiformes (véase el ap. 2.7):

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \quad \text{y} \quad \int_{z_0}^{z} f_n(z)\,dz.$$

Para separar sus ramas uniformes en el entorno U: $|z - z_1| < \rho$ de algún punto z_1 del recinto G (se supone que este entorno junto con su frontera $|z - z_1| = \rho$ está contenido en el recinto G), efectuaremos todas las integraciones desde el punto z_0 hasta el punto z_1 sobre una misma curva rectificable γ_1 perteneciente al

recinto G, y luego, desde el punto z_1 hasta cualquier punto $z \in U$ a lo largo de curvas rectificables arbitrarias situadas en U, por ejemplo, a lo largo del segmento rectilíneo que une z_1 y z.

Demostremos que, cumpliéndose estas condiciones, la serie $\sum_0^\infty \int_{z_0}^{z} f_n(z)\,dz$ convergerá uniformemente en U, es decir, en un círculo cerrado arbitrario perteneciente al recinto G.

En efecto, para el módulo

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_0}^{z} f_k(z)\,dz\right|$$

se obtiene la cota siguiente:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_0}^{z} f_k(z)\,dz\right| \leqslant \left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{\gamma_1} f_k(z)\,dz\right| + \left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz\right|.$$

Pero la serie $\sum_0^\infty \int_{\gamma_1} f_k(z)\,dz$ es convergente, y, por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{\gamma_1} f_k(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n > N_1(\varepsilon).$$

Aplicando luego la convergencia uniforme de la serie $\sum_0^\infty f_k(z)$ en el círculo cerrado $|z - z_1| \leqslant \rho$, podemos elegir un número $N_2(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N_2(\varepsilon)$,

$$\left|\sum_{n+1}^{n+\rho} f_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2\rho}$$

para todos los puntos de este círculo. Tomando las integrales $\int_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz$ a lo largo del segmento rectilíneo que une z_1 y z, tendremos:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz\right| = \left|\int_{z_1}^{z} \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\rho}\,\rho = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Por consiguiente, para $n > N(\varepsilon) = \max[N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)]$, en cualquier punto del círculo $|z - z_1| \leqslant \rho$ se cumplirá la desigualdad

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}\int_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz\right| < \varepsilon,$$

con lo cual queda demostrada la convergencia uniforme de la serie en cualquier círculo cerrado contenido en G.

En el caso particular en que todas las integrales $\int\limits_{z_0}^{z} f_k(z)\,dz$ sean funciones uniformes en el recinto G, de lo demostrado se deduce que la serie

$$\sum_{0}^{\infty}\int_{z_0}^{z} f_k(z)\,dz$$

es uniformemente convergente en el interior del recinto G, si la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} f_k(z)$ es uniformemente convergente en el interior del mismo.

Teorema de Weierstrass sobre las series uniformemente convergentes de funciones analíticas. *Si los términos de una serie*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \tag{4.1:1}$$

uniformemente convergente en el interior del recinto G, son funciones analíticas en este recinto, entonces la suma de la serie $f(z)$ también es analítica en el recinto G.

Además, las series

$$f_0^{(k)}(z) + f_1^{(k)}(z) + \ldots + f_n^{(k)}(z) + \ldots, \tag{4.1:13}$$

que se obtienen de la serie (4.1:1) *derivando ésta término a término k veces, también convergen uniformemente en el interior de G y representan en el recinto G las derivadas de k-ésimo orden de la suma de la serie $f(z)$.*

Sea z_0 un punto arbitrario del recinto G y sea γ una circunferencia de radio ρ con el centro en el punto z_0, perteneciente a G junto con su interior. Evidentemente, es suficiente demostrar todas las proposiciones del teorema para los puntos del entorno U: $|z - z_0| < \frac{\rho}{2}$ del punto z_0. Supongamos que ζ designa un punto arbitrario situado en γ y que z es un punto arbitrario de U. Hagamos en (4.1:1) $z = \zeta$ y multipliquemos todos los términos de la serie por $\frac{k!}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Obtenemos:

$$\frac{k!}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}. \tag{4.1:14}$$

Como la serie (4.1:1) converge uniformemente en γ y por las hipótesis del teorema

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right|\leqslant\frac{k!}{2\pi\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}},$$

la serie (4.1:14) también converge uniformemente en γ; por esta razón se la puede integrar término a término. Resulta:

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}. \qquad (4.1:15)$$

Como las funciones $f_n(z)$ son analíticas en el recinto G, las integrales $\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}$ expresan las derivadas $f_n^{(k)}(z)$ (véase (3.2:7)).

Para $k=0$ la igualdad (4.1:15) toma la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{0}^{\infty}f_n(z)=f(z),$$

de donde se deduce que $f(z)$ representa en U una integral de tipo Cauchy y, por consiguiente, es una función analítica en U.

Para $k>0$, de la igualdad (4.1:15), obtenemos:

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{0}^{\infty}f_n^{(k)}(z).$$

Pero la expresión del primer miembro de esta igualdad representa la derivada de orden k de la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$ y, por consiguiente, es igual a $f^{(k)}(z)$. Así, pues, en el entorno U del punto z_0 se tiene:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{0}^{\infty}f_n^{(k)}(z).$$

No queda más que demostrar la convergencia uniforme de esta serie o, lo que es lo mismo, de la serie (4.1:15) en este mismo entorno. Pero si en γ se cumple la desigualdad

$$|f(\zeta)-S_n(\zeta)|<\varepsilon \quad \text{para} \quad n>N(\varepsilon).$$

entonces para todos los puntos $z \in U$ y para los mismos valores de n, se tiene:

$$\left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} - \sum_{0}^{n} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_j(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - S_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \right| < \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}} 2\pi\rho.$$

Como el segundo miembro puede hacerse, evidentemente, arbitrariamente pequeño junto con ε, la última desigualdad expresa la convergencia uniforme de la serie (4.1:15) o de la serie (4.1:13) en U, con lo cual se termina la demostración del teorema.

Para aplicar correctamente el teorema de Weierstrass es preciso recordar que éste se ha enunciado y demostrado para las series de funciones analíticas convergentes en un r e c i n t o. En el caso de un conjunto arbitrario (no abierto) éste puede no ser cierto.

Examinemos, ante todo, el ejemplo dado por Weierstrass de una función que no es derivable en ningún punto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$$

(a es un número entero impar, $0 < b < 1$). Cada término de esta serie es una función analítica en todos los puntos del eje real (e incluso en todo el plano). Además, la serie es uniformemente convergente en el eje real, puesto que el valor absoluto del término general de la serie $|b^n \cos(a^n x\pi)|$ no es superior al término b^n de la serie geométrica convergente. Sin embargo, la suma de la serie no es analítica en los puntos del eje real, puesto que, como demostró Weierstrass, ésta no es derivable para ningún x.

Como segundo ejemplo, tomemos la serie

$$\operatorname{sen} x + \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \operatorname{sen} x\right) + \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + \ldots$$

Los términos de esta serie son funciones analíticas en el eje real (e incluso en todo el plano). Además, la serie converge uniformemente en el eje real, y su suma, siendo idénticamente igual a cero, representa una función analítica. En efecto, la suma parcial

$$\operatorname{sen} x + \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \operatorname{sen} x\right) + \ldots + \left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n} - \frac{\operatorname{sen}(n-1)x}{n-1}\right] = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

no supera en valor absoluto a $\frac{1}{n}$, de donde se deduce que la serie converge hacia cero y, además, uniformemente.

Pero derivando término a término, se obtiene la serie

$$\cos x + (\cos 2x - \cos x) + \ldots + [\cos nx - \cos (n-1) x] + \ldots,$$

cuyas sumas parciales son:

$$\cos x, \ \cos 2x, \ \ldots, \cos nx, \ \ldots$$

Evidentemente, la sucesión de estas sumas es divergente para todo $x \neq 2k\pi$, y para $x = 2k\pi$ tiene un límite igual a 1, es decir, resulta un valor distinto de la derivada de la suma de la serie.

Basándose en el teorema de Weierstrass tenemos que sacar la conclusión de que en estos dos casos *no existe un recinto que contenga a los puntos de todo el eje real o incluso de alguna de sus partes, en el cual las series dadas fuesen uniformemente convergentes.* En caso contrario, estos ejemplos estarían en contradicción con el teorema de Weierstrass.

En muchos casos resulta ser útil el siguiente teorema, que permite asegurar la convergencia uniforme de la serie en un dominio si ésta es uniformemente convergente en la frontera del mismo.

T e o r e m a. *Si los términos de la serie* $\sum\limits_{0}^{\infty} f_k(z)$ *son funciones continuas en un dominio* *) *acotado* $\overline{G}$ *y son analíticas en el recinto* G, *entonces, de la convergencia uniforme de la serie en la frontera* Γ *del recinto* G *se deduce su convergencia uniforme en el dominio* $\overline{G}$.

D e m o s t r a c i ó n. Según la hipótesis del teorema, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n > N(\varepsilon)$ y cualquier número natural p se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon \qquad (4.1:16)$$

en todos los puntos de la frontera Γ. Pero la función $\sum\limits_{n+1}^{n+p} f_k(z)$ es continua en $\overline{G}$ y analítica en G. Por eso, el máximo del módulo $\left| \sum\limits_{n+1}^{n+p} f_k(z) \right|$ en el dominio $\overline{G}$ se alcanza en la frontera y, por consiguiente, en virtud de la desigualdad (4.1:16), el valor de este máximo es menor que ε. De aquí se deduce que la desigualdad (4.1:16) se cumple para $n > N(\varepsilon)$ y cualquier número natural p en todos los puntos del dominio $\overline{G}$, lo cual significa que la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} f_k(z)$ es uniformemente convergente en este dominio.

*) Recordamos al lector que un recinto cerrado se llama abreviadamente dominio. Véase J. R e y P a s t o r, P. P i C a l l e j a, C. A. T r e j o, Análisis matemático, Vol. II, § 64-5. (*Nota del T.*)

4.2. Todo lo enunciado y demostrado en el apartado precedente para las series de funciones uniformemente convergentes se extiende inmediatamente para las sucesiones de funciones uniformemente convergentes.

Una sucesión de funciones

$$\{F_n(z)\}, \tag{4.2:1}$$

definidas en un conjunto E, se llama uniformemente convergente en este conjunto, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $N(\varepsilon)$ tal, que la desigualdad

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \varepsilon$$

se cumple para cualquier p natural en todos los puntos $z \in E$.

Evidentemente, la sucesión (4.2:1) se puede considerar como la sucesión de las sumas parciales de la siguiente serie de funciones:

$$F_0(z) + [F_1(z) - F_0(z)] + [F_2(z) - F_1(z)] + \ldots$$
$$\ldots + [F_n(z) - F_{n-1}(z)] + \ldots \tag{4.2:2}$$

por lo cual, es uniformemente convergente en E si, y sólo si, es uniformemente convergente en E la serie (4.2:2). Además, los términos de la sucesión (4.2:1) son funciones continuas y, respectivamente, analíticas junto con los términos de la serie (4.2:2). De aquí se deduce que todas las proposiciones del apartado precedente son aplicables a las sucesiones de funciones.

En lugar de sucesiones de funciones, frecuentemente, se suele considerar una familia de funciones de cierto parámetro τ que varía continuamente: $\{F_\tau(z)\}$. Supongamos que cada una de estas funciones está definida en el conjunto E, y que el parámetro τ, que para precisar es real, recorre el intervalo (α, β) $(\beta \leqslant +\infty)$. Si, para cada $\varepsilon > 0$, es posible señalar un $\beta(\varepsilon) < \beta$ tal, que para $\tau > \beta(\varepsilon)$ y $\tau' > \beta(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| < \varepsilon$$

en todos los puntos del conjunto E, se dice que la familia $\{F_\tau(z)\}$ es uniformemente convergente en E cuando τ tiende a β. Si $\{\tau_n\}$ es una sucesión de valores del parámetro que converge hacia β, entonces, en virtud de esta definición, la sucesión $\{F_{\tau_n}(z)\}$ será uniformemente convergente en E. Su función límite $F(z)$ no depende de la sucesión $\{\tau_n\}$ que se haya elegido. En efecto, si

$$|F(z) - F_{\tau_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para } n > N_1$$

y para otra sucesión $\{\tau_n'\}$ la función límite es $F'(z)$, de modo que

$$|F'(z) - F_{\tau_n'}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para } n > N_2,$$

entonces, teniendo en cuenta que para todos los τ_n y τ'_n, suficientemente próximos a β, se verifica la desigualdad

$$|F_{\tau_n}(z)-F_{\tau'_n}(z)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

sacamos la conclusión de que

$$|F(z)-F'(z)|<\varepsilon,$$

de donde se deduce que las funciones $F'(z)$ y $F(z)$ coinciden.

De esta relación entre la familia de funciones $\{F_\tau(z)\}$ uniformemente convergente y las sucesiones de funciones $\{F_{\tau_n}(z)\}$ uniformemente convergentes se deduce que todas las proposiciones del precedente apartado se extienden también a las familias de funciones. En particular, es válida la proposición: si las funciones $F_\tau(z)$, $\alpha<\tau<\beta$, son analíticas en un recinto G y la familia $\{F_\tau(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior de G cuando τ tiende a β, entonces la función límite $F(z)$ también es analítica en el recinto G; además, para cualquier natural k, la familia de derivadas $\{F_\tau^{(k)}(z)\}$ converge uniformemente en el interior de G hacia la derivada $F^{(k)}(z)$.

Como ejemplo de gran importancia, consideremos la *integral impropia de tipo Cauchy*.

Sea L una curva indefinida: $z=\lambda(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, donde $\lambda(t)\to\infty$ cuando $t\to\beta$, y supongamos que cada arco suyo finito L_τ: $\alpha\leqslant t\leqslant\tau<\beta$, es rectificable. Si $\varphi(\zeta)$ es una función continua, definida en L, entonces las integrales de tipo Cauchy

$$F_\tau(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\tau}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

representan una familia de funciones, definidas y analíticas en cada recinto que no contenga puntos de la curva L.

Supongamos que esta familia es uniformemente convergente en el interior de cada recinto que no contenga a los puntos de la curva L. Esto se cumplirá, por ejemplo, si la integral $\int_L\varphi(\zeta)\,d\zeta$ es absolutamente convergente, es decir, si existe el límite

$$\lim_{\tau\to\beta}\int_{L_\tau}|\varphi(\zeta)|\,d\sigma=\int_L|\varphi(\zeta)|\,d\sigma.$$

En efecto, entonces en cualquier conjunto cerrado acotado E que no contenga puntos de la curva L, tendremos:

$$|F_{\tau'}(z)-F_\tau(z)|=$$
$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\tau'}-L_\tau}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi\rho}\left|\int_{L_{\tau'}}|\varphi(\zeta)|\,d\sigma-\int_{L_\tau}|\varphi(\zeta)|\,d\sigma\right|.$$

donde ρ es la distancia entre E y L, y, evidentemente, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $\beta(\varepsilon) < \beta$ tal, que para $\tau > \beta(\varepsilon)$ y $\tau' > \beta(\varepsilon)$ se cumplirá la desigualdad

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| < \varepsilon \qquad (z \in E).$$

En las condiciones impuestas a la familia $\{F_\tau(z)\}$ existirá la integral impropia

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\tau\to\beta} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

La llamaremos integral impropia de tipo Cauchy a lo largo de la curva ilimitada L o, abreviadamente, integral de tipo Cauchy a lo largo de L. Del teorema de Weierstrass, enunciado para el caso de una familia de funciones, se deduce que esta integral representa una función analítica $F(z)$ en cada recinto que no contenga puntos de la curva L.

Del mismo teorema se deduce que la familia de derivadas

$$\left\{F_\tau^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}\right\}$$

también converge uniformemente hacia $F^{(k)}(z)$. Pero, por otra parte, la convergencia uniforme de esta familia significa que existe la integral impropia

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \lim_{\tau\to\beta} \frac{k!}{2\pi i}\int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Por consiguiente,

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Por lo tanto, hemos verificado que las propiedades establecidas anteriormente para las integrales de tipo Cauchy, son ciertas también para las integrales impropias de tipo Cauchy.

Estos resultados se extienden también sin cambio alguno al caso en que L sea una curva ilimitada, para la cual, no sólo el punto final sino también el inicial estén en el infinito, es decir, cuando la función $z = \lambda(t)$, definida en el intervalo $\alpha < t < \beta$, satisface a las condiciones $\lim\limits_{t\to\alpha} \lambda(t) = \lim\limits_{t\to\beta} \lambda(t) = \infty$ (por ejemplo, L puede ser una recta o una parábola).

Volvamos a examinar el caso general de una sucesión $\{F_n(z)\}$.

Señalemos que, si la sucesión (4.2:1) es uniformemente convergente en E, la sucesión de sus módulos $\{|F_n(z)|\}$ también converge

uniformemente en E. En efecto:

$$\|F_{n+p}(z)| - |F_n(z)\| \leqslant |F_{n+p}(z) - F_n(z)|.$$

Por otra parte, si $\Phi(z)$ es una función acotada en valor absoluto en E:

$$|\Phi(z)| < M \qquad (z \in E),$$

y la sucesión (4.2:1) es uniformemente convergente en E, entonces la sucesión $\{\Phi(z) F_n(z)\}$ también es uniformemente convergente en E.

En efecto, si en el conjunto E para $n > N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

entonces en este conjunto para los mismos $n > N(\varepsilon)$ se verifica también la desigualdad

$$|\Phi(z) F_{n+p}(z) - \Phi(z) F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Supongamos, finalmente, que las funciones de la sucesión (4.2:1), uniformemente convergente en E, están acotadas uniformemente en valor absoluto en E:

$$|F_n(z)| < M \qquad (z \in E), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces las sucesiones $\{[F_n(z)]^k\}$ (k es un número natural) también convergen uniformemente en E.

En efecto,

$$\begin{aligned} |[F_{n+p}(z)]^k - [F_n(z)]^k| = |[F_{n+p}(z) - F_n(z)]\{[F_{n+p}(z)]^{k-1} + \\ + [F_{n+p}(z)]^{k-2}[F_n(z)] + \ldots \\ \ldots + [F_n(z)]^{k-1}\}| < kM^{k-1}|F_{n+p}(z) - F_n(z)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{kM^{k-1}} \text{ para } n > N(\varepsilon),$$

se tiene

$$|[F_{n+p}(z)]^k - [F_n(z)]^k| < \varepsilon \text{ para } n > N(\varepsilon),$$

con lo cual queda establecida la convergencia uniforme de la sucesión

$$\{[F_n(z)]^k\}.$$

La acotación uniforme de los módulos de las funciones que forman una sucesión uniformemente convergente, siempre tiene lugar

si $F_n(z)$ son funciones continuas y E es un conjunto cerrado acotado. En efecto, $\boldsymbol{F}(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$ es una función continua en E y, por consiguiente, es acotada en valor absoluto: $|F(z)| < M'$. Tomemos $\varepsilon = 1$, entonces $|F_n(z) - F(z)| < 1$ para $n > N$; por lo tanto, $|F_n(z)| < |F(z)| + 1 < M' + 1$ para $n = N+1, N+2, \ldots$ Pero cada una de las funciones $F_1(z), \ldots, F_N(z)$ también está acotada en valor absoluto en E:

$$|F_k(z)| < M_k \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N).$$

Haciendo $M = \max(M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_N,\ M'+1)$, tendremos:

$$|F_n(z)| < M, \qquad z \in E,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

4.3. Demos la definición general de producto infinito e indiquemos algunas propiedades. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de números complejos diferentes de cero. Si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k$ y este límite u es distinto de cero, se dice que el *producto infinito* $\prod_1^\infty u_k$ *es convergente*, y el número u se llama valor de este producto, designándose así:

$$u = \prod_1^\infty u_k.$$

Cuando el límite $\lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k$ no existe o existe y es igual a cero (siendo los factores distintos de cero), se dirá que el *producto infinito es divergente*.

Evidentemente, para la convergencia del producto tiene que cumplirse la condición necesaria:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1.$$

En efecto, si $\lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k = u \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\prod_1^n u_k}{\prod_1^{n-1} u_k} = 1.$

En virtud de esto, resulta conveniente escribir el término general del producto en la forma $u_k = 1 + v_k$, donde, en el caso de convergencia, deberá cumplirse la condición necesaria:

$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0.$$

Demostremos que el *producto infinito* $\prod\limits_{1}^{\infty} (1 + v_k)$ *es convergente cuando, y sólo cuando, converge la serie* $\sum\limits_{1}^{\infty} \ln (1 + v_k)$.

En efecto, la convergencia de la última serie es equivalente a la convergencia de las dos series:

$$\sum_{1}^{\infty} \ln |1 + v_k| \quad \text{y} \quad \sum_{1}^{\infty} \arg (1 + v_k).$$

De la convergencia de éstas se deduce que las sucesiones

$$\{\sum_{1}^{n} \ln |1 + v_k| = \ln |\prod_{1}^{n} (1 + v_k)|\}$$

y

$$\{\sum_{0}^{n} \arg (1 + v_k) = \mathrm{Arg}_n\, [\prod_{1}^{n} (1 + v_k)]\}$$

son convergentes (aquí $\mathrm{Arg}_n\, [\prod\limits_{1}^{n} (1 + v_k)]$ designa el valor del argumento, dado en el primer miembro de la igualdad); por lo tanto, converge también la sucesión $\{\prod\limits_{1}^{n} (1 + v_k)\}$, y además, hacia un límite u que es distinto de cero, es decir, el producto infinito es convergente. Recíprocamente: si éste es convergente

$$\prod_{1}^{\infty} (1 + v_k) = u \neq 0,$$

entonces existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{1}^{n} |1 + v_k| = |u| \neq 0,$$

y, por consiguiente, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \ln |1 + v_k|$ es convergente. Además, (véase el ap. 3.3 del cap. primero), tiene que existir una sucesión de valores

$$\mathrm{Arg}\, [\prod_{1}^{n} (1 + v_k)] = \sum_{1}^{n} \arg (1 + v_k) + 2\pi\mu_n = \varphi_n,$$

que converge hacia uno de los valores del $\mathrm{Arg}\, u$ (μ_n son números enteros). De la convergencia del producto infinito $\prod\limits_{1}^{\infty} (1 + v_k)$ se

deduce que $\lim_{k\to\infty}(1+v_k)=1$, por lo cual, para $k>N$, se tiene:

$$|\arg(1+v_k)|<\pi$$

y

$$|\varphi_{k+1}-\varphi_k|=|\arg(1+v_{k+1})+2\pi(\mu_{k+1}-\mu_k)|>2\pi|\mu_{k+1}-\mu_k|-\pi.$$

Por otra parte, $\lim_{k\to\infty}(\varphi_{k+1}-\varphi_k)=0$. De aquí se deduce que los números enteros no negativos $|\mu_{k+1}-\mu_k|$ tienen que anularse comenzando desde uno de ellos, es decir, $\mu_n=\mu_{n+1}=\ldots=\mu$. Por esta razón, no sólo es convergente la sucesión $\{\varphi_n\}$, sino también la sucesión

$$\{\varphi_n-2\pi\mu_n=\sum_1^n \arg(1+v_k)\},$$

es decir, la serie $\sum_1^\infty \arg(1+v_k)$ es convergente.

En resumen, ambas series $\sum_1^\infty \ln|1+v_k|$ y $\sum_1^\infty \arg(1+v_k)$ convergen, es decir, converge la serie $\sum_1^\infty \ln(1+v_k)$, con lo cual se termina toda la demostración.

Observando la identidad

$$\prod_1^n(1+v_k)=\exp\left[\sum_1^n \ln(1+v_k)\right],$$

sacamos la conclusión, basándose en lo expuesto, de que cuando el producto infinito es convergente, se verifica la igualdad

$$\prod_1^\infty(1+v_k)=\exp\left[\sum_1^\infty \ln(1+v_k)\right]. \qquad (4.3:1)$$

Diremos que el producto infinito $\prod_1^\infty(1+v_k)$ es *absolutamente convergente*, si es absolutamente convergente la serie $\sum_1^\infty \ln(1+v_k)$. Como en una serie absolutamente convergente se pueden reordenar arbitrariamente los términos, sin que se modifique la convergencia de la serie y la suma, de la fórmula (4.3:1) se deduce que en un producto absolutamente convergente se pueden reordenar arbitrariamente los factores, sin que se modifique la convergencia del producto y su valor.

Observando que

$$\ln(1+v_k) = v_k - \frac{v_k^2}{2} + \frac{v_k^3}{3} - \ldots = v_k\left(1 - \frac{v_k}{2} + \frac{v_k^2}{3} - \ldots\right)$$

y que, por consiguiente, para $|v_k| < \frac{1}{2}$ se verifican las desigualdades

$$\frac{1}{2}|v_k| = |v_k|\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots\right) < |\ln(1+v_k)| <$$
$$< |v_k|\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) = \frac{3}{2}|v_k|, \qquad (4.3:2)$$

sacamos la conclusión de que la serie $\sum\limits_1^\infty |\ln(1+v_k)|$ será convergente cuando, y sólo cuando, sea convergente la serie $\sum\limits_1^\infty |v_k|$.

En resumen, *para que el producto infinito* $\prod\limits_1^\infty (1+v_k)$ *sea absolutamente convergente, es necesario y suficiente que sea absolutamente convergente la serie* $\sum\limits_1^\infty v_k$.

Sea $\{v_k(z)\}$ una sucesión de funciones uniformes y analíticas en un recinto G, que no tomen en éste el valor -1. Si la serie $\sum\limits_1^\infty \ln[1+v_k(z)]$ es uniformemente convergente en el interior del recinto G, entonces el producto infinito $\prod\limits_1^\infty [1+v_k(z)]$ también converge en este recinto y, por consiguiente, representa una función $f(z)$ que no se anula. Según la fórmula (4.3:1), $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z) = \exp\left\{\sum_1^\infty \ln[1+v_k(z)]\right\} \qquad (4.3:3)$$

y, por consiguiente, es una función analítica (puesto que la suma de la serie $\sum\limits_1^\infty \ln[1+v_k(z)]$, uniformemente convergente en el interior de G, es una función analítica).

Demostremos que el producto $\prod\limits_1^\infty [1+v_k(z)]$ es uniformemente convergente en el interior de G, es decir, que la sucesión $\left\{\prod\limits_1^n [1+v_k(z)]\right\}$ es uniformemente convergente.

En efecto, sea F un conjunto cerrado y acotado de puntos del recinto G, $M = \max | f(z) |$ y ε un número positivo arbitrario, menor que M. En virtud de la convergencia uniforme de la serie $\sum\limits_1^\infty \ln [1 + v_k(z)]$, se tiene:

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \ln [1 + v_k(z)] \right| < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon), \; z \in F.$$

Por consiguiente,

$$\left| f(z) - \prod_1^n [1 + v_k(z)] \right| = \left| \exp\left(\sum_1^\infty \right) - \exp\left(\sum_1^n \right) \right| =$$

$$= \left| \exp\left(\sum_1^\infty \right) \right| \left| 1 - \exp\left(- \sum_{n+1}^\infty \right) \right| \leqslant M \left[\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \left[1 + \frac{1}{2!} \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 + \ldots \right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \right) = \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$ en todos los puntos del conjunto F, con lo cual queda demostrada la convergencia uniforme del producto infinito.

Debido a la desigualdad

$$| \ln [1 + v_k(z)] | < \frac{3}{2} | v_k(z) |,$$

que se cumple si $| v_k(z) | < \frac{1}{2}$, la serie $\sum\limits_1^\infty \ln [1 + v_k(z)]$ será absoluta y uniformemente convergente en el interior de G, si existe una serie convergente $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k$ de términos constantes y positivos, tal que $| v_k(z) | < \varepsilon_k$, comenzando desde un valor suficientemente grande $k \geqslant K$, en todos los puntos del recinto G. De aquí se deduce que, *para que el producto infinito*

$$\prod_1^\infty [1 + v_k(z)]$$

sea absoluta y uniformemente convergente en el interior de un recinto G y, por consiguiente, represente en el mismo una función analítica $f(z)$ que no se anule, es suficiente que desde un valor $k \geqslant K$ en adelante, en todo el recinto G se cumplan las desigualdades

$$| v_k(z) | < \varepsilon_k,$$

donde ε_k son los términos de una serie convergente.

Claro está, la condición enunciada no es necesaria para la convergencia uniforme del producto.

Ampliemos, finalmente, la clase de productos infinitos, permitiendo también aquellos que poseen un número finito de factores (uno o más) nulos. Si $n_0 > 1$ es el índice, comenzando desde el cual todos los términos del producto son distintos de cero, entonces al producto $\prod_1^\infty u_k$ llamaremos convergente cuando, y sólo cuando, sea convergente el producto infinito de factores distintos de cero $\prod_{n_0}^\infty u_k$. El valor de todo el producto infinito será el número 0:

$$\prod_1^\infty u_k = \lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_1^{n_0-1} u_k \prod_{n_0}^n u_k \right) = 0.$$

Teniendo en cuenta esta generalización del concepto de producto infinito convergente, se puede enunciar la siguiente proposición:

Un producto infinito se anula cuando, y sólo cuando, se anula al menos uno de sus factores.

Particularmente importantes son los productos infinitos de la forma $\prod_1^\infty f_k(z)$, donde $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ son funciones analíticas que pueden anularse en algunos puntos del recinto dado G. Aquí se considerarán tales productos en las siguientes condiciones:

a) cada conjunto cerrado y acotado $F \subset G$ puede contener solamente un conjunto finito de puntos en los cuales se anulan las funciones de la sucesión $\{f_k(z)\}$;

b) para cada conjunto cerrado y acotado $F \subset G$ existe un número natural $n(F) > 1$ tal, que para $k > n(F)$ ninguna de las funciones $f_k(z)$ se anula en los puntos del conjunto F.

El lector comprobará fácilmente que estas condiciones equivalen a las siguientes:

a′) el conjunto E de puntos, en los cuales se anula al menos una de las funciones $f_k(z)$, no tiene puntos de acumulación en el interior de G;

b′) en cada punto de E solamente se anula un número finito de funciones $\{f_k(z)\}$.

Supongamos también que se cumple la condición c): la serie $\sum_{n(F)+1}^\infty \ln f_k(z)$ converge uniformemente en cada conjunto cerrado y acotado F perteneciente a G. Entonces el producto $\prod_{n(F)+1}^\infty f_k(z)$ es uniforme-

mente convergente en F, es decir, es uniformemente convergente la sucesión $\{\prod_{n(F)+1}^{n} f_k(z)\}$ $(n \geqslant n(F)+1)$.

Como la función $\prod_{1}^{n(F)} f_k(z)$ es continua en F, estará acotada en valor absoluto y, por consiguiente, la sucesión de funciones

$$\prod_{1}^{n} f_k(z) = \prod_{1}^{n(F)} f_k(z) \prod_{n(F)+1}^{n} f_k(z)$$

también será uniformemente convergente en F.

Resumiendo, *de las hipótesis hechas respecto* $\{f_k(z)\}$ *se deduce que el producto infinito* $\prod_{1}^{\infty} f_k(z)$ *es uniformemente convergente en el interior de* G. *Por consiguiente, éste representa en este recinto una función analítica*

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} f_k(z),$$

que se anula en aquellos puntos de G, *y sólo en aquellos, en los cuales se anula al menos una de las funciones* $f_k(z)$.

§ 5. SERIES DE POTENCIAS. RELACION CON LAS SERIES DE FOURIER. DESARROLLO DE UNA FUNCION ANALITICA EN SERIE DE POTENCIAS

5.1. Las series de la forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \quad (5.1:1)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, z_0$ son unos números complejos dados, se llaman **series de potencias**. Estas forman la clase de series de funciones analíticas más simple y a la vez más importante. El siguiente teorema da una idea completa del campo de convergencia de las series de potencias.

Teorema de Cauchy-Hadamard. Sea $\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Entonces, si* $\Lambda = \infty$, *la serie* (5.1:1) *es convergente en el único punto* $z = z_0$; si $0 < \Lambda < \infty$, *la serie es absolutamente convergente en el círculo* $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ *y es divergente en el exterior de este círculo*; finalmente, *si* $\Lambda = 0$, *la serie es absolutamente convergente en todo el plano.*

De este modo, cuando $0 < \Lambda < \infty$, existe un círculo con el centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente.

Este se llama **círculo de convergencia de la serie de potencias** y su radio $R = \frac{1}{\Lambda}$, radio de convergencia de la misma. Los casos $\Lambda = \infty$, y $\Lambda = 0$ se pueden considerar como casos límites. En el primero de ellos el círculo de convergencia se reduce a un punto z_0 y su radio R es igual a cero. En el segundo, el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que se puede considerar que su radio es igual a ∞. Llamando en los tres casos al número R radio de convergencia de la serie de potencias, el contenido de la fórmula de Cauchy-Hadamard puede expresarse por la fórmula

$$R = \frac{1}{\Lambda}. \tag{5.1:2}$$

Esta última se llama **fórmula de Cauchy-Hadamard**.

He aquí la demostración del teorema. Consideramos tres casos:

a) $\Lambda = \infty$. En este caso, para cualquier $z \neq z_0$ existirá un conjunto infinito de valores $n = n_k$, para los cuales

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Pero de aquí se deduce que $|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| > 1$ y en ningún punto $z \neq z_0$ se cumple la condición necesaria para la convergencia de la serie (5.1:1): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n (z - z_0)^n = 0$. Por lo tanto, cuando $\Lambda = \infty$, la serie (5.1:1) converge solamente en el único punto: $z = z_0$.

b) $0 < \Lambda < \infty$. Tomemos primero un punto z en el interior del círculo $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ y sea $|z - z_0| = \frac{\theta^2}{\Lambda}$, donde $0 < \theta < 1$ (en el punto $z = z_0$ la convergencia de la serie es evidente). Como $\frac{\theta}{|z - z_0|} = \frac{\Lambda}{\theta} > \Lambda$, todos los valores de $\sqrt[n]{|a_n|}$, comenzando desde uno de ellos en adelante, tienen que ser menores que $\frac{\theta}{|z - z_0|}$. Por esta razón, comenzando desde cierto n, los módulos de todos los términos de la serie (5.1:1) satisfacen a la desigualdad

$$|a_n (z - z_0)^n| < \theta^n,$$

y como la serie $1 + \theta + \ldots + \theta^n + \ldots$ es convergente, la serie (5.1:1) será absolutamente convergente en todo punto z situado en el interior del círculo $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$.

Supongamos ahora que z está situado en el exterior de este círculo. Entonces $\Lambda > \frac{1}{|z - z_0|}$ y, por consiguiente, existirá un conjunto

infinito de valores $n = n_k$, para los cuales

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z-z_0|}.$$

Pero de aquí se deduce que $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > 1$, es decir, la condición necesaria para la convergencia de la serie (5.1:1): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n (z-z)^n = 0$, no se cumple en ningún punto que esté situado en el exterior del círculo $|z-z_0| < \frac{1}{\Lambda}$.

c) $\Lambda = 0$. Para cualquier $z \neq z_0$ y $0 < \theta < 1$, la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\theta}{|z-z_0|}$$

se cumplirá comenzando desde valores suficientemente grandes de n en adelante. Por consiguiente, comenzando desde cierto n, los módulos de todos los términos de la serie (5.1:1) satisfacen a las desigualdades

$$|a_n(z-z_0)^n| < \theta^n,$$

de donde se deduce la convergencia absoluta de la serie (5.1:1) en cualquier punto del plano.

Para las aplicaciones de la fórmula de Cauchy-Hadamard, en muchos casos suele ser útil la relación siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

Para demostrarla, observemos que

$$e^n = 1 + \frac{n}{1!} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!}\left[1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right],$$

de donde se deduce que

$$e^n < n\frac{n^n}{n!} + \frac{n^n}{n!}\left[1 + \frac{n}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \ldots\right] = (2n+1)\frac{n^n}{n!},$$

y, por otra parte,

$$e^n > \frac{n^n}{n!}.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n} < \frac{2n+1}{e^n},$$

de donde resulta lo que se afirmaba*)

*) En el cap. séptimo obtendremos una relación de la cual se deduce que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}(1+\varepsilon_n)$$

donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando n tiende al infinito.

Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard el lector comprobará fácilmente que los radios de convergencia de las series

$$\text{a)}\ \sum_{1}^{\infty} n^k z^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \qquad \text{c)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad \text{d)}\ \sum_{1}^{\infty} n! z^n$$

son iguales a: 1, $\frac{1}{e}$, ∞, 0, respectivamente.

En muchos casos resulta conveniente determinar el radio de convergencia de una serie de potencias mediante el criterio de D'Alembert. Así, en el ejemplo b) el módulo de la razón de un término al anterior es igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z|$ y, por consiguiente, tiende al límite $e|z|$ cuando n tiende al infinito. De aquí se deduce que la serie es absolutamente convergente si $|z| < \frac{1}{e}$ y es divergente si $|z| > \frac{1}{e}$, es decir, su radio de convergencia es igual a $\frac{1}{e}$.

Examinemos también el ejemplo de la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k!}$. Aquí los coeficientes a_n son iguales a 0 si $n \neq k^2$, e iguales a $\frac{1}{k!}$ si $n = k^2$. De aquí que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{1}{k^k}} = 1$$

y el radio de convergencia es igual a 1. El módulo de la razón de un término al anterior es, en este caso, igual a $\frac{|z|^{2k+1}}{k+1}$ y, por consiguiente, tiende a cero si $|z| < 1$, y tiende al infinito si $|z| > 1$. De aquí que el radio de convergencia de la serie es de nuevo igual a 1.

A continuación consideraremos las series de potencias para las cuales $R > 0$, es decir, $\Lambda < \infty$. De la igualdad de Cauchy-Hadamard

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

sacamos la conclusión de que para cualquier $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < R)$

$$|a_n| < \frac{1}{(R-\varepsilon)^n} \text{ para } n > N(\varepsilon) \tag{5.1:3}$$

si $R < \infty$, y

$$|a_n| < \varepsilon^n \text{ para } n > N(\varepsilon) \tag{5.1:4}$$

si $R = \infty$.

En resumen, los coeficientes de una serie de potencias cuyo radio de convergencia sea mayor que cero, crecen con una rapidez no mayor que una progresión geométrica de razón $\frac{1}{R-\varepsilon}$ $(R < \infty)$ o ε $(R = \infty)$, donde ε es un número positivo arbitrariamente pequeño.

Del teorema de Cauchy-Hadamard, como consecuencia, se deduce el siguiente:

Primer teorema de Abel. *Si la serie* (5.1:1) *converge en un punto $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente en el interior de la circunferencia con el centro en z_0, que pasa por el punto z_1.*

En efecto, de la convergencia de la serie (5.1:1) en el punto $z_1 \neq z_0$ se deduce, en primer lugar, que su radio de convergencia es mayor que cero (posiblemente, es infinito), y, en segundo lugar, que z_1 está situado en el interior o en la frontera del círculo de convergencia (en todo punto exterior al círculo de convergencia la serie de potencias es divergente). Por esta razón, el círculo $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ es una parte de todo el círculo de convergencia o coincide con el mismo; de esto se deduce que la serie es absolutamente convergente en tal círculo.

Demostremos ahora que la serie de potencias es uniformemente convergente en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| < R$. Evidentemente, es suficiente demostrar que la serie es uniformemente convergente en todo círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r < R$. En efecto, cualquier conjunto cerrado y acotado F, perteneciente al círculo de convergencia, estará contenido en el círculo $|z - z_0| \leqslant r$ para r suficientemente próximo a R.

Tomemos en el círculo de convergencia un punto ζ situado en el exterior de la circunferencia $|z - z_0| = r$, $r < |\zeta - z_0| = \rho < R$. En este punto la serie (5.1:1) tiene que ser absolutamente convergente:

$$\sum_0^\infty |a_n| |\zeta - z_0|^n = \sum_0^\infty |a_n| \rho^n < \infty.$$

Como en cada punto del círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r$ se cumple la desigualdad

$$|a_n (z - z_0)^n| \leqslant |a_n| \rho^n,$$

por el criterio de comparación de las series deducimos que la serie (5.1:1) es uniformemente convergente en cada círculo $|z - z_0| \leqslant r < R$, con lo cual se termina la demostración.

Obsérvese que aquí no se afirmaba que la serie de potencias es uniformemente convergente en su círculo de convergencia. En efecto, en el ap. 4.1 se había demostrado que la progresión geométrica

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,$$

que, evidentemente, representa una serie de potencias con el radio de convergencia igual a uno, no converge uniformemente en el círculo unidad, es decir, en su círculo de convergencia.

5.2. Coma la serie de potencias

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{5.2:1}$$

es una serie de funciones analíticas uniformemente convergente en el interior del recinto K: $|z - z_0| < R$ $(R > 0)$, puede aplicarse el teorema de Weierstrass del ap. 4.1. Por consiguiente, la suma $f(z)$ de la serie de potencias es una función analítica en el círculo K y su derivada de orden cualquiera k puede obtenerse derivando término a término la serie (5.2:1):

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) = k!a_k + (k+1)k \ldots 2a_{k+1}(z - z_0) + \\ + \ldots + n(n-1) \ldots (n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k} + \ldots \end{aligned} \tag{5.2:2}$$

Haciendo aquí $z = z_0$, resulta

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k,$$

de donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots). \tag{5.2:3}$$

Evidentemente, las fórmulas obtenidas son válidas también para $k = 0$, lo cual se obtiene inmediatamente de la serie (5.2:1) para $z = z_0$. Poniendo en la expresión (5.2:1) los valores hallados de los coeficientes, tendremos:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \tag{5.2:4}$$

La serie que figura en el segundo miembro se llama Serie de Taylor de la función $f(z)$. Por consiguiente, queda demostrado que toda serie de potencias es la serie de Taylor para su suma $f(z)$.

Supongamos que las sumas de dos series de potencias

$$A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \ldots + A_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{5.2:5}$$

y

$$B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \ldots + B_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{5.2:6}$$

con los radios positivos de convergencia R_1 y R_2, coinciden en un entorno del punto z_0, es decir,

$$\begin{aligned} A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \ldots = \\ = B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \ldots, \end{aligned}$$

si $|z - z_0| < r$. Designando con $F(z)$ el valor común de estas series, tendremos según las fórmulas (5.2:3):

$$A_0 = B_0 = F(z_0), \quad A_1 = B_1 = \frac{F'(z_0)}{1!}, \ldots, \quad A_n = B_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$$

Por lo tanto, los coeficientes correspondientes de las series y, por consiguiente, sus radios de convergencia R_1 y R_2, coinciden; las series son idénticas. Hemos obtenido el teorema de unicidad del desarrollo en serie de potencias. *)

Teorema. *De la coincidencia de las sumas de dos series de potencias en un entorno del punto* z_0 *se deduce la igualdad de los coeficientes de las mismas potencias de* $z - z_0$.

En el teorema es esencial que z_0 es el mismo para ambas series. Señalemos que este teorema puede enunciarse del modo siguiente: *solamente puede existir una serie de potencias de* $(z - z_0)$ *que tenga una suma dada en un entorno del punto* z_0.

Este enunciado explica la misma denominación del teorema: teorema de unicidad.

Como ilustración de la propiedad demostrada, examinemos la forma de las series de potencias de z que representan funciones pares e impares de z, respectivamente.

Sea $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$, y supongamos primero que $f(z)$ es una función par, es decir, $f(-z) = f(z)$. Entonces, sustituyendo z por $-z$, tendremos:

$$f(-z = a_0 - a_1z + a_2z^2 + \ldots + (-1)^n a_nz^n + \ldots$$

Como, por la hipótesis, las sumas de estas dos series coinciden, en virtud del teorema de identidad, resulta:

$$a_n = (-1)^n a_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

de donde para n impar

$$a_{2m+1} = -a_{2m+1}, \text{ o bien } a_{2m+1} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

En resumen, si la suma de una serie de potencias es una función par, todos los coeficientes de potencias impares de z tienen que ser iguales a cero y, por consiguiente, el desarrollo de $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = a_0 + a_2z^2 + a_4z^4 + \ldots + a_{2m}z^{2m} + \ldots$$

Análogamente, si $f(z)$ es una función impar, es decir, $f(-z) = -f(z)$, resulta que todos los coeficientes de potencias pares de z tienen que ser iguales a cero, de modo que el desarrollo de $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = a_1z + a_3z^3 + \ldots + a_{2m+1}z^{2m+1} + \ldots$$

Para que el lector comprenda que el teorema de identidad no se puede considerar por sí mismo evidente, enunciemos la propiedad de identidad para las series en forma general. Se dirá que un desarrollo

---

*) En los libros de matemáticas españoles suele llamarse teorema (o principio) de identidad. (*Nota del T.*)

en serie

$$A_0\varphi_0(z)+A_1\varphi_1(z)+\ldots+A_n\varphi_n(z)+\ldots$$

según las funciones dadas

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots$$

posee la propiedad de identidad en un conjunto E, si de la coincidencia de las sumas de dos series

$$A_0\varphi_0(z)+A_1\varphi_1(z)+\ldots+A_n\varphi_n(z)+\ldots,$$
$$B_0\varphi_0(z)+B_1\varphi_1(z)+\ldots+B_n\varphi_n(z)+\ldots,$$

convergentes en este conjunto, se deduce la igualdad de los coeficientes correspondientes:

$$A_0=B_0,\ A_1=B_1,\ \ldots,\ A_n=B_n,\ \ldots$$

Escribiendo la relación

$$A_0\varphi_0(z)+A_1\varphi_1(z)+\ldots+A_n\varphi_n(z)+\ldots=$$
$$=B_0\varphi_0(z)+B_1\varphi_1(z)+\ldots+B_n\varphi_n(z)+\ldots$$

en la forma

$$C_0\varphi_0(z)+C_1\varphi_1(z)+\ldots+C_n\varphi_n(z)+\ldots=0,$$

donde

$$C_0=A_0-B_0,\ C_1=A_1-B_1,\ \ldots,\ C_n=A_n-B_n,\ \ldots,$$

puede enunciarse la propiedad de identidad de otro modo: los desarrollos en series de funciones $\{\varphi_n(z)\}$ poseen la propiedad de identidad en un conjunto E, si de la anulación de la suma de la serie para todos los puntos z pertenecientes a E, se deduce que todos los coeficientes de la serie son iguales a cero:

$$C_0=C_1=\ldots=C_n=\ldots=0.$$

Como se demostró, los desarrollos en series de las funciones $\varphi_n(z)=(z-z_0)^n$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$ poseen la propiedad de identidad en cualquier círculo con el centro en z_0. Tomando, por ejemplo,

$$\varphi_0(z)=1,\ \varphi_1(z)=z-1,\ \varphi_2(z)=z^2-z,\ \ldots,\ \varphi_n(z)=z^n-z^{n-1},\ \ldots,$$

resulta que la propiedad de identidad no se cumple en el círculo $|z|<1$.

En efecto, para la serie

$$\varphi_0(z)+\varphi_1(z)+\ldots+\varphi_n(z)+\ldots,$$

cuyos coeficientes son distintos de cero $(C_0=C_1=C_2=\ldots$ $\ldots=C_n=\ldots=1)$, la suma parcial

$$\varphi_0(z)+\varphi_1(z)+\ldots+\varphi_n(z)=1+(z-1)+(z^2-z)+\ldots+(z^n-z^{n-1})$$

es igual a z^n, y como para $|z| < 1$: $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, la serie dada es convergente en el interior del círculo $|z| < 1$ (y además, uniformemente) y su suma es igual a cero.

De aquí se deduce que, si la serie de funciones $\{\varphi_n(z)\}$:

$$A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \ldots + A_n\varphi_n(z) + \ldots,$$

es convergente en el interior del círculo $|z| < 1$ y su suma es $F(z)$, entonces todas las series

$$(A_0+\lambda)\varphi_0(z) + (A_1+\lambda)\varphi_1(z) + \ldots + (A_n+\lambda)\varphi_n(z) + \ldots,$$

donde λ es un número complejo arbitrario, también son convergentes en el interior del círculo $|z| < 1$ y poseen una misma suma $F(z)$. En resumen, las sumas de dos series de funciones de un sistema $\{\varphi_n(z)\}$ pueden coincidir, a pesar de que ninguno de los coeficientes de una serie es igual al coeficiente correspondiente de la otra.

El método de los coeficientes indeterminados está basado en la propiedad de identidad de los desarrollos en serie de funciones de un sistema dado $\{\varphi_n(z)\}$.

Si los coeficientes de una serie convergente

$$A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \ldots + A_n\varphi_n(z) + \ldots$$

son desconocidos («coeficientes indeterminados») y si mediante ciertas operaciones efectuadas sobre esta serie y unas series dadas, resulta una relación de la forma

$$C_0\varphi_0(z) + C_1\varphi_1(z) + \ldots + C_n\varphi_n(z) + \ldots = 0,$$

cuyos coeficientes representan unas combinaciones determinadas de las incógnitas $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ y otros números dados, entonces, según la propiedad de identidad se obtiene un sistema infinito de ecuaciones:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \ \ldots, \quad C_n = 0, \ \ldots$$

Este último sistema puede servir para buscar los coeficientes A_0, $A_1, \ldots, A_n$. En adelante emplearemos este método para dividir las series de potencias.

En el caso más sencillo, cuando las series de potencias (5.2:5) y (5.2:6) se reducen a polinomios

$$A_0 + A_1z + \ldots + A_nz^n \ \text{ y } \ B_0 + B_1z + \ldots + B_mz^m,$$

para aplicar el teorema de identidad no es necesario que se sepa que los valores de estos polinomios coinciden para todos los puntos z pertenecientes a cierto círculo. Si se conoce que los grados de los polinomios no superan a cierto número natural N ($n \leqslant N$ y $m \leqslant N$), entonces, de la coincidencia de los valores de los polinomios en $N+1$

puntos distintos se deduce que los grados de estos polinomios son iguales ($n = m$) y que los coeficientes correspondientes son iguales dos a dos:

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ \ldots, \quad A_n = B_n.$$

Para las series de potencias (que en cierto sentido pueden considerarse como un género de «polinomios de grado indefinidamente grande») se puede deducir la igualdad de los coeficientes solamente cuando coinciden las sumas de las series en un conjunto infinito de puntos. No obstante, no hay necesidad de que se sepa que coinciden las sumas de las series en todos los puntos de cierto círculo (precisamente esto se suponía cuando se demostraba el teorema de identidad para las series de potencias). Es suficiente saber que las series (5.2:5) y (5.2:6) coinciden en un conjunto de puntos con el punto de acumulación z_0 $\left(\text{por ejemplo, en el conjunto de puntos } z_n = z_0 + \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \ldots)\right)$. Precisamente, subsiste el siguiente teorema, que es una generalización del pripcipio de identidad demostrado.

Si las sumas de dos series de potencias

$$A_0 + A_1(z - z_0) + \ldots + A_n(z - z_0)^n + \ldots$$

y

$$B_0 + B_1(z - z_0) + \ldots + B_n(z - z_0)^n + \ldots$$

coinciden en un conjunto de puntos E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, entonces los coeficientes de estas series son iguales entre sí, es decir,

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ \ldots, \ A_n = B_n, \ \ldots$$

D e m o s t r a c i ó n. Sea $\{z_n\}$ alguna sucesión de puntos del conjunto E, distintos de z_0, convergente hacia z_0: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. De la subsistencia de la igualdad

$$A_0 + A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \ldots = \\ = B_0 + B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \ldots, \quad (5.2:7)$$

para cualquier n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), y teniendo en cuenta que la suma de la serie de potencias es continua en el interior del círculo de convergencia, sacamos la conclusión de que

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} [A_0 + A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \ldots] = \\ = \lim_{n\to\infty} [B_0 + B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \ldots] = B_0,$$

o sea,

$$A_0 = B_0.$$

De aquí se deduce que

$$A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \ldots = B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \ldots$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y como $z_n \neq z_0$, resulta

$$A_1 + A_2(z_n - z_0) + \ldots = B_1 + B_2(z_n - z_0) + \ldots$$

para cualquier n. Pasando de nuevo a límites para $n \to \infty$, obtenemos:

$$A_1 = B_1.$$

Supongamos que, en general, ya se han demostrado las igualdades

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ \ldots, \ A_k = B_k.$$

Entonces de la igualdad (5.2:7) se deduce que para cualquier n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned} &A_{k+1}(z_n - z_0)^{k+1} + A_{k+2}(z_n - z_0)^{k+2} + \ldots = \\ &= B_{k+1}(z_n - z_0)^{k+1} + B_{k+2}(z_n - z_0)^{k+2} + \ldots, \end{aligned}$$

o bien, simplificando por $(z_n - z_0)^{k+1} \neq 0$ y pasando a límites para $n \to \infty$, $A_{k+1} = B_{k+1}$. Con esto el teorema queda demostrado.

5.3. Cerciorémonos de que la serie de potencias puede considerarse como cierta analogía de la serie de Fourier para la función $f(z)$. Con este fin, observemos que las potencias $(z - z_0)^n$ poseen la siguiente *propiedad de ortogonalidad en cada circunferecia* $|z - z_0| = \rho$:

$$\int_0^{2\pi} (z - z_0)^n \overline{(z - z_0)}^m \, d\theta = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m. \tag{5.3:1}$$

En efecto, haciendo $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$, tendremos:

$$(z - z_0)^n \overline{(z - z_0)}^m = \rho^{m+n} e^{i(n-m)\theta}$$

y, por consiguiente,

$$\int_0^{2\pi} (z - z_0)^n \overline{(z - z_0)}^m \, d\theta = \rho^{m+n} \left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Supongamos que ρ satisface a las condiciones: $0 < \rho < R$ (R es el radio de convergencia de la serie). Como la serie de potencias es uniformemente convergente en la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$, situada en el círculo de convergencia K, en la misma circunferencia también será uniformemente convergente la serie

$$f(\zeta)\overline{(\zeta - z_0)}^m = a_0 \overline{(\zeta - z_0)}^m + \ldots + a_n(\zeta - z_0)^n \overline{(\zeta - z_0)}^m + \ldots$$

Integrándola término a término y teniendo en cuenta la relación de ortogonalidad (5.3:1), tendremos:

$$\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta = a_m \int_0^{2\pi} (\zeta-z_0)^m\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta = 2\pi\rho^{2m}a_m.$$

De aquí que

$$a_m = \frac{1}{2\pi\rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta \quad (m=0,\,1,\,2,\,\ldots), \qquad (5.3:2)$$

y, por consiguiente, la serie de potencias puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi\rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta\cdot(z-z_0)^m. \qquad (5.3:3)$$

Así, pues, la serie de potencias representa el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de polinomios $\{(z-z_0)^m\}$, ortogonales en cada circunferencia con el centro en el punto z_0.

Como una de las aplicaciones de las relaciones de ortogonalidad (5.3:1) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_0^n a_m(z-z_0)^m\right|^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_0^n a_m(z-z_0)^m\cdot\sum_0^n \bar{a}_m\,\overline{(z-z_0)}^m\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h,\,m=0}^n a_h\bar{a}_m(z-z_0)^h\,\overline{(z-z_0)}^m\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{h,\,m=0}^n a_h\bar{a}_m\int_0^{2\pi}(z-z_0)^h\,\overline{(z-z_0)}^m\,d\theta = \sum_0^n |a_m|^2\rho^{2m}.$$

(Todas las integrales, correspondientes a $h \neq m$, son nulas)

En resumen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_0^n a_m(z-z_0)^m\right|^2 d\theta = \sum_0^n |a_m|^2\rho^{2m}.$$

Suponiendo aquí $\rho < R$, pasemos a límites para $n \to \infty$. Como la sucesión

$$\left|\sum_0^n a_m(z-z_0)^m\right|$$

está formada por funciones continuas y es uniformemente convergente en la circunferencia $| z - z_0 | = \rho$, la sucesión de funciones continuas $\{| \sum_{0}^{n} a_m (z - z_0)^m |\}$ será uniformemente convergente en la misma circunferencia (véase la observación al final del ap. 4.2). Por consiguiente, es posible el paso al límite bajo el signo integral (correspondiente en el caso de las series a la integración término a término), obteniendo:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} | f(z_0 + \rho e^{i\theta}) |^2 \, d\theta =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left| \sum_{0}^{n} a_m (z - z_0)^m \right|^2 d\theta = \lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{n} | a_m |^2 \rho^{2m}.$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que la serie $\sum_{0}^{\infty} | a_m |^2 \rho^{2m}$ es convergente y, en segundo lugar, que su suma es igual a la integral $\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} | f(z) |^2 \, d\theta$:

$$\sum_{0}^{\infty} | a_m |^2 \rho^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} | f(z_0 + \rho e^{i\theta}) |^2 \, d\theta. \qquad (5.3:4)$$

Esta relación es análoga a la igualdad de Parseval en la teoría de las series de Fourier. De la relación (5.3:4) se deduce que la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} | f(z_0 + \rho e^{i\theta}) |^2 \, d\theta,$$

que representa el valor medio del cuadrado del módulo de la función analítica $f(z)$ en la circunferencia $| z - z_0 | = \rho$, es una función no decreciente de ρ. Por consiguiente, siempre existe el límite (finito o infinito)

$$\lim_{\rho \to R} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} | f(z_0 + \rho e^{i\theta}) |^2 \, d\theta.$$

Transformemos la expresión (5.3:2) de los coeficientes de la serie de potencias. Con este fin, hagamos $\zeta - z_0 = \rho e^{i\theta}$; entonces tendremos:

$$a_m = \frac{1}{2\pi \rho^m} \int_{0}^{2\pi} f(\zeta) \, e^{-im\theta} \, d\theta. \qquad (5.3:5)$$

Por otra parte, según el teorema integral de Cauchy:

$$\int_0^{2\pi} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{m-1}\, d\zeta = 0 \quad (m \geqslant 1),$$

o bien,

$$\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, \rho^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \rho i e^{i\theta}\, d\theta = 0,$$

y, finalmente,

$$0 = \frac{1}{2\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{im\theta}\, d\theta \quad (m \geqslant 1). \tag{5.3:6}$$

Sumando y restando (5.3:5) y (5.3:6), obtenemos:

$$a_m = \frac{1}{\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \cos m\theta\, d\theta = \frac{-i}{\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \quad (m \geqslant 1). \tag{5.3:7}$$

Sea

$$a_m = \alpha_m + i\beta_m \quad \text{y} \quad f(\zeta) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta);$$

entonces de las fórmulas (5.3:7) hallamos:

$$\left.\begin{aligned} \rho^m \alpha_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \cos m\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m \geqslant 1) \\ \rho^m \beta_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) \cos m\theta\, d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5.3:8}$$

Además, la fórmula (5.3:5) para $m = 0$ da:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\, d\theta, \quad \beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta)\, d\theta.$$

De aquí se deduce que los números α_0, $\rho^m\alpha_m$ y $-\rho^m\beta_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ son los coeficientes de Fourier de la función $u(\rho, \theta) = \operatorname{Re} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ y los números β_0, $\rho^m\beta_m$ y $\rho^m\alpha_m$, los coeficientes de Fourier de la función $v(\rho, \theta) = \operatorname{Im} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$.

En otras palabras, las funciones $u(\rho, \theta)$ y $v(\rho, \theta)$ poseen desarrollos de Fourier conjugados:

$$u(\rho, \theta) \sim \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \operatorname{sen} m\theta),$$

$$v(\rho, \theta) \sim \beta_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (\beta_m \cos m\theta) + \alpha_m \operatorname{sen} m\theta).$$

Separando las partes real e imaginaria en la serie de potencias $f(z_0+\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) =$

$$= \sum_0^{\infty} a_m (z-z_0)^m = \sum_0^{\infty} (\alpha_m + i\beta_m)\, \rho^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)$$

resultan estas mismas series:

$$\left.\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_m \rho^m \cos m\theta - \beta_m \rho^m \operatorname{sen} m\theta), \\ v(\rho, \theta) &= \beta_0 + \sum_1^{\infty} (\beta_m \rho^m \cos m\theta + \alpha_m \rho^m \operatorname{sen} m\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (5.3{:}9)$$

En resumen, *las partes real e imaginaria de una serie de potencias son las series de Fourier para las partes real e imaginaria de su suma. Estas series son conjugadas entre sí.*

Demostremos también cómo se puede obtener de la igualdad (5.3:4) la igualdad de Parseval para las funciones $u(\rho, \theta)$ y $v(\rho, \theta)$.

Observando que

$$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2 = [u(\rho, \theta)]^2 + [v(\rho, \theta)]^2,$$

representemos (5.3:4) en la forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2\, d\theta = \sum_0^{\infty} |a_m|^2 \rho^{2m}. \quad (5.3{:}10)$$

Por otra parte, fácilmente se puede obtener una relación que exprese la diferencia de las integrales $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2\, d\theta$ y $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2\, d\theta$, si recordamos que la media aritmética de los valores que toma la función analítica $[f(z_0+\rho e^{i\theta})]^2$ en la circunferencia $|z-z_0| = \rho$, tiene que coincidir con su valor en el centro de la circunferencia (ap. 3.2):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(z_0+\rho e^{i\theta})]^2\, d\theta = [f(z_0)]^2. \qquad (5.3{:}11)$$

Observando que

$$[f(z_0+\rho e^{i\theta})]^2 = [u(\rho, \theta)]^2 - [v(\rho, \theta)]^2 + 2iu(\rho, \theta)\, v(\rho, \theta),$$
$$[f(z_0)]^2 = a_0^2 = \alpha_0^2 - \beta_0^2 + 2i\alpha_0\beta_0,$$

y separando las partes reales en la igualdad (5.3:11), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2\, d\theta = \alpha_0^2 - \beta_0^2. \quad (5.3{:}12)$$

Sumando y restando término a término (5.3:10) y (5.3:12), hallamos:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[u(\rho,\theta)]^2\,d\theta=\alpha_0^2-\beta_0^2+\sum_0^\infty|a_m|^2\rho^{2m}=2\alpha_0^2+\sum_1^\infty(\alpha_m^2+\beta_m^2)\,\rho^{2m},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[v(\rho,\theta)]^2\,d\theta=\beta_0^2-\alpha_0^2+\sum_0^\infty|a_m|^2\rho^{2m}=2\beta_0^2+\sum_1^\infty(\beta_m^2+\alpha_m^2)\,\rho^{2m}.$$

Evidentemente, las relaciones obtenidas representan las igualdades de Parseval para las funciones $u(\rho,\theta)$ y $v(\rho,\theta)$.

5.4. En el ap. 5.2 se obtuvo la expresión de los coeficientes de una serie de potencias mediante las derivadas de su suma en el centro del círculo de convergencia K:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Pero en el ap. 3.2 se vio que para cualquier ρ, $0<\rho<R$, los módulos de las derivadas satisfacen a las desigualdades

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant n!\,\frac{M(\rho)}{\rho^n},$$

donde $M(\rho)=\max\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$. De aquí se deducen las siguientes desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de potencias (acotación de Cauchy):

$$|a_n|\leqslant\frac{M(\rho)}{\rho^n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\tag{5.4:1}$$

De las desigualdades de Cauchy se deduce que todos los términos de la serie $\sum\limits_0^\infty|a_n|^2\rho^{2n}$ están acotados; precisamente, cada uno de ellos no es superior a $[M(\rho)]^2$. Sin embargo, la relación (5.3:4) permite afirmar mucho más. Resulta que la *serie* $\sum\limits_0^\infty|a_n|^2\rho^{2n}$ *es convergente* (para $\rho<R$) *y su suma no es superior a la misma cota* $[M(\rho)]^2$. En efecto, se tiene:

$$\sum_0^\infty|a_n|^2\rho^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta.$$

Pero

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta\leqslant[M(\rho)]^2,$$

por consiguiente,

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leqslant [M(\rho)]^2. \qquad (5.4:1')$$

Suponiendo que para cierto $n = n_0 \geqslant 0$ y para ρ, $0 < \rho < R$, en las desigualdades de Cauchy se verifica la igualdad

$$|a_{n_0}| = \frac{M(\rho)}{\rho^{n_0}},$$

o bien

$$|a_{n_0}|^2 \rho^{2n_0} = [M(\rho)]^2,$$

de la desigualdad (5.4:1′) sacamos la conclusión de que todos los coeficientes a_n para $n \neq n_0$ son iguales a cero. Esto significa que la serie de potencias se reduce a uno de sus términos $a_{n_0} z^{n_0}$ y, por consiguiente,

$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0}.$$

En resumen, exluyendo el caso en que la serie de potencias se reduzca a uno de sus términos (los coeficientes de todos los demás términos son ceros), en las relaciones (5.4:1) las desigualdades siempre son estrictas. En particular, para $n = 0$, resulta

$$|a_0| = |f(z_0)| < M(\rho), \quad \text{si} \quad f(z) \not\equiv a_0,$$

es decir, el principio del módulo máximo en su forma definitiva para la suma de la serie de potencias.

Como las derivadas de una función analítica pueden expresarse según las fórmulas del ap. 3.2 en forma de integrales

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (\rho < R),$$

para los coeficientes de la serie de potencias se verifican también las siguientes expresiones integrales:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (5.4:2)$$

Demostremos que estas fórmulas pueden obtenerse directamente examinando la serie de potencias. Para esto multipliquemos todos los términos de la serie

$$f(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_m (\zeta - z_0)^m,$$

uniformemente convergente en la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$, por $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ e integremos término a término sobre la circunfe-

rencia $\gamma: |\zeta - z_0| = \rho$; obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{0}^{\infty} a_m \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\zeta - z_0)^{m-n-1}\,d\zeta. \qquad (5.4:3)$$

Pero

$$\int_{\gamma}(\zeta - z_0)^{m-n-1}\,d\zeta = \int_{0}^{2\pi}\rho^{m-n-1}e^{(m-n-1)\,i\theta}\rho e^{i\theta} i\,d\theta = i\rho^{m-n}\int_{0}^{2\pi}e^{(m-n)\,i\theta}\,d\theta;$$

si $m \neq n$, esta integral es, evidentemente, igual a cero:

$$i\rho^{m-n}\int_{0}^{2\pi}e^{(m-n)\,i\theta}\,d\theta = i\rho^{m-n}\left[\frac{e^{(m-n)\,i\theta}}{(m-n)\,i}\right]_0^{2\pi} = 0;$$

si $m = n$, ésta es igual a $2\pi i$:

$$i\int_{0}^{2\pi}d\theta = 2\pi i.$$

De aquí se deduce que todos los términos de la suma en el segundo miembro de la fórmula (5.4:3), menos uno, correspondiente a $m = n$, son iguales a cero, y obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = a_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

es decir, las fórmulas (5.4:2).

Aplicando las expresiones integrales de los coeficientes, que acabamos de obtener sin basarse en la fórmula integral de Cauchy, se puede dar una demostración de la fórmula integral de Cauchy para la función $f(z)$ (la suma de la serie de potencias), distinta de la expuesta anteriormente (ap. 3.1). Pongamos la expresión (5.4:2) en la serie de potencias. Tendremos:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,(z - z_0)^n. \qquad (5.4:4)$$

La serie que figura en el segundo miembro puede obtenerse integrando término a término la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)\frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$, la cual converge uniformemente en la circunferencia $\gamma: |\zeta - z_0| = \rho$, si z es un punto fijo situado en el interior de γ. En efecto, para el módulo

del término general de la serie se tiene la cota:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z)_0{}^{n+1}} \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho} \left(\frac{|z-z_0|}{\rho} \right)^n,$$

donde $M(\rho) = \max |f(\zeta)|$ y $|z-z_0| < \rho$. Pero, evidentemente, en el segundo miembro figura el término general de una serie numérica convergente (una progresión geométrica con la razón $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$), de donde se deduce la convergencia uniforme de la serie considerada. Por esta razón, el resultado de la integración término a término de esta serie tiene que coincidir con la integral de la suma de la serie, y obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_0^\infty f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \sum_0^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \frac{\frac{1}{\zeta-z_0}}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta-z}.$$

Esta es la fórmula integral de Cauchy para la suma de la serie de potencias.

Así, pues, la fórmula integral de Cauchy puede obtenerse de la serie de potencias representando sus coeficientes en forma de integrales, sustituyendo después la suma de las integrales de los términos de la serie uniformemente convergente por la integral de la suma y finalmente, sumando, la progresión geométrica obtenida bajo el signo integral. Cauchy efectuó todos estos razonamientos en orden inverso y halló que toda función expresable en forma de Cauchy, es decir, toda función analítica, se representa por una serie de potencias. Demostremos esta proposición admirable.

Teorema de Cauchy sobre el desarrollo de una función analítica en serie de potencias. *Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en un recinto G; sea z_0 un punto (finito) arbitrario del recinto G y Δ, la distancia desde z_0 hasta la frontera de este recinto. Entonces existe una serie de potencias de $z - z_0$ convergente en el círculo K: $|z-z_0| < \Delta$, que representa en este círculo la función $f(z)$:*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n. \qquad (5.4:5)$$

(Obsérvese que la frontera del recinto G puede reducirse al único punto del infinito. En este caso se debe suponer que Δ es infinito).

Empezando a demostrar el teorema, tomemos un punto arbitrario $z \in K$ y describamos una circunferencia γ con el centro en z_0:

$|\zeta - z_0| = \rho$, donde $0 \leqslant |z - z_0| < \rho < \Delta$ (fig. 57). Según la fórmula integral de Cauchy, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Para obtener de aquí una serie de potencias de $z - z_0$, consideremos $\frac{1}{\zeta - z}$ como la suma de una serie geométrica de razón $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$,

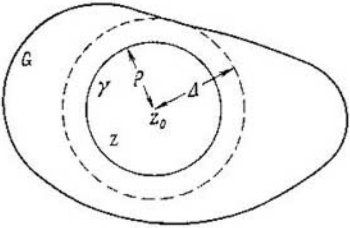

FIG. 57

cuyo módulo es: $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = \theta < 1$. Con este fin representemos $\frac{1}{\zeta - z}$ en la forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} +$$

$$+ \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \qquad (5.4:6)$$

Como para todos los puntos ζ, pertenecientes a γ, el módulo del término general de la última serie es:

$$\left|\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{\rho}\theta^n \qquad (0 < \theta < 1),$$

la serie (5.4:6) converge uniformemente en γ (respecto de $\zeta \in \gamma$). También convergerá uniformemente la serie obtenida de (5.4:6) al multiplicar ésta por la función $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ la cual está acotada en valor absoluto en γ, es decir, la serie

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \qquad (5.4:7)$$

De aquí se deduce que la serie (5.4:7) puede integrarse término a término en γ. Efectuando la integración, resulta:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{5.4:8}$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{5.4:9}$$

Hemos obtenido el desarrollo de la función analítica en serie de potencias (serie de Taylor). Del mismo método de su obtención (z es un punto arbitrario del círculo K) se deduce que esta serie es convergente en cualquier punto del círculo K: $|z-z_0|<\Delta$.

El teorema queda demostrado completamente.

Este teorema es de una importancia capital, puesto que muestra que una función $f(z)$ de variable compleja que es derivable en un recinto G (pues así es la definición admitida de función analítica de variable compleja), se expresa por una serie de potencias de $z-z_0$ en un entorno de cualquier punto z_0 del recinto G. Precisamente esta propiedad justifica la denominación misma de las funciones de variable compleja que son derivables en un recinto al llamarlas funciones analíticas.

Para las funciones de variable real, o con más generalidad, para las funciones definidas en alguna línea Γ (por ejemplo, en una curva de Jordan del plano ampliado), no subsiste semejante propiedad. Una función derivable e incluso indefinidamente derivable en Γ, puede no expresarse por una serie de potencias en ninguno de los entornos de los puntos de Γ y, por consiguiente, puede no ser analítica. Por esta razón, al aplicar el concepto de función analítica para las funciones definidas en curvas de Jordan (por ejemplo, para las funciones de variable real), no hay que basarse en la derivabilidad, sino que hay que exigir que las funciones sean expresables por series de potencias.

Como la serie de potencias

$$\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

que representa la función $f(z)$ en un entorno del punto z_0, según lo demostrado en el teorema de Cauchy, es convergente en el círculo $|z-z_0|<\Delta$, su radio de convergencia R tiene que ser no menor que Δ:

$$R\geqslant\Delta.$$

Escribiendo esta desigualdad en la forma $\frac{1}{R_1} \leqslant \frac{1}{\Delta}$ y sustituyendo $\frac{1}{R}$ según la fórmula de Cauchy-Hadamard mediante $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}z_0|}{n!}}$, obtenemos la ya conocida desigualdad de Cauchy-Hadamard (3.3:10):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leqslant \frac{1}{\Delta}.$$

Del teorema de Cauchy se deduce, en particular, que las series de potencias que representan funciones enteras convergen hacia las mismas en todo el plano. En efecto, una función entera es analítica en el recinto G que coincide con todo el plano, de modo que la distancia Δ desde cualquier punto z_0 hasta la frontera de este recinto G se debe considerar infinita.

Sea $f(z)$ una función entera y z_0, algún punto del plano. Entonces tendremos:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (5.4:10)$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Como acabamos de señalar, esta serie sonverge hacia $f(z)$ en todo el plano. Para los coeficientes de la serie se tienen las acotaciones de Cauchy:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (5.4:11)$$

donde

$$M(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|.$$

En el caso considerado se puede tomar ρ arbitrariamente grande. De aquí se deduce que, *si el módulo de una función entera $f(z)$ se conserva acotado en todo el plano, es decir, si $M(\rho) \leqslant M < \infty$ para todos los valores ρ, entonces $f(z) \equiv$* const.

Este es el contenido del **teorema de Liouville**, que tiene numerosas aplicaciones en distintos problemas de la teoría de funciones.

Para demostrarlo, sustituyamos en las desigualdades (5.4:11) $M(\rho)$ por M y escribamos estas desigualdades solamente para valores naturales del índice n:

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Fijando arbitrariamente n, supongamos que ρ crece indefinidamente; tendremos:

$$|a_n| \leqslant 0, \text{ es decir } a_n = 0 \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

Debido a esto, de la relación (5.4:10) resulta que $f(z) = a_0$ para cualquier z, es decir, $f(z) \equiv \text{const}$, como se quería demostrar.

Haciendo $z_0 = 0$ y calculando las derivadas de órdenes distintos de las funciones elementales: $\exp z$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, el lector obtendrá fácilmente para ellas los siguientes desarrollos, convergentes en todo el plano:

$$\exp z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_0^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh} z = \sum_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \operatorname{ch} z = \sum_0^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Detengámonos en los desarrollos en series de potencias de las ramas uniformes de las funciones multiformes más elementales. Consideremos ante todo la rama uniforme $\ln z$, definida por la condición $\ln 1 = 0$ en el recinto G cuya frontera es la parte no positiva del eje real: $x \leqslant 0$, $y = 0$ (esta rama puede representarse en la forma $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, donde $|\arg z| < \pi$). Como $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ se tiene, $(\ln z)^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{z^k}$, y, por consiguiente, el desarrollo de $\ln z$ en serie de potencias de $z - 1$ tiene la forma

$$\ln z = \sum_0^\infty \frac{(\ln z)^{(k)}_{z=1}}{k!} (z-1)^k,$$

o bien

$$\ln z = \sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}.$$

La distancia Δ desde el punto $z_0 = 1$ hasta la frontera del recinto G es igual a uno. Debido a esto, el desarrollo obtenido puede utilizarse para $|z - 1| < 1$. Sustituyendo aquí $z - 1$ por z, se obtiene la serie de potencias para $\ln(1 + z)$ que es convergente para $|z| < 1$:

$$\ln(1+z) = \sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \quad (|z| < 1).$$

La función $\ln(1 + z)$ es la rama uniforme de la función $\operatorname{Ln}(1 + z)$, definida por la condición $[\ln(1 + z)]_{z=0} = \ln 1 = 0$ en el recinto G cuya frontera es la parte del eje real: $x \leqslant -1$, $y = 0$.

Examinemos ahora la función z^α, donde α es un número complejo arbitrario. Esta es una función multiforme (si α no es un número entero) que se expresa mediante la función exponencial y el logaritmo por la relación $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$.

Separemos una rama uniforme $\varphi(z)$ de esta función en el mismo recinto G que figuraba en el ejemplo precedente, mediante la condición $\varphi(1) = 1$. Esta rama puede representarse en la forma

$$\varphi(z) = \exp(\alpha \ln z),$$

de donde

$$\varphi'(z) = \alpha \exp(\alpha \ln z) \cdot \frac{1}{z} = \alpha \exp(\alpha \ln z) \cdot \exp(-\ln z) = \\ = \alpha \exp[(\alpha - 1) \ln z]$$

y luego,

$$\varphi^{(k)}(z) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\exp[(\alpha-k)\ln z] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

En el punto $z = 1$ las derivadas toman los valores $\varphi^{(k)}(1) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$ y, por consiguiente, el desarrollo de $\varphi(z)$ en serie de potencias de $z-1$ tiene la forma

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}(z-1)^k.$$

Como en el ejemplo anterior, este desarrollo es válido para $|z - 1| < 1$. Sustituyendo aquí $z - 1$ por z, se obtiene el desarrollo de $\varphi(z + 1)$ en serie de potencias de z. Empleando en lugar de $\varphi(z + 1)$ la designación ordinaria $(1 + z)^\alpha$ (entendida como la notación de la función uniforme $\exp[\alpha \ln(1 + z)]$ en el recinto G), resulta:

$$(1+z)^\alpha = \sum_0^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} z^k \qquad (|z| < 1).$$

Esta es la *serie binómica*, establecida aquí para el caso más general, cuando el exponente de la potencia es un número complejo arbitrario.

§ 6. UNICIDAD. A-PUNTOS DE UNA FUNCION ANALITICA. PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO. PUNTOS SINGULARES DEL ELEMENTO DE UNA FUNCION ANALITICA

6.1. En el ap. 5.2 se demostró el teorema que expresa la propiedad de identidad de los desarrollos de potencias de $z - z_0$, donde z_0 es un número complejo dado. Este teorema afirma que si las sumas

de dos series de potencias tales coinciden en un conjunto de puntos E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, entonces los coeficientes respectivos de las series son iguales. Luego, de aquí se deduce que coinciden también los círculos de convergencia de las dos series y que las sumas de las series son iguales entre sí en todo el círculo general de convergencia. En otras palabras, la suma de la serie de potencias queda determinada unívocamente en todos los puntos del círculo de convergencia, si se conocen sus valores en algún conjunto de puntos que tenga un punto de acumulación en el centro del círculo.

En vista de esta propiedad de las sumas de las series de potencias (que en círculo de convergencia son funciones analíticas uniformes), hagamos la siguiente pregunta general: ¿Se determina completamente una función uniforme $f(z)$, analítica en un recinto G, por sus valores dados en un conjunto arbitrario E que tenga en este recinto al menos un punto de acumulación?

En otras palabras, ¿coincidirán en todo el recinto G los valores de dos funciones uniformes y analíticas en este recinto, $f(z)$ y $\varphi(z)$, si éstas coinciden en un conjunto de puntos E de este recinto que tiene en este último un punto de acumulación?

El teorema que sigue da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

T e o r e m a i n t e r i o r d e u n i c i d a d. *Sea G un recinto, en el cual están definidas dos funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$, uniformes y analíticas en todos los puntos de G. Supongamos que estas funciones coinciden en un conjunto de puntos E ($E \subset G$) que tiene un punto de acumulación z_0, perteneciente a G. Entonces $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todo el recinto G.*

D e m o s t r a c i ó n. Sean

$$A_0 + A_1(z-z_0) + \ldots + A_n(z-z_0)^n + \ldots$$

y

$$B_0 + B_1(z-z_0) + \ldots + B_n(z-z_0)^n + \ldots$$

las series de potencias que representan $f(z)$ y $\varphi(z)$ en un entorno $|z-z_0| < \rho$ del punto z_0. Como las sumas de ambas series coinciden en los puntos del conjunto E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, según lo demostrado en el ap. 5.2, estas series son idénticas, de modo que $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todos los puntos del recinto G pertenecientes al entorno $|z-z_0| < \rho$. Designemos con E_1 el conjunto de todos los puntos pertenecientes a G que poseen la misma propiedad que el punto z_0, es decir, de los puntos para los cuales existen entornos donde $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden.

Por la definición misma, E_1 es un conjunto abierto. Además, a cada punto del recinto que sea un punto de acumulación para E_1 puede aplicársele el mismo razonamiento que se aplicó al punto z_0, de donde se deduce que cada uno de tales puntos tiene que pertenecer

a E_1. Por lo tanto, el conjunto E_1 tiene que coincidir con todo el recinto G (véase la proposición c), ap. 4.5, cap. primero), como se quería demostrar.

De este teorema se deduce que si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en el recinto G y coinciden en un recinto $g \subset G$ (por ejemplo, en un entorno de algún punto $z_0 \in G$) o en un arco de alguna curva continua situada en el recinto G, entonces ellas coinciden en todo el recinto G.

En particular, si una función, analítica en el recinto G, no es idénticamente constante, entonces no puede conservar un valor constante en ninguno de los entornos del punto z_0 y en ningún arco de curva situada en este recinto.

Sea $f'(z_0), f''(z_0), \ldots, f^{(n)}(z_0), \ldots$ la sucesión de valores de las derivadas de la función $f(z)$ en un punto z_0 del recinto G. Entonces, si $f(z) \not\equiv$ const, al menos uno de estos números es diferente de cero. En caso contrario, el desarrollo de Taylor de $f(z)$ en un entorno del punto z_0 tendría la forma

$$f(z) = f(z_0) + 0\cdot(z-z_0) + \ldots + 0\cdot(z-z_0)^n + \ldots = f(z_0),$$

de donde resultaría que $f(z) \equiv f(z_0)$ en el recinto G.

Además del teorema interior de unicidad subsisten en la teoría de las funciones analíticas distintos teoremas frontera de unicidad. Las proposiciones más generales y profundas de este tipo fueron obtenidas por N. Luzin y I. Priválov. Aquí nos limitaremos a enunciar el teorema frontera clásico de unicidad perteneciente a ellos.

Comencemos con las definiciones. Sea G un recinto limitado por una curva de Jordan Γ, y sea ζ_0 un punto de la curva Γ en el cual exista la tangente a ésta. Consideremos una función $f(z)$, definida en el recinto G, y supongamos que ésta tiende a un límite determinado A cuando $z \in G$ tiende a ζ_0 sobre cualesquiera caminos no tangentes a Γ (véase la pág. 265), es decir, manteniéndose en el interior de un ángulo arbitrario de magnitud menor que π con el vértice en el punto ζ_0 y cuya bisectriz coincide con la normal a Γ en el punto ζ_0. Entonces diremos que $f(z)$ posee en el punto $\zeta_0 \in \Gamma$ el valor frontera angular A.

Teorema de N. Luzin y I. Priválov. *Sea G un recinto limitado por una curva rectificable Γ, y sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ dos funciones analíticas en el recinto G. Si para cierto conjunto $E \subset \Gamma$, de medida positiva* (por ejemplo, para un arco de la curva Γ), la diferencia $f(z) - \varphi(z)$ *posee valores frontera angulares y éstos son iguales a cero, entonces las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todo el recinto G.*

La demostración de este teorema, que exige el conocimiento de la teoría de funciones de variable real, encontrará el lector en la

monografía de I. Priválov «Propiedades de frontera de las funciones uniformes analíticas» ya citada en relación con las integrales de tipo Cauchy. En ésta el lector encontrará también un teorema frontera de unicidad muy delicado de los mismos autores, referente a los valores frontera radiales, es decir a los valores que son límites cuando el punto $z \in G$ se aproxima al punto $\zeta_0 \in \Gamma$ a lo largo de la normal a Γ en el punto ζ_0 (a lo largo del radio, si Γ es una circunferencia).

Sea A un número complejo arbitrario. A las raíces de la ecuación $f(z) = A$ las llamaremos A-puntos de la función $f(z)$. Del teorema de unicidad se deduce que, si $f(z) \not\equiv A$, *el conjunto de A-puntos de esta función no puede tener ningún punto de acumulación perteneciente al recinto G*. De aquí se deduce que cualquier conjunto cerrado y acotado F del recinto G sólo puede contener un número finito de A-puntos (para un número fijo A). En efecto, si F contuviese un conjunto infinito de A-puntos, habría un punto de acumulación para ellos, perteneciente a F, y por consiguiente, al recinto G.

Sea z_0 algún A-punto de la función $f(z)$, de modo que $f(z_0) = A$. Desarrollemos $f(z)$ en serie de potencias de $z - z_0$. Obtenemos:

$$f(z) = A + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots$$

o bien

$$f(z) - A = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (6.1:1)$$

Si $f(z) \not\equiv \text{const}$, entre los coeficientes del segundo miembro habrá distintos de cero. Sea $(z - z_0)^k$ la potencia inferior de $z - z_0$ cuyo coeficiente es distinto de cero. Entonces la igualdad (6.1:1) toma la forma

$$f(z) - A = (z - z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \ldots\right], \qquad (6.1:2)$$

donde $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. El número natural k $(k \geqslant 1)$ se llama orden de multiplicidad del A-punto z_0. Si $k = 1$, el A-punto se llama simple; si $k > 1$, se dice que es múltiple. En virtud de la definición, el A-punto simple se caracteriza por las relaciones:

$$f(z_0) = A \quad \text{y} \quad f'(z_0) \neq 0;$$

y el A-punto múltiple de orden k, por las relaciones:

$$f(z_0) = A, \quad f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

De la igualdad (6.1:2) se deduce también que si z_0 es un A-punto de orden k, la función $\varphi(z) = \dfrac{f(z) - A}{(z - z_0)^k}$ es analítica en un entorno

del punto z_0:

$$\varphi(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \ldots$$

y su valor en el punto z_0 es diferente de cero:

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \neq 0.$$

Recíprocamente: si se sabe que para cierto natural k la función $\varphi(z) = \frac{f(z)-A}{(z-z_0)^k}$ es analítica en un entorno del punto z_0, y su valor en el punto z_0 $\left(\text{definido como } \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-A}{(z-z_0)^k}\right)$ es diferente de cero, entonces z_0 es un A-punto de $f(z)$ de orden k.

En efecto, de la relación

$$\frac{f(z)-A}{(z-z_0)^k} = \varphi(z) = a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \ldots \qquad (a_k = \varphi(z_0) \neq 0).$$

se deduce que

$$f(z) = A + a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots$$

en un entorno del punto z_0 y, por consiguiente,

$$A = f(z_0), \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

y, además, (para $k > 1$):

$$f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0.$$

Sea de nuevo F un conjunto cerrado arbitrario de puntos del recinto G; calculemos la cantidad de A-puntos de la función $f(z) \not\equiv A$, pertenecientes a F, contando cada uno de ellos tantas veces cuanto indique su orden de multiplicidad. Como en F hay un número finito de A-puntos y el orden de multiplicidad de cada uno de ellos también es finito, el resultado del cálculo será un número finito.

Todo lo dicho respecto de los A-puntos es aplicable, indudablemente, al caso particular importantísimo en que $A = 0$.

Los 0-puntos de la función analítica $f(z)$ se llaman, abreviadamente, c e r o s de la misma. El lector comprobará fácilmente que las definiciones de órdenes de multiplicidad de los ceros de un polinomio o, en general, de una función racional arbitraria, admitidas en el álgebra y utilizadas aquí en el ap. 4.1 del segundo capítulo, concuerdan con las definiciones generales dadas anteriormente.

Obsérvese que, para todo $A \neq \infty$, los A-puntos de la función $f(z)$ son ceros de la función $f(z) - A$. Por esta razón, cualquier ley general establecida para los ceros de las funciones analíticas, subsiste también para los A-puntos de las funciones analíticas, donde A es un número complejo arbitrario.

Demostremos que *si el conjunto de todos los ceros* (respectivamente, los A-puntos) *de una función uniforme analítica arbitraria no es finito en un recinto dado G, entonces éste es un conjunto numerable*. En otras palabras, todos los ceros de una función uniforme y analítica en un recinto dado pueden numerarse y colocarse en forma de una sucesión:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Como se señaló anteriormente, esta sucesión no tiene puntos de acumulación en el recinto G y, por consiguiente, todos sus puntos de acumulación son puntos frontera para G.

Para demostrar que el conjunto de los ceros de una función analítica es numerable (si este conjunto es infinito), examinemos primero el caso en que G sea todo el plano finito. Entonces en el círculo $|z| < 1$, y también en los anillos:

$$1 \leqslant |z| < 2,\ 2 \leqslant |z| < 3, \ldots, n \leqslant |z| < n+1, \ldots$$

habrá solamente conjuntos finitos de ceros de la función $f(z)$ (posiblemente vacíos en el círculo o en algunos anillos). Numerando primero los ceros pertenecientes al círculo $|z| < 1$, y continuando después la numeración de los ceros pertenecientes, sucesivamente, al primero, segundo, . . ., n-ésimo, etc, anillos indicados, obtendremos, evidentemente, una sucesión $\{z_n\}$, que contiene todos los ceros de la función $f(z)$. Además, según se desee, se puede obtener una sucesión en la que estarán representados solamente los ceros distintos entre sí (sin contar sus órdenes de multiplicidad), o bien una sucesión en la que cada cero se repita tantas veces cual sea su orden de multiplicidad.

Obsérvese que en uno u otro caso se puede efectuar la numeración colocando los ceros en el orden no decreciente de los módulos:

$$|z_n| \leqslant |z_{n+1}|.$$

Supongamos ahora que G tiene al menos un punto frontera finito.

Para un número natural n, designemos mediante F_n el conjunto de todos los puntos del recinto G cuyas distancias hasta la frontera no es menor que $\frac{1}{n}$. Evidentemente, estos conjuntos, comenzando desde cierto $n \geqslant n_0$ ($n_0 \geqslant 1$), no serán vacíos. Cada punto $z \in G$ pertenece a todos los F_n, comenzando desde uno de ellos (es suficiente tomar $\frac{1}{n} < \rho$, donde ρ es la distancia desde z hasta la frontera del recinto G). Finalmente, cada uno de los conjuntos F_n, siendo un conjunto cerrado de puntos del recinto G (cada punto de acumulación del conjunto F_n es también punto de acumulación para G; además, la distancia desde este punto hasta la frontera del recinto G no es

menor que $\frac{1}{n}$, por lo cual éste pertenece a G y a F_n), contiene solamente un número finito de ceros de la función $f(z)$. Numerando primero todos los ceros pertenecientes a F_1, y continuando después la numeración de los ceros pertenecientes, sucesivamente, a $F_2 - F_1$, $F_3 - F_2$, . . ., $F_{n+1} - F_n$, . . ., obtendremos una sucesión $\{z_n\}$, que incluirá a todos los ceros de la función $f(z)$ pertenecientes al recinto G.

Examinando la serie de potencias

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_k(z - z_0)^k + \ldots$$

se obtiene inmediatamente la respuesta a la pregunta: ¿es el punto dado z_0 un cero de la función $f(z)$ o no? Si z_0 es un cero, el mismo examen indica el orden de multiplicidad del mismo. Mas, por esta serie no se puede saber inmediatamente si $f(z)$ posee ceros distintos de z_0, donde están estos ceros y cuáles son sus órdenes de multiplicidad. Es suficiente recordar el ejemplo de la función sen z, representada en todo el plano por la serie de potencias convergente

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

De este desarrollo se ve que sen z posee un cero simple en el origen de coordenadas. Sin embargo, del mismo desarrollo no se ve directamente que sen z posee ceros simples en todos los puntos de la forma $k\pi$ (k es un número entero) y que, además de éstos, no existen otros ceros.

Un medio de representación de las funciones analíticas que permite revelar todos sus ceros pertenecientes al recinto dado, son los productos infinitos.

Supongamos que $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un recinto G, que satisfacen a las condiciones señaladas en la pág. 291, o sea:

a′) el conjunto de E-puntos que son ceros de las funciones $f_1(z)$, . . ., $f_k(z)$, . . . no tiene puntos de acumulación en el interior de G;

b′) cada uno de los puntos de E es un cero solamente para un conjunto finito de funciones $\{f_k(z)\}$.

En estas condiciones, todo conjunto cerrado $F \subset G$ contiene solamente un número finito de puntos de E y existe un número natural $n(F)$ tal que $f_k(z)$ no se anula en los puntos del conjunto F, si $k > n(F)$.

Supongamos ahora que la serie $\sum\limits_{n(F)+1}^{\infty} \ln[f_k(z)]$ converge uniformemente en cada uno de tales conjuntos F. Como ya se sabe, de

aquí se deduce que el producto $\prod\limits_{1}^{\infty} f_k(z)$ es uniformemente convergente en el interior del recinto G y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica $f(z)$. La función $f(z)$ se anula en aquellos puntos, y sólo en aquéllos, en los cuales se anula al menos una de las funciones $f_k(z)$, es decir, en los puntos del conjunto E.

Obsérvese que, si $z_0 \in E$ y la suma de los órdenes de multiplicidad de este punto, considerado como un cero de las funciones respectivas $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, es α_0, entonces z_0 es un cero de orden α_0 de la función $f(z)$. En efecto, si $n_0 \geqslant 1$ designa un número natural tal que ninguna de las funciones $f_k(z)$ se anula en el punto z_0 para $k > n_0$, entonces, representando $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \prod_{1}^{n_0} f_k(z) \prod_{n_0+1}^{\infty} f_k(z),$$

nos convencemos de que $\prod\limits_{1}^{n_0} f_k(z)$ es una función analítica que posee un cero de orden α_0, en el punto z_0, mientras que $\prod\limits_{n_0+1}^{\infty} f_k(z)$ es una función analítica que no se anula en este punto. De aquí se deduce que z_0 es un cero de orden α_0 de la función $f(z)$.

Cuando los ceros de cada función $f_k(z)$ son conocidos, por ejemplo, cuando $f_k(z)$ tiene la forma

$$f_k(z) = (z - z_k)\, g_k(z),$$

donde $g_k(z)$ es una función analítica que carece de ceros, el desarrollo de $f(z)$ en el producto infinito

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} [(z - z_k)\, g_k(z)]$$

da la posibilidad de percibir todos los ceros de la función $f(z)$ pertenecientes al recinto G, y establecer sus órdenes de multiplicidad. Estos órdenes coinciden con las cantidades de números z_k, iguales entre sí, que figuran en distintos factores del producto.

6.2. Demostremos el principio del módulo máximo de una función analítica en su forma definitiva: *el módulo de una función $f(z)$ que es analítica en un recinto G y no es idénticamente constante, no puede alcanzar el máximo en ningún punto del recinto.*

Evidentemente, el principio análogo para el módulo mínimo de una función analítica $f(z)$ no subsiste, puesto que el módulo alcanza el mínimo en cada cero de la función. Del principio del módulo máximo se deduce, sin embargo, que *el módulo de una función analíti-*

ca $f(z) \not\equiv$ const *no puede alcanzar el mínimo en ningún punto del recinto que no sea un cero de la función* $f(z)$.

En efecto, si $f(z_0) \neq 0$, entonces como la función es continua, se verifica también la desigualdad $f(z) \neq 0$ en cierto entorno U del punto z_0, perteneciente al recinto G. Por consiguiente, en este entorno la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica y no idénticamente igual a una constante; por eso el módulo de $\varphi(z)$ no puede alcanzar el máximo en el punto z_0. Volviendo a la función $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$, obtenemos que el módulo de $f(z)$ no tiene mínimo en el punto z_0.

He aquí dos demostraciones distintas del principio del módulo máximo.

1. Demostrando el teorema por el método de reducción a lo absurdo, supongamos que en cierto punto $z_0 \in G$ el módulo de la función alcanza el máximo. Hagamos $|f(z_0)| = M$; entonces, en un entorno U_0 suficientemente pequeño del punto z_0: $|f(z)| \leqslant M$. Podemos suponer que $M \neq 0$, pues en caso contrario sería $f(z) = 0$ en todos los puntos de U_0, de donde se deduciría que $f(z) \equiv 0$, en contra de la hipótesis del teorema.

Demostremos que en todos los puntos de U_0 se verifica la igualdad $|f(z)| = M$. Suponiendo que en un punto $z_1 \in U_0$ $|z_1 - z_0| = \delta > 0$, $|f(z_1)| < M$, para la integral $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta$ se tendría la acotación

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta\right| < M,$$

puesto que en la circunferencia $|z - z_0| = \delta$ tiene que existir un arco que contiene a z_1 y en cuyos puntos $|f(z)| < M$. Pero esta acotación contradice a la igualdad (véase (3.1:6))

$$M = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta\right|.$$

En resumen, de la hipótesis admitida se deduce la existencia de un entorno del punto z_0 en el cual el módulo de la función conserva un valor constante. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, en todos los puntos de U_0 se tiene:

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = M^2,$$

o bien, derivando respecto de x e y:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Como $M \neq 0$, las funciones u y v no se anulan simultáneamente en los puntos de U_0; por esta razón, el determinante de este último sistema es igual a cero:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Aplicando las ecuaciones de D'Alembert-Euler, obtenemos de aquí que $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$ y, por consiguiente, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$; en virtud de las mismas ecuaciones, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Por lo tanto,

$$u(x, y) \equiv C_1, \quad v(x, y) \equiv C_2. \quad \text{y} \quad f(z)=C_1+iC_2 \text{ en } U_0.$$

Según el teorema de unicidad, esta última igualdad se verifica en todo el recinto G, lo cual contradice a la hipótesis del teorema. Así, pues, el principio del módulo máximo queda demostrado.

II. Para la demostración se puede utilizar la representación de la función analítica en serie de potencias *). Supongamos de nuevo que $|f(z)|$ alcanza el máximo en el punto z_0: $|f(z_0)| = M$. Igual que anteriormente, se puede suponer que $M \neq 0$. Desarrollemos $f(z)$ en serie de potencia de $z-z_0$:

$$f(z)=a_0+a_p(z-z_0)^p+a_{p+1}(z-z_0)^{p+1}+\ldots,$$

donde $|a_0|=|f(z)|=M$, $|a_p| \neq 0$ $(p \geqslant 1)$. Debido a la hipótesis, en cualquier entorno U_0 suficientemente pequeño del punto z_0 se verifica la desigualdad $|f(z)| \leqslant M$. Tomemos un punto $z_1 \in U_0$, distinto de z_0 y situado en uno de los rayos:

$$\operatorname{Arg}[a_p(z-z_0)^p]=\operatorname{Arg} a_0,$$

es decir,

$$\operatorname{Arg}(z-z_0)=\frac{1}{p}\operatorname{Arg}\frac{a_0}{a_p}$$

(el número de tales rayos es igual a p). Entonces, los vectores que representan a_0 y $a_p(z-z_0)^p$ son paralelos y llevan una misma dirección, de donde

$$|a_0+a_p(z-z_0)^p|=|a_0|+|a_p(z-z_0)|^p.$$

Supongamos que z está tan próximo a z_0 en el rayo elegido que

$$|a_{p+1}(z-z_0)^{p+1}+a_{p+1}(z-z_0)^{p+2}+\ldots|<\frac{1}{2}|z-z_0|^p.$$

---

*) En la pág. 308 ya se expuso una demostración de éstas.

Entonces, en todos los puntos z de éstos (arbitrariamente próximos a z_0) tendremos:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_0 + a_p(z-z_0)^p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \ldots| \geqslant \\ &\geqslant |a_0 + a_p(z-z_0)^p| - |a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \ldots| = \\ &= |a_0| + |a_p(z-z_0)^p| - |a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \ldots| > \\ &> |a_0| + \frac{1}{2}|a_p(z-z_0)^p| > |a_0| = M. \end{aligned}$$

Pero esto contradice a la hipótesis; por consiguiente, el principio del módulo máximo es justo.

Supongamos que $f(z) \not\equiv \text{const}$ es continua en el dominio $\overline{G}$ y es analítica en el recinto G. Entonces su módulo, siendo una función continua en $\overline{G}$, tiene que alcanzar su extremo superior en cierto punto $\zeta \in \overline{G}$. En virtud del principio del módulo máximo este punto no puede pertenecer al recinto G; por consiguiente, es un punto frontera del mismo. En resumen, *el módulo de una función $f(z) \not\equiv$ const, continua en un dominio y analítica en su interior, alcanza el valor máximo en un punto frontera del dominio.*

Supongamos que para una función $f(z) \not\equiv$ const, continua en el dominio $\overline{G}$ y analítica en el recinto G, su módulo $|f(z)|$ conserva un valor constante en la frontera de este dominio. Demostremos que de aquí se deduce que $f(z)$ posee al menos un cero en el interior de G. Si esto no fuese así, el módulo $|f(z)|$ no sólo no podría tener máximo en los puntos interiores del dominio sino tampoco mínimo. Por eso, siendo una función continua en el dominio $\overline{G}$, el módulo $|f(z)|$ alcanzaría sus valores máximo y mínimo en los puntos frontera del dominio. Pero en estos puntos, según la hipótesis, éste conserva un valor constante. Por consiguiente, sus valores máximo y mínimo en el dominio $\overline{G}$ son iguales, es decir, $|f(z)| \equiv$ const en el dominio $\overline{G}$ y, por lo tanto, la función $|f(z)|$ alcanza el máximo en todos los puntos del dominio $\overline{G}$, lo cual es imposible si $f(z) \not\equiv$ const. Así pues, el recinto G contiene al menos un cero de la función $f(z)$.

Aplicando la proposición que acabamos de demostrar, se demuestra fácilmente el teorema de existencia de ceros de cualquier polinomio de grado no menor que el primero (el denominado **teorema fundamental del álgebra**).

Sea $P(z)$ un polinomio de grado n:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0,\ n \geqslant 1).$$

Si $a_0 = 0$, entonces $P(0) = 0$, es decir, el polinomio tiene un cero en el origen de coordenadas. Si $a_0 \neq 0$, entonces $P(0) \neq 0$.

Consideremos el conjunto E de puntos del plano, para los cuales $|P(z)| < 2|a_0|$. Este conjunto no es vacío (puesto que $z = 0 \in E$)

y está acotado (puesto que para valores de $|z|$ suficientemente grandes, el módulo $|P(z)|$ es arbitrariamente grande y, en particular, es mayor que $2|a_0|$). Además, debido a la continuidad del módulo $|P(z)|$, el conjunto E es abierto (en cada punto $z_0 \subset E$, $|P(z_0)| < 2|a_0|$, y, por consiguiente, existe un entorno del punto z_0 en el cual $|P(z)| < 2|a_0|$; de este modo, este entorno pertenece a E). Finalmente, en los puntos frontera del conjunto E, se tiene: $|P(z)| = 2|a_0|$ (si ζ es un punto frontera de E, entonces en él $|P(\zeta)| \geqslant 2|a_0|$ y, por otra parte, ζ es un punto de acumulación para los puntos de E, en los cuales $|P(z)| < 2|a_0|$, por lo tanto, $|P(\zeta)| \leqslant 2|a_0|$; así, pues, $|P(\zeta)| = 2|a_0|$). Cualquier conjunto abierto representa un recinto o se descompone en recintos separados. Aplicando a cada recinto la proposición demostrada anteriormente, obtenemos que cada uno de ellos tiene que contener al menos un cero del polinomio $P(z)$. Por lo tanto, queda demostrada la existencia de un cero al menos de $P(z)$ en el plano z. A la vez, empleando los razonamientos conocidos (aplicando el teorema de Bézout), se demuestra también la existencia de n ceros del polinomio (entre los cuales puede haber múltiples).

En relación con la demostración expuesta del teorema fundamental del álgebra, examinemos el conjunto E_ρ de todos los puntos del plano z en los cuales se verifica la desigualdad

$$|P(z)| < \rho < \infty,$$

donde ρ es un número positivo fijo arbitrario. Este conjunto no es vacío, puesto que pertenecen a él todos los ceros del polinomio $P(z)$. Repitiendo luego todo lo que se dijo anteriormente respecto del caso particular del conjunto E: $|P(z)| < 2|a_0|$, nos convencemos de que E_ρ es un conjunto acotado y abierto, en cuya frontera se verifica la igualdad $|P(z)| = \rho$.

El conjunto E_ρ puede ser conexo y entonces representa un recinto, o no ser conexo y entonces representa un sistema de recintos. Como cada uno de los recintos tiene que contener al menos un cero del polinomio $P(z)$ (puesto que en la frontera de tal recinto $|P(z)|$ conserva un valor constante), el número total de recintos no puede ser superior a n. Sea g_ρ uno de estos recintos y γ, una curva de Jordan cerrada arbitraria perteneciente a g_ρ. Como en los puntos de la curva γ se verifica la desigualdad $|P(z)| < \rho$, en virtud del principio del módulo máximo, esta misma desigualdad tiene que verificarse también en todos los puntos del interior de γ. De aquí que el interior de γ pertenece a E_ρ y, por consiguiente, junto con γ pertenece a g_ρ. Así, pues, E_ρ consta de uno o de unos cuantos, pero no más de n, recintos simplemente conexos *), que contienen en su interior a todos

*) Véase el ap. 4.4 cap. 1.

los ceros del polinomio $P(z)$. Por esta razón, la frontera de E_ρ consta de uno o de unos cuantos, pero no más de n, continuos que son fronteras de recintos simplemente conexos.

Evidentemente, en cada punto exterior a E_ρ tiene que verificarse la desigualdad $|P(z)| > \rho$. En efecto, suponiendo que en cierto punto z_1, exterior al conjunto E_ρ, se verifica la igualdad $|P(z_1)| = \rho$ (la desigualdad $|P(z_1)| < \rho$ queda excluida, puesto que, según la definición, todos los puntos para los cuales $|P(z)| < \rho$ pertenecen a E_ρ), entonces en virtud de que $P(z_1) \neq 0$, por lo cual el módulo $|P(z)|$ no puede tener mínimo en el punto z_1, tendríamos que en un entorno arbitrariamente pequeño del punto z_1 habría puntos en los cuales $|P(z)| < |P(z_1)| = \rho$, es decir, habría puntos pertenecientes a E_ρ, Pero esto es imposible, puesto que z_1 es un punto exterior a E_ρ. Por lo tanto, en el interior de E_ρ se tiene: $|P(z)| < \rho$, en la frontera de E_ρ: $|P(z)| = \rho$ y en el exterior a E_ρ: $|P(z)| > \rho$.

La frontera del conjunto E_ρ, es decir, el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen a la condición

$$|P(z)| = \rho,$$

se llama **lemniscata**. Designando los ceros del polinomio $P(z)$ mediante $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (los ceros múltiples se escriben aquí tantas veces como sean sus órdenes de multiplicidad), se puede escribir $P(z)$ en la forma

$$P(z) = a_n (z - z_1) \ldots (z - z_n);$$

por consiguiente, la condición que define la lemniscata toma la forma siguiente:

$$|z - z_1| \ldots |z - z_n| = \frac{\rho}{|a_n|} = r^n.$$

Así, pues, la lemniscata puede definirse como el lugar geométrico de puntos del plano para los cuales el producto de las distancias hasta n puntos del plano $z_1, \ldots, z_n$ (algunos de estos puntos pueden coincidir entre sí) es una cantidad constante.

Los puntos $z_1, \ldots, z_n$ que figuran en esta definición (los ceros del polinomio $P(z)$), se llaman **focos de la lemniscata**, y el número r, **radio de la lemniscata**; la curva misma se llama lemniscata con n focos de radio r.

Cuando $n = 1$, resulta el caso particular más sencillo:

$$|z - z_1| = r;$$

evidentemente, ésta es una circunferencia de radio r con el centro en el único foco z_1.

Si $n = 2$ y $z_1 \neq z_2$, resulta una lemniscata con dos focos:

$$|z - z_1| |z - z_2| = r^2.$$

La forma de ésta depende de la razón del radio r a la distancia $|z_1 - z_2|$ entre los focos. En la fig. 58 está representada una lemniscata con dos focos para los siguientes valores de esta razon:

$$\text{a) } \frac{r}{|z_1-z_2|}<\frac{1}{2}, \quad \text{b) } \frac{r}{|z_1-z_2|}=\frac{1}{2}, \quad \text{c) } \frac{1}{2}<\frac{r}{|z_1-z_2|}<\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{r}{|z_1-z_2|}.$$

Obsérvese que la lemniscata con dos focos lleva también la denominación de óvalo de Cassini, y su caso particular para $\frac{r}{|z_1-z_2|}=\frac{1}{2}$, lemniscata de Bernoulli.

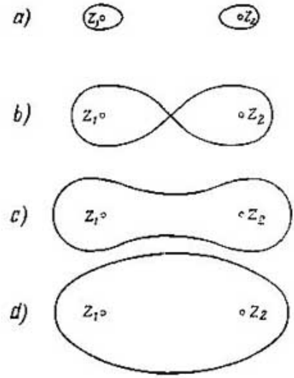

FIG. 58

Para un número mayor de focos se obtienen más variedades de formas distintas de las lemniscatas. Hilbert demostró que para la frontera Γ de un recinto arbitrario G, simplemente conexo, y para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede señalar una lemniscata Λ tal, que en el ε-entorno de cada punto del conjunto Γ siempre existirán puntos de la lemniscata Λ, y además, cada punto de la lemniscata Λ estará situado en el ε-entorno de un punto correspondiente del conjunto Γ. En otras palabras, *las fronteras de cualesquiera recintos simplemente conexos pueden aproximarse con lemniscatas con una precisión arbitraria.*

Observemos la variación de una lemniscata con n focos z_1, z_2, . . ., z_n, en dependencia de la variación de su radio r. Para fijar ideas, supondremos que todos los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son distintos

entre sí y hagamos $P(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$. Si el número positivo δ es tan pequeño que los círculos k_j: $|z - z_j| < \delta$ ($j = 1, 2, \dots, n$) no tienen puntos comunes dos a dos, entonces para $r < \delta$ ningún punto del conjunto E_{r^n}: $|P(z)| < r^n$ puede estar situado fuera de los círculos k_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Como, por otra parte, los centros de los círculos son puntos interiores de E_{r^n}, el conjunto E_{r^n} consta al menos de n recintos situados dentro de los círculos k. Pero la cantidad total de recintos en los que se descompone E_{r^n} no puede ser mayor que n; por lo tanto, tiene que haber exactamente n, uno en cada círculo k_j. Por consiguiente, la lemniscata correspondiente $|P(z)| = r^n$ consta de n continuos que no tienen puntos comunes dos a dos y son las fronteras de recintos simplemente conexos.

Sea ahora K un círculo de diámetro D que contenga en su interior a todos los focos de la lemniscata. Entonces, cada punto del círculo K satisface a la desigualdad $|z - z_j| < D$ ($j = 1, 2, \dots, n$) y, por consiguiente, $|P(z)| < D^n$ en el interior de K. De aquí que el círculo K pertenecerá totalmente a E_{r^n} si $r > D$. Por lo tanto, E_{r^n} constará solamente de un recinto que contendrá a este círculo (ya sabemos que cada recinto E_{r^n} tiene que contener en su interior al menos uno de los puntos z_j). La lemniscata correspondiente representará un continuo, que será la frontera de este recinto.

Así, pues, la lemniscata con n focos ($n > 1$) es desconexa, precisamente consta de n continuos que no tienen puntos comunes dos a dos, para valores del radio suficientemente pequeños ($r < \delta$) y es conexa para todos los valores del radio suficientemente grandes ($r > D$).

Obsérvese, finalmente, que la lemniscata $|P_n(z)| = r^n$ pertenece a cualquier conjunto $E_{r'^n}$, donde $r' > r$, y, por consiguiente, todos los continuos que la forman están comprendidos en el interior de los recintos simplemente conexos que están limitados por las componentes de la lemniscata $|P_n(r)| = r'^n$. En otras palabras, la lemniscata de un radio dado está comprendida estrictamente en el interior de cualquier lemniscata de mayor radio (y con los mismos focos). Por lo tanto, la variación de la forma de la lemniscata en dependencia del crecimiento de r se puede considerar como un abultamiento de sus componentes. Teniendo forma de óvalos pequeños para valores pequeños de r, éstos aumentan lentamente cambiando su forma. Para algunos valores de r algunas componentes conexas: dos, tres o más, se confunden en una, debido a lo cual el número total de componentes disminuye; después se produce un abultamiento consiguiente que va acompañado de vez en cuando de una disminución posterior de la cantidad de componentes, y, finalmente, se obtiene una lemniscata en forma de una curva conexa única. Precisamente

ésta teníamos en cuenta cuando hablábamos antes del resultado de Hilbert.

La diversidad de formas de estas curvas se explica por la cantidad y métodos distintos que hay de distribución de los focos de la lemniscata en el plano. En la fig. 59 se muestra esquemáticamente la

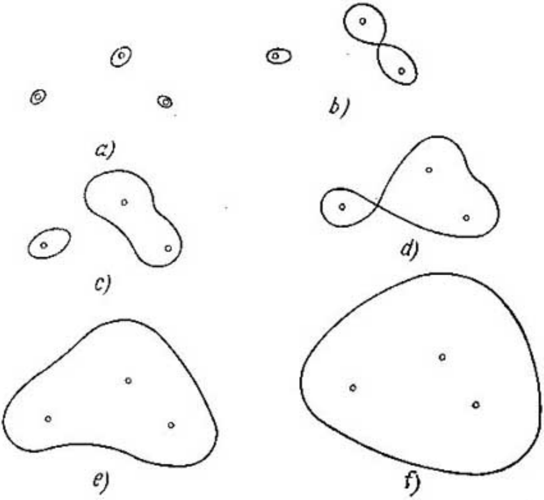

FIG. 59

evolución de la forma de la lemniscata en dependencia del valor del radio para el caso de tres focos (no situados en una recta).

Detengámonos en una aplicación más del principio del módulo máximo, que desempeña un papel importante en los problemas de transformación mediante funciones analíticas.

Lema de Schwarz. *Sea $f(z)$ una función analítica en el círculo K: $|z| < R$; supongamos que se anula en el origen de coordenadas y satisface en este círculo a la desigualdad*

$$|f(z)| \leqslant M \quad (M < \infty). \tag{6.2:1}$$

Entonces en cualquier punto del círculo K se verifica la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|z| \tag{6.2:2}$$

y, además,

$$|f'(0)| \leqslant \frac{M}{R}. \tag{6.2:3}$$

Puede alcanzarse la igualdad en la relación (6.2:2) en algún punto $z(0<|z|<R)$, o la igualdad en la relación (6.2:3), sólo cuando $f(z)$ es una función lineal entera de la forma

$$f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z \tag{6.2:4}$$

(α es un número real).

Para la demostración, consideremos el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor:

$$f(z)=f'(0)z+\frac{f''(0)}{2}z^2+\ldots \tag{6.2:5}$$

De aquí se ve que la función

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}=f'(0)+\frac{f''(0)}{2}z+\ldots \tag{6.2:6}$$

es analítica en el círculo K y su valor en el origen de coordenadas es igual a $f'(0)$. Sea z un punto arbitrario del círculo K y r, un número que satisface a las desigualdades $|z|<r<R$. Como para todos los puntos ζ situados en la circunferencia γ: $|\zeta|=r$, se verifica la desigualdad

$$|\varphi(\zeta)|=\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|}\leqslant\frac{M}{r},$$

en virtud del principio del módulo máximo, esta misma desigualdad tiene que verificarse en el punto z, situado en el interior de la circunferencia γ:

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{r}.$$

Pasando al límite cuando r tiende a R, obtenemos:

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{R}. \tag{6.2:7}$$

Si $z\neq 0$, se puede sustituir $\varphi(z)$ por $\frac{f(z)}{z}$ y esta desigualdad toma la forma

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|.$$

Hemos obtenido la desigualdad (6.2:2) (que también se cumple, evidentemente, para $z=0$). Si $z=0$, se tiene $\varphi(0)=f'(0)$, y la desigualdad (6.2:7) toma la forma

$$|f'(0)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

Esta es la desigualdad (6.2:3).

Si la primera de las desigualdades obtenidas se convierte en igualdad en cierto punto $z \in K$, distinto del origen de coordenadas, o si la segunda desigualdad se convierte en igualdad, esto significa que en la relación (6.2:7) se alcanza el signo de igualdad en uno de los puntos del círculo K. De aquí que en este punto el módulo $|\varphi(z)|$ alcanza el máximo, de donde, en virtud del principio del módulo máximo,

$$\varphi(z) \equiv \text{const}.$$

Como el módulo de esta constante es igual a $\frac{M}{R}$, se tiene

$$\varphi(z) \equiv \frac{M}{R} e^{i\alpha},$$

o bien

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z.$$

Con esto se termina la demostración del lema de Schwarz.

El lema de Schwarz tiene un significado geométrico sencillo. De él se deduce que si $w = f(z)$ es una función analítica en el círculo K: $|z| < R$, y la imagen $f(K)$ de este círculo está contenida en el círculo $|w| < M$, siendo el punto $w = 0$ la imagen del punto $z = 0$, entonces la imagen $f(k)$ de cada círculo cerrado k: $|z| \leqslant r$ cuyo radio sea $\lambda = \frac{r}{R}$ veces menor que el radio del círculo K, estará contenida en el círculo cerrado $|w| \leqslant \frac{r}{R} M$, cuyo radio es λ veces menor que M. Además, la imagen de algún punto z_0 situado en la circunferencia $|z| = r$ puede caer en la circunferencia $|w| = \frac{r}{R} M$ solamente cuando la transformación sea de la forma (6.2:4), es decir, conste de una rotación alrededor del origen de coordenadas y una dilatación respecto del mismo en λ veces.

6.3. Consideremos una función $\varphi(z)$ analítica en un círculo K: $|z - z_0| < R$ $(R < \infty)$. A tal función llamaremos *elemento* (se sobrentiende elemento de la función analítica). Los puntos que están situados en la circurferencia Γ: $|z - z_0| = R$, los dividiremos en dos clases (*a priori*, cada una de las clases puede ser vacía):

1) a los puntos $\zeta \in \Gamma$ que poseen un entorno $U_\zeta : |z - \zeta| < \rho$, en el cual existe una función analítica $\psi_\zeta(z)$ que coincide con $\varphi(z)$ en la parte común de los círculos K y U_ζ, llamaremos puntos *regulares* del elemento dado;

2) a los puntos de Γ que no poseen tal entorno llamaremos puntos *singulares* del elemento.

Por lo tanto, la definición de punto singular es de carácter negativo. Estos son los puntos frontera del círculo K que no poseen ningún entorno en el cual se podría hallar una función analítica que

coincidiese con $\varphi(z)$ en los puntos que son comunes a este entorno y al círculo K.

De la definición de punto regular se deduce que si $\zeta_0 \in \Gamma$ es un punto regular, entonces todos los puntos del arco de circunferencia Γ que está situado en el interior del entorno correspondiente U_{ζ_0} también son regulares. En efecto, para tal punto ζ se puede tomar por U_ζ cualquier círculo con el centro en ζ, contenido en U_{ζ_0}, y por función $\psi_\zeta(z)$, la misma función $\psi_{\zeta_0}(z)$, que, siendo analítica en U_{ζ_0} coincidía con $\varphi(z)$ en todos los puntos que son comunes a U_{ζ_0} y K. De aquí, en particular, se deduce que, si existe un punto regular, entonces existe también un conjunto infinito de ellos. En contraposición a esto, el punto singular puede ser único.

Obsérvese que cada punto $z' \in K$ posee la propiedad característica de un punto regular, pues para él existen un entorno $U_{z'}$ (se puede tomar cualquier entorno del punto z' que esté contenido en K) y una función analítica en $U_{z'}$ (la función misma $\varphi(z)$), que coincide con $\varphi(z)$ en todos los puntos comunes a $U_{z'}$ y K (es decir, en $U_{z'}$). Por esta razón, a todos los puntos del círculo K los llamaremos también puntos regulares del elemento $\varphi(z)$.

Aclaremos los conceptos introducidos en un ejemplo sencillo. Sea K el círculo unidad y $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$. Para todo punto ζ situado en la frontera del círculo K, es decir, en la circunferencia unidad, y distinto de la unidad, existe un entorno U_ζ: $|z-\zeta| < |1-\zeta|$ y en el mismo una función analítica $\psi_\zeta(z) = \frac{1}{1-z}$ que coincide con $\varphi(z)$ en los puntos que son comunes a K y a U_ζ. Por lo tanto, cada punto de éstos ζ es un punto regular del elemento $\varphi(z)$.

Verifiquemos que el punto 1 es un punto singular del elemento. En efecto, en caso contrario existiría en un entorno U de este punto una función analítica $\psi(z)$ que coincidiría con $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ en los puntos del recinto d que es la parte común de U y K. Pero entonces tendría que existir y ser finito el límite:

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in d}} \psi(z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in d}} \frac{1}{1-z} = \psi(1),$$

lo cual, evidentemente, es imposible. Así, pues, el punto 1 es un punto singular del elemento dado.

Demostremos la siguiente proposición.

Si cada punto de la circunferencia Γ es regular para el elemento $\varphi(z)$, entonces existe un elemento $\psi(z)$ que representa una función analítica en cierto círculo K_1: $|z-z_0| < R_1$, cuyo radio R_1 es mayor que el radio R de la circunferencia Γ, y que coincide con $\varphi(z)$ en todos los puntos del interior de Γ (es decir, en todos los puntos del círculo K).

Para la demostración, reunamos en un conjunto D todos los puntos del círculo K y de los círculos U_ζ que figuran en la definición de puntos regulares ζ (para todos $\zeta \in \Gamma$) (fig. 60).

Evidentemente, D es un conjunto abierto. En efecto, todo punto $z' \in D$ tiene que pertenecer a uno de los círculos K o U_ζ, y, por consiguiente, tiene que poseer un entorno perteneciente a este mismo círculo (es decir, a K o a U_ζ, respectivamente), y por lo tanto, perteneciente también al conjunto D. Demostremos ahora que D es un

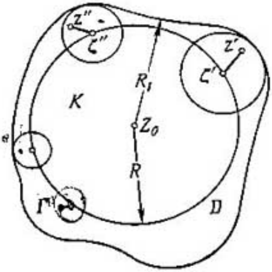

FIG. 60

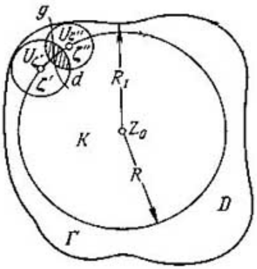

FIG. 61

conjunto conexo. Es suficiente demostrar que para dos puntos cualesquiera z' y z'' contenidos en D existe una curva continua que los une, perteneciente también a D.

Si z' y z'' pertenecen a un mismo círculo (K o U_ζ), se puede tomar por γ el segmento rectilíneo que los une; éste pertenece al mismo círculo y, por lo tanto, pertenece también al conjunto D. Si un punto pertenece a K, por ejemplo z', y el otro, z'' pertenece a U_ζ entonces se puede tomar por γ la poligonal compuesta de dos lados: del segmento rectilíneo que une z' con ζ, y del segmento rectilíneo que une ζ con z''. Como el segmento $z_0\zeta$ pertenece a K (a excepción de su extremo ζ, situado en Γ), y el segmento $z''\zeta$ pertenece por completo a U_ζ (incluyendo su punto inicial ζ, que es el centro del círculo U_ζ), en este caso γ también estará contenido en D. Supongamos, finalmente, que z' y z'' pertenecen a dos entornos distintos $U_{\zeta'}$ y $U_{\zeta''}$. Entonces se puede tomar por γ la curva que consta del segmento rectilíneo $z'\zeta'$, del arco de la circunferencia $\zeta'\zeta''$ y del segmento rectilíneo $\zeta''z''$. Esta curva está contenida en D, puesto que el segmento $z'\zeta'$ está contenido en U_ζ, el segmento $\zeta''z''$ está contenido en $U_{\zeta''}$ y cada punto ζ del arco $\zeta'\zeta''$ de la circunferencia Γ pertenece al círculo correspondiente U_ζ cuyo centro es ζ.

Queda demostrado que D es un conjunto abierto y conexo, es decir, es un recinto. Definamos ahora en el recinto D la función

$\psi(z)$, haciendo $\psi(z) = \varphi(z)$ si $z \in K$, y $\psi(z) = \psi_\zeta(z)$ si $z \in U_\zeta$. Demostremos que esta función es uniforme y analítica en todo el recinto D. La demostración de la uniformidad es necesaria, puesto que un mismo punto z puede pertenecer al círculo K y a un círculo U_ζ o a dos círculos distintos $U_{\zeta'}$ y $U_{\zeta''}$ y entonces en el primer caso se debe tomar por $\psi(z)$ los valores de $\varphi(z)$ y $\psi_\zeta(z)$, y en el segundo caso, los valores de $\psi_{\zeta'}(z)$ y $\psi_{\zeta''}(z)$. Tenemos que convencernos que en uno y otro caso ambos resultados coinciden entre sí, es decir dan un valor único de $\psi(z)$.

En efecto, supongamos que $z \in K$ y $z \in U_\zeta$; esto significa que z pertenece a la parte común de los círculos K y U_ζ. Pero, según la definición de punto regular, $\varphi(z)$ y $\psi_\zeta(z)$ tienen que coincidir en esta parte común. Así, pues, $\varphi(z) = \psi_\zeta(z) = \psi(z)$. Supongamos ahora que $z \in U_{\zeta'}$ y $z \in U_{\zeta''}$. Esto significa que los círculos $U_{\zeta'}$ y $U_{\zeta''}$ de centros distintos ζ' y ζ'' tienen una parte común: la lúnula circular g (fig. 61), a la cual pertenece también el punto z. En la parte que es común para el círculo K y la lúnula g, que designaremos mediante d, los valores de $\psi_{\zeta'}(z)$ y $\psi_{\zeta''}(z)$ coinciden, puesto que d pertenece a la intersección de $U_{\zeta'}$ y K, en los puntos de la cual $\psi_{\zeta'}(z) = \varphi(z)$, y también a la intersección de $U_{\zeta''}$ y K, en los puntos de la cual $\psi_{\zeta''}(z) = \varphi(z)$. En virtud del teorema interior de unicidad, dos funciones analíticas en el recinto g, $\psi_{\zeta'}(z)$ y $\psi_{\zeta''}(z)$, que coinciden en una de sus partes d (que también es un recinto), tienen que coincidir también en todo el recinto g: $\psi_{\zeta'}(z) = \psi_{\zeta''}(z)$, y de nuevo obtenemos un valor único para $\psi(z)$. Por lo tanto, la función $\psi(z)$ que hemos definido es uniforme en el recinto D. Su analiticidad en este recinto se deduce de que cada punto $z \in D$ pertenece a uno de los círculos K o U_ζ, en los cuales $\psi(z)$, según su definición, coincide con la función analítica $\varphi(z)$ o $\psi_\zeta(z)$.

Obsérvese ahora que todos los puntos frontera del recinto D están situados en el exterior a la circunferencia Γ (puesto que los puntos del interior de Γ, es decir, los puntos del círculo K, y todos los puntos de la circunferencia Γ están contenidos en D y, por consiguiente, no son puntos frontera para D). De aquí que la distancia R_1 desde el punto z_0 hasta la frontera del recinto D, que tiene que coincidir con la distancia desde z_0 hasta cierto punto frontera del recinto D, es mayor que el radio de la circunferencia Γ, es decir, $R_1 > R$. Evidentemente, el círculo K_1: $|z - z_0| < R_1$ y la función $\psi(z)$ satisfacen a todas las condiciones del lema. A saber, la función $\psi(z)$ es analítica en el círculo K_1 de radio mayor que R, y coincide con $\varphi(z)$ en el círculo K.

La proposición está demostrada.

Consideremos una serie de potencias arbitraria

$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (6.3:1)$$

cuyo radio de convergencia satisfaga a la condición $0 < R < \infty$. Debido a la definición, la suma de esta serie $\varphi(z)$ es un elemento en el círculo K: $|z - z_0| < R$.

Demostremos el teorema siguiente:

T e o r e m a. *En la frontera* Γ: $|z - z_0| = R$ *del círculo de convergencia de una serie de potencias está situado al menos un punto singular del elemento* $\varphi(z)$ *(es decir, de la suma de la serie de potencias).*

La demostración se hará por reducción a lo absurdo. Si el teorema no es cierto, entonces cada punto de la circunferencia Γ tiene que ser regular para el elemento $\varphi(z)$. Según lo demostrado anteriormente, tiene que existir una función $\psi(z)$, analítica en cierto círculo K_1: $|z - z_0| < R_1$, donde $R_1 > R$, que coincide con $\varphi(z)$ en el círculo K. De la igualdad $\varphi(z) = \psi(z)$, que se cumple en los puntos del círculo K, se deduce que el desarrollo de Taylor de la función $\psi(z)$ tiene que coincidir con la serie (6.3:1). Pero, según el teorema de Cauchy, el desarrollo de $\psi(z)$ tiene que converger en todo el círculo K_1 de radio $R_1 > R$, mientras que, según la hipótesis, el radio de convergencia de la serie (6.3:1) es igual a R. De la contradicción obtenida se deduce que el teorema enunciado es justo.

C o n s e c u e n c i a. *Para que el radio de convergencia* R *del desarrollo de Taylor de una función* $f(z)$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (6.3:2)$$

que es analítica en cierto círculo $|z - z_0| < \rho$, *coincida con el radio* ρ *de este círculo, es necesario y suficiente que en la circunferencia* γ: $|z - z_0| = \rho$ *esté situado al menos un punto singular del elemento* $f(z)$.

En efecto, si $R = \rho$, entonces, según el teorema anterior, obtenemos que en la circunferencia γ está situado al menos un punto singular del elemento $f(z)$. Por eso, la condición enunciada es necesaria para la igualdad de R y ρ. Pero ésta es también suficiente para esta igualdad. En efecto, según el teorema de Cauchy, $R \geqslant \rho$. Suponiendo que en la circunferencia γ esté situado al menos un punto singular del elemento $f(z)$ y $R \neq \rho$, tiene que ser $R > \rho$. En este caso, la suma de la serie (6.3:2) representa una función analítica en el círculo $|z - z_0| < R$ que, por consiguiente, es analítica en cierto entorno de cada punto de la circunferencia γ y que coincide con $f(z)$ en el interior de γ. De aquí se deduce que cada punto de la circunferencia γ es regular para $f(z)$. De la contradicción obtenida se deduce que la afirmación es justa.

Como ejemplo, veamos la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Su radio de convergencia es igual a la unidad y su suma es igual a $\frac{1}{1-z}$. Como ya se vio, en la frontera del círculo de convergencia $|z| = 1$ verdaderamente existe un punto singular que es, además, único: $z = 1$.

Se pueden señalar sin dificultad ejemplos de series de potencias para las cuales cada punto de la frontera del círculo de convergencia es singular. He aquí uno de los ejemplos más sencillos de este género.

Examinemos la serie:

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \ldots$$

Evidentemente, su radio de convergencia es igual a la unidad. Demostremos que para $z \to 1$ (por el interior del círculo unidad, a lo largo del radio, es decir, a lo largo del eje real), $f(z)$ tiende a ∞. En efecto, para cualquier natural n, la suma parcial de la serie $1 + x^2 + \ldots + x^{2^n}$ para $x \to 1$ tiende a $n + 1$ y, por consiguiente, satisface a la desigualdad

$$1 + x^2 + \ldots + x^{2^n} > n \quad \text{para} \quad 1 - x < \delta(n),$$
$$\text{es decir, para } x > 1 - \delta(n).$$

Pero, para estos mismos valores de x, se tiene:

$$f(x) = \sum_0^{\infty} x^{2^k} > \sum_0^{\infty} x^{2^k} > n,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$$

Basándose en este resultado nos convencemos fácilmente, igual que en el caso anterior de la progresión geométrica, que el punto 1 es singular para $f(z)$.

Obsérvese ahora la identidad:

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + [1 + (z^{2^n})^2 + (z^{2^n})^4 + \ldots].$$

Como la serie entre corchetes se diferencia de la inicial solamente en que aquí z se ha sustituido por z^{2^n}, sacamos la conclusión de que

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

para cualquier natural n.

Consideremos todas las raíces de la unidad de orden 2^n: $\sqrt[2^n]{1}$. Estas representan puntos situados en la circunferencia unidad en los vértices de un polígono regular de 2^n lados. Si ζ es uno de éstos y el punto z del círculo unidad está situado en el radio $O\zeta$, entonces z^{2^n},

evidentemente, es un número positivo y para $z \to \zeta$, se tiene que $z^{2^n} \to 1$. De aquí que $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta \\ z\in O_\zeta}} f(z^{2^n}) = \infty$ y, por consiguiente,

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in O_\zeta}} f(z) = \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in O_\zeta}} [z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n})] = \infty.$$

Así, pues, cada una de las raíces $\sqrt[2^n]{1}$ también es un punto singular de $f(z)$ (para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$). Vemos que el conjunto de puntos singulares del elemento $f(z)$ es denso en toda la circunferencia unidad (es decir, está situado de tal modo que cualquier arco de la circunferencia, arbitrariamente pequeño, contiene puntos de este conjunto).

Pero de aquí se deduce que todos los puntos de la circunferencia unidad sin excepción son puntos singulares de $f(z)$, puesto que para un punto regular, si tal hubiese en la circunferencia unidad, existiría también un arco entero cuyos puntos todos tendrían que ser también regulares, lo cual en el caso dado es imposible.

Indiquemos un método general que permite averiguar, para cualquier punto ζ situado en la frontera Γ del círculo de convergencia de la serie de potencias (6.3:1), si éste es un punto regular o singular para la suma $\varphi(z)$ de la serie. Sea z_1 un punto del radio $z_0\zeta$, distinto de z_0 y ζ. Desarrollemos la suma $\varphi(z)$ de la serie en serie de potencias de $z - z_1$. Obtendremos:

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z - z_1) + \ldots + b_n(z - z_1)^n + \ldots, \qquad (6.3:3)$$

donde

$$b_n = \frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!} = a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1}(z_1 - z_0) + \\ + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2} a_{n+2}(z_1 - z_0)^2 + \ldots \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Según el teorema de Cauchy, la serie de potencias obtenida es convergente en el círculo $|z - z_1| < \Delta$, donde Δ es la distancia desde z_1 hasta Γ, es decir, $\Delta = R - |z_1 - z_0|$. Por lo tanto, la serie (6.3:3) es convergente en el interior de una circunferencia γ con el centro en el punto z_1, que es tangente a la circunferencia Γ en el punto ζ. Calculemos el radio de convergencia de la serie (6.3:3). Según la fórmula de Cauchy-Hadamard, se tiene:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}}.$$

Si r coincide con Δ, en la circunferencia γ: $|z - z_0| = \Delta$ tiene que haber al menos un punto singular de la suma de la serie (6.3:3).

Pero ningún punto $\zeta' \in \gamma$, situado en el interior de K, puede ser singular para esta serie, puesto que en un entorno del punto ζ', perteneciente por completo a K, $\varphi(z)$ es una función analítica que en el interior de γ coincide con la suma de la serie (6.3:3). Por consiguiente, el punto ζ es singular. Evidentemente, ésto tiene que ser también singular para $\varphi(z)$, que es la suma de la serie (6.3:1). Suponiendo lo contrario tendríamos una función $\psi(z)$, analítica en cierto

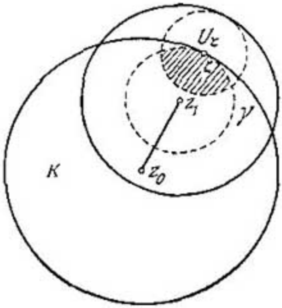

FIG. 62

entorno U_ζ del punto ζ, la cual coincidiría con $\varphi(z)$ en los puntos del entorno U_ζ situados en el interior de K. Pero entonces esta misma función coincidiría con la suma de la serie (6.3:3) en los puntos del entorno U_ζ situados en el interior de γ, es decir, ζ no sería un punto singular para la serie (6.3:3).

Así, pues, si

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}},$$

el punto ζ es singular para $\varphi(z)$. Demostremos que si $\Delta \neq r$, es decir, si $\Delta < r$, el punto ζ es regular para $\varphi(z)$.

En efecto, en este caso la suma de la serie (6.3:3) representa una función $\psi(z)$, que es analítica en el entorno U_ζ del punto ζ y coincide con $\varphi(z)$ en la parte del círculo U_ζ que está situada en el interior de γ (fig. 62). Pero $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ son funciones uniformes analíticas en la lúnula que representa la parte común de los círculos U_ζ y K. Como éstas coinciden en la parte de la lúnula que está rayada en el dibujo, según el teorema de unicidad, $\psi(z)$ coincide también con $\varphi(z)$ en toda la lúnula. En resumen, en este caso el punto ζ es regular para $\varphi(z)$.

Por lo tanto, queda demostrado que *el punto ζ será singular o regular para $\varphi(z)$ según que se cumpla la igualdad*

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}},$$

o la desigualdad

$$\Delta < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}.$$

Como ilustración del criterio obtenido demostremos el siguiente teorema de Pringsheim:

Si los coeficientes de la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$, con el círculo unidad de convergencia, son números reales no negativos $a_n \geqslant 0$, el punto $z = 1$ es singular para la suma de la serie.

Para demostrarlo, tomemos algún punto $z_1 = x$ en el intervalo $(0, 1)$.

Suponiendo que el punto $z = 1$ no es singular para la suma de la serie, según lo que acabamos de demostrar, tiene que verificarse la desigualdad

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = 1 - x < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}}}. \qquad (6.3:4)$$

Consideremos ahora un punto arbitrario ζ de la circunferencia unidad; sea z_1 un punto del radio $O\zeta$, situado en la circunferencia $|z| = x$, es decir, $|z_1| = x$. Entonces para z_1 la distancia Δ hasta la circunferencia unidad será también igual a $1 - x$. Por otra parte,

$$\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!} = \left| a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} z_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} a_{n+2} z_1^2 + \ldots \right| \leqslant$$
$$\leqslant a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} x + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} a_{n+2} x^2 + \ldots = \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} \geqslant \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}}}. \qquad (6.3:5)$$

Debido a esto, para el punto z_1, según las desigualdades (6.3:4) y (6.3:5), se tiene:

$$\Delta < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!}}},$$

de donde se deduce que para la suma de la serie de potencias $\sum_0^\infty a_n z^n$ cualquier punto de la circunferencia unidad es regular. Pero, como ya se sabe, esto contradice a la hipótesis del teorema que estamos demostrando (que la circunferencia unidad es la frontera del círculo de convergencia).

Así, pues, el punto $z = 1$ tiene que ser un punto singular para la suma de la serie $\sum_0^\infty a_n z^n$ si $a_n \geqslant 0$ y $R = 1$.

De la demostración del teorema se ve que, si en lugar del punto $z = 1$ se considera cualquier otro punto ζ de la circunferencia unidad, entonces, para que ζ sea un punto singular es suficiente que los números $a_n \zeta^n$ sean reales no negativos. Mejor dicho, es suficiente que estos números sean reales y no negativos solamente desde cierto $n \geqslant n_0$ en adelante, puesto que representando $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = \sum_0^{n_0-1} a_k z^k + \sum_{n_0}^\infty a_k z^k,$$

nos convencemos inmediatamente de que el punto ζ será singular para $\varphi(z)$ cuando, y sólo cuando, éste sea un punto singular para la suma de la serie $\sum_{n_0}^\infty a_k z^k$.

Consideremos, por ejemplo, la serie $\sum_0^\infty \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$. Aquí los coeficientes a_n son iguales a cero si $n \neq 2^k$, y son iguales a $\frac{1}{2^{k^2}}$ si $n = 2^k$. Por consiguiente,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\frac{1}{2^{k^2}}} = 1,$$

de donde, según la fórmula de Cauchy-Hadamard, se deduce que el radio de convergencia de la serie es igual a la unidad.

Por lo tanto, según el teorema demostrado, el punto $z = 1$ es un punto singular para la suma $\varphi(z)$ de la serie. Pero, del mismo teorema (en virtud de la observación hecha anteriormente) se deduce que cada punto $\zeta = \sqrt[2^n]{1}$, donde n es un número natural arbitrario, también es un punto singular para $\varphi(z)$. En efecto, para $k \geqslant n$, se tiene:

$$\frac{\zeta^{2^k}}{2^{k^2}} = \frac{(\zeta^{2^n})^{2^{k-n}}}{2^{k^2}} = \frac{1}{2^{k^2}} > 0.$$

Así, pues, el conjunto de los puntos singulares de la función $\varphi(z)$ es denso en toda la circunferencia unidad. De aquí que en esta circunferencia no hay ningún punto regular del elemento $\varphi(z)$, es decir, todos los puntos ζ, $|\zeta| = 1$, son singulares.

Lo más admirable es que esta circunstancia no es un obstáculo para que la serie de potencias dada sea absoluta y uniformemente convergente en el círculo unidad cerrado y su suma $\varphi(z)$ sea una función infinitamente diferenciable en el conjunto $|z| \leqslant 1$ (en particular, en todos los puntos singulares). En efecto, para $|z| \leqslant 1$, se tiene:

$$\left|\frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{k^2}},$$

y como la serie $\sum\limits_0^\infty \frac{1}{2^{k^2}}$ es convergente, la serie $\sum\limits_0^\infty \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ será absoluta y uniformemente convergente en el círculo cerrado, por lo cual su suma $\varphi(z)$ será una función continua en el círculo cerrado. Derivando ahora la serie dada término a término cualquier número m de veces, resulta la serie:

$$\sum_0^\infty \frac{2^k(2^k-1)\ldots(2^k-m+1)}{2^{k^2}} z^{2^k-m},$$

los módulos de cuyos términos para $|z| \leqslant 1$ satisfacen a las desigualdades

$$\left|\frac{2^k(2^k-1)\ldots(2^k-m+1)}{2^{k^2}} z^{2^k-m}\right| \leqslant \frac{2^{km}}{2^{k^2}} = \frac{1}{2^{k(k-m)}} < \frac{1}{2^k}$$

para $k > m$. Por consiguiente, las series que se obtienen derivando término a término la serie de potencias $\sum\limits_0^\infty \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ converge uniformemente en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. De aquí, según el teorema conocido para las funciones de variable real, que sin alteración alguna se extiende para las funciones de variable compleja (definidas, por ejemplo, en algún recinto convexo) se deduce que estas series representan las derivadas de $\varphi^{(m)}(z)$. En resumen, $\varphi(z)$ es una función continua e infinitamente diferenciable en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$ y analítica en el interior del círculo, para la cual cada punto del círculo unidad es un punto singular.

Este ejemplo instructivo muestra que en algunos casos la existencia de puntos singulares de una función analítica en la frontera del recinto considerado (del círculo) puede no reflejarse a primera vista en el comportamiento de la función en la proximidad del punto

singular, o más exactamente, este último puede quedar desapercibido a pesar de que la función o sus derivadas dejen de ser continuas en el punto frontera ζ dado. Es necesario considerar todas las derivadas de $\varphi(z)$ en un punto z_1 del recinto dado para que de la comparación de la magnitud $\left[\overline{\lim}\ \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}\right]^{-1}$ con la distancia Δ desde el punto z_1 hasta el punto ζ se pueda decir si el punto ζ es singular o regular.

Las proposiciones establecidas en la pág. 336 permiten hallar frecuentemente el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de una función analítica $f(z)$, sin tener que calcular los coeficientes de la serie, es decir, los números $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$. En este caso, todo se reduce a buscar los puntos singulares de los elementos. Hay que tener presente aquí que para la función dada $f(z)$, analítica en cierto recinto G, existe un conjunto infinito de elementos distintos y, correspondientemente, un conjunto infinito de círculos con diferentes centros, pertenecientes al recinto. Por lo tanto, suele haber puntos singulares de elementos distintos de una misma función analítica, pudiendo ocurrir que un punto que es singular para unos elementos sea regular para otros. Estos casos los aclararemos ahora en ejemplos sencillos. Obsérvese primero que, cuando la función analítica $f(z)$ viene dada por una fórmula que consta de un número finito de funciones elementales, los puntos singulares posibles de sus elementos se hallan fácilmente entre los puntos de discontinuidad de esta función, por ejemplo, entre los puntos en los que ésta se hace infinita y también entre los puntos de ramificación de la función $f(z)$.

E j e m p l o 1. Sea $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$. Esta función es uniforme y analítica en todo el plano, a excepción de los puntos $z=\pm i$, en los cuales se hace igual a ∞. Sea z_0 un punto arbitrario, distinto de $\pm i$; con el centro en el mismo, describamos una circunferencia γ: $|z-z_0|=\rho$, que pase por el punto $+i$ o $-i$ más próximo a z_0. Para precisar, supongamos que el punto más próximo es i. En el interior de γ la función $f(z)$ es analítica y, por consiguiente, representa un elemento. Cerciorémonos de que el punto i es un punto singular del elemento. En efecto, suponiendo lo contrario, tendremos que tener un entorno U del punto i y en el mismo, una función analítica $\psi(z)$, que coincide con $f(z)$ en la parte del entorno U que está situada en el interior de γ (esta parte la designaremos con d). Entonces en el punto i tiene que existir un límite finito

$$\psi(i)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\in d}}\psi(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\in d}}f(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\in d}}\frac{1}{1+z^2},$$

lo cual, evidentemente, es imposible.

Así, pues, en γ está situado un punto singular del elemento $f(z)$ y, por consiguiente, el radio de convergencia R del desarrollo de Taylor de $f(z)$, en serie de potencias de $z - z_0$, coincide con el radio ρ de la circunferencia γ, es decir, con la distancia desde z_0 hasta el punto $\pm i$ más próximo al mismo.

En este caso, el desarrollo de Taylor es más fácil obtenerlo descomponiendo $\frac{1}{1+z^2}$ en fracciones simples y aplicando después la serie geométrica. Resulta:

$$\frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-z} + \frac{1}{i+z}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{i-z_0}} + \frac{1}{i+z_0}\,\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}}\right).$$

Como $\left|\frac{z-z_0}{i-z_0}\right| < 1$ y $\left|\frac{z-z_0}{i+z_0}\right| < 1$ (el punto z está situado en el interior de γ, y los puntos $\pm i$ están situados ambos en γ o uno de ellos está situado en γ y el otro en el exterior de γ), cada una de las fracciones $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{i-z_0}}$, $\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}}$ puede representarse por una serie geométrica de razón $\frac{z-z_0}{i-z_0}$ o $\frac{z-z_0}{i+z_0}$. Resulta:

$$\frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-z_0}\sum_0^\infty \left(\frac{z-z_0}{i-z_0}\right)^n + \frac{1}{i+z_0}\sum_0^\infty (-1)^n\left(\frac{z-z_0}{i+z_0}\right)^n\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\sum_0^\infty (-1)^{n+1}\left[(z_0+i)^{-n-1} - (z_0-i)^{-n-1}\right](z-z_0)^n.$$

Este es el desarrollo cuyo radio de convergencia R se determinó anteriormente. En particular, para $z_0 = 1$, obtenemos: $R = \rho = \sqrt{2}$, y el desarrollo toma la forma:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_0^\infty (-1)^n 2^{-\frac{n+1}{2}} \operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{4}(z-1)^n =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{4}(z-1)^2 - \frac{1}{8}(z-1)^4 + \dots$$

Ejemplo 2. Sea $F(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln} z}$. Consideremos un recinto G cuya frontera es la parte no negativa del eje real Λ: $x \geqslant 0$, $y = 0$. En éste, la función multiforme $F(z)$ se descompone en ramas unifor-

mes analíticas, de las cuales consideraremos una:

$$f(z)=\frac{1}{\mathrm{Ln}_1 z}=\frac{1}{\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}_1 z},$$

donde $\mathrm{Arg}_1 z$ satisface a las desigualdades:

$$0<\mathrm{Arg}_1 z<2\pi.$$

De la fórmula que define $F(z)$ (o $f(z)$) se deduce que los puntos singulares de los elementos de la función $F(z)$ pueden coincidir con $z=0$ (punto de ramificación de $\mathrm{Ln}\, z$ y $F(z)$) o con el punto $z=1$,

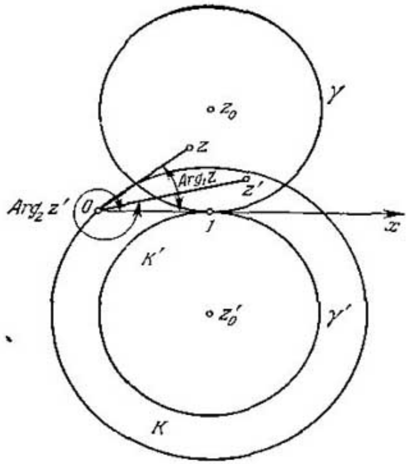

FIG. 63

en el cual se anula uno de los valores del logaritmo. Para precisar, hagamos $z_0=1+i$. Entonces el punto más próximo a z_0 entre los dos puntos 0 y 1 será, evidentemente, el punto 1. Describiendo con el centro en z_0 una circunferencia γ de radio ρ, igual a 1 (fig. 63), hallaremos que $f(z)$ determina en el interior de γ un elemento $\varphi(z)$. Como al tender el punto z (situado en el interior de γ) al punto 1, situado en γ, $\ln|z|$ tiende a 0 y $\mathrm{Arg}_1 z$ también tiende a 0, los valores del elemento $\varphi(z)$ tienden a ∞, de donde, razonando del mismo modo que en el ejemplo anterior, sacamos la conclusión de que $z=1$ es un punto singular del elemento considerado. Por lo tanto, el radio de convergencia R del desarrollo de Taylor de $\varphi(z)$ (el desarollo se toma en serie de potencias de $z-(1+i)$) es igual a 1.

Consideremos ahora el punto $z_0' = 1 - i$ situado en el semiplano inferior. Para éste el próximo de los dos puntos 0 y 1 será de nuevo el punto 1. Describiendo una circunferencia γ' de radio 1 con el centro en z_0', tendremos en su interior un elemento determinado de la función $f(z)$, el cual designaremos mediante $\psi(z)$. Demostremos que todos los puntos de la circunferencia γ' son puntos regulares de este elemento. Con este fin, consideremos el círculo K: $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$, cuya frontera contiene el punto 0. En el interior del círculo K la función $\operatorname{Ln} z$ se descompone en ramas uniformes analíticas, una de las cuales coincide con $\operatorname{Ln}_1 z$ en el interior de la circunferencia γ' (es suficiente elegir una rama uniforme de $\operatorname{Ln} z$, cuyo valor coincida con $\operatorname{Ln}_1 z$ en el punto z_0'). Designemos esta rama uniforme de $\operatorname{Ln} z$ mediante $\operatorname{Ln}_2 z = \operatorname{Ln}|z| + i \operatorname{Arg}_2 z$. Como en el punto z_0' el valor de $\operatorname{Arg}_2 z$ coincide con el valor de $\operatorname{Arg}_1 z$, igual a $\frac{7\pi}{4}$, y en el interior del círculo K los valores de $\operatorname{Arg}_2 z$ se diferencian en valor absoluto del valor en el centro de este círculo en una cantidad menor que $\frac{\pi}{2}$, en todos los puntos del círculo K, $\operatorname{Arg}_2 z$ satisface a las desigualdades

$$\frac{5\pi}{4} < \operatorname{Arg}_2 z < \frac{9\pi}{4}.$$

De aquí se deduce que $\operatorname{Ln}_2 z$ no se anula en el círculo K. Por esto la función $\frac{1}{\operatorname{Ln}_2 z}$ es analítica en este círculo. Pero ésta coincide con $\frac{1}{\operatorname{Ln}_1 z}$ en el círculo K: $|z - (1 - i)| < 1$, es decir, coincide con el elemento $\psi(z)$ de la función $f(z)$. De aquí que cada punto de la circunferencia γ' es regular para $\psi(z)$. En efecto, para cada punto $\zeta \in \gamma'$ existe un entorno U_ζ y en el mismo una función analítica $\frac{1}{\operatorname{Ln}_2 z}$, que coincide con $\psi(z)$ en la parte común a U_ζ y K'. En particular, el punto $z = 1$ también será un punto regular para $\psi(z)$. En este ejemplo se ve que un mismo punto $z = 1$ es singular para un elemento de la función analítica $f(z)$ (para $\varphi(z)$) y es regular para otro elemento de esta función (para $\psi(z)$).

Como todos los puntos de la circunferencia γ' son regulares para $\psi(z)$, el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de este elemento en serie de potencias de $z - (1 - i)$ es mayor que el radio de la circunferencia γ', es decir, es mayor que 1. Pero en el círculo K' $\psi(z) = \operatorname{Ln}_2 z$, debido a lo cual los desarrollos de Taylor de las funciones $\psi(z)$ y $\operatorname{Ln}_2 z$ coinciden. Como $\operatorname{Ln}_2 z$ es una función analítica en el círculo $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$, el radio de convergencia R' de este desarrollo no puede ser menor que $\sqrt{2}$. Para demostrar que es exactamente igual a $\sqrt{2}$, es suficiente cerciorarse que al menos uno

de los puntos de la circunferencia Γ: $|z-(1-i)|=\sqrt{2}$ es un punto singular para $\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}$. Tal punto es el origen de coordenadas. En efecto, $\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}\right)'=-\frac{1}{z(\mathrm{Ln}_2 z)^2}\to\infty$ cuando $z\to 0$ manteniéndose en el interior de Γ. De aquí se deduce que no existe ninguna función $\chi(z)$, analítica en un entorno U del origen de coordenadas, que coincida con $\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}$ en los puntos comunes a U y K (suponiendo la existencia de tal función habría que suponer también la existencia del límite finito:

$$\chi'(0)=\lim_{z\to 0}\chi'(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}\right)',$$

lo cual, como ya se observó, es imposible).

Proponemos al lector cerciorarse de que en este ejemplo, para cada punto z_0 del recinto G, situado en el semiplano superior, el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de la función $f(z)$ en serie de potencias de $z-z_0$ es igual a la distancia desde z_0 hasta el punto más próximo al mismo del par 0 y 1, mientras que para los puntos z_0' situados en el semiplano inferior, la distancia desde z_0' hasta 1 no desempeña ningún papel al determinar el radio de convergencia de la serie correspondiente; este radio siempre coincide aquí con la distancia desde z_0' hasta el punto 0.

§ 7. METODOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS. COMPORTAMIENTO DE LA SERIE DE POTENCIAS EN LA FRONTERA DEL CIRCULO DE CONVERGENCIA

7.1. En este apartado nos dedicaremos a estudiar algunos métodos de desarrollos de las funciones analíticas en series de potencias. De principio, el problema de la búsqueda del desarrollo de Taylor se resuelve por las fórmulas de los coeficientes de la serie

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Pero la realización directa de los cálculos, que se basan en la determinación de las derivadas sucesivas de la función $f(z)$, puede resultar ser muy complicada o incluso difícil de efectuar. Sin embargo, en muchos casos, prácticamente muy importantes, se pueden obtener desarrollos de Taylor deduciéndolos de un modo determinado de otros desarrollos antes ya conocidos.

Supongamos que la función $f(z)$ se expresa en forma de una serie de funciones analíticas que converge uniformemente en el interior

de cierto entorno $|z - z_0| < \rho$ del punto z_0:

$$f(z) = \sum_1^\infty f_n(z). \qquad (7.1:1)$$

Entonces, en virtud del teorema de Weierstrass, tendremos:

$$f^{(k)}(z) = \sum_1^\infty f_n^{(k)}(z)$$

y

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \sum_1^\infty \frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!}. \qquad (7.1:2)$$

Aquí $\frac{1}{k!} f^{(k)}_n(z_0)$ es el coeficiente de $(z - z_0)^k$ en el desarrollo de Taylor de la función $f_n(z)$, y $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$, el coeficiente de $(z - z_0)^k$ en el desarrollo de Taylor de la función $f(z)$.

Por consiguiente, *los coeficientes de Taylor de la suma de una serie uniformemente convergente de funciones analíticas* $\sum_1^\infty f_n(z)$ *se obtienen sumando los coeficientes de Taylor homólogos* (o sea, los coeficientes de una misma potencia $(z - z_0)^k$, *tomados de los desarrollos de cada una de las funciones* $f_n(z)$).

He aquí dos ejemplos. Consideremos primero la suma de la serie

$$F(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}.$$

Los términos de esta serie son funciones de z, analíticas en el círculo unidad, y la serie $\sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}$ es uniformemente convergente en el interior del círculo unidad. En efecto, si E es un conjunto cerrado de puntos de este círculo y $\delta > 0$ es la distancia desde E hasta la circunferencia unidad, entonces para cualquier punto $z \in E$, se tiene: $|z| \leqslant 1 - \delta = \rho < 1$; por consiguiente, $\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \leqslant \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho}$, y como la serie $\sum_1^\infty \frac{\rho^n}{1-\rho}$ es convergente (ésta es una progresión geométrica de razón ρ), la serie dada también será uniformemente convergente en E, es decir, será uniformemente convergente en el interior del círculo unidad. Para determinar el coeficiente de z^k en el desarrollo de Taylor de $F(z)$, por lo anterior, hay que sumar

los coeficientes de z^k en todos los desarrollos de Taylor de las funciones

$$\frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \ldots$$

El coeficiente de z^k en tal desarrollo es igual a 0 si k no es divisible por n, y es igual a 1 si k es divisible por n. Por consiguiente, el coeficiente de z^k en el desarrollo de $F(z)$ es igual a una suma de unidades cuya cantidad es igual al número de todos los divisores naturales del número k. Designando este número mediante $\tau(k)$ ($\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 2$, $\tau(3) = 2$, $\tau(4) = 3$, $\tau(5) = 2, \ldots$), tendremos:

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} \tau(k) z^k.$$

Este es el desarrollo buscado. Como $F(z)$ es una función analítica en el círculo unidad (según el teorema de Weierstrass), el desarrollo hallado es convergente en el círculo unidad.

Obsérvese también que, para $z = 1$, éste es divergente, puesto que la serie toma la forma $\sum_{1}^{\infty} \tau(k)$, donde todos los términos son números naturales. De aquí que el radio de convergencia es igual a 1.

Veamos también el ejemplo de la serie

$$\Phi(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

La función $\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ es analítica en todo el plano, menos en los puntos $z = \pm n\pi$, donde se hace ∞. Por consiguiente, cada una de estas funciones es analítica en el círculo $|z| < \pi$. Demostremos que la serie dada es uniformemente convergente en el interior de este círculo. En efecto, si $|z| \leqslant \rho$, donde $\rho < \pi$, se tiene:

$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \right| \leqslant \frac{2\rho}{n^2\pi^2 - \rho^2} = \frac{2\rho}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{n^2\pi^2}} \leqslant \frac{2\rho}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{\pi^2}},$$

y como en el segundo miembro ha resultado el término general de una serie convergente (la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente), la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ será uniformemente convergente en el interior del círculo $|z| < \pi$. Por lo tanto, el coeficiente de z^k en el desarrollo de Taylor

de la función $\Phi(z)$ es igual a la suma de los coeficientes de la misma potencia de z en los desarrollos de Taylor de cada una de las funciones $\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$. Este último desarrollo tiene la forma:

$$\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}=-\frac{2z}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2}=$$

$$=-\frac{2z}{n^2\pi^2}-\frac{2z^3}{n^4\pi^4}-\frac{2z^5}{n^6\pi^6}-\ldots-\frac{2z^{2q-1}}{n^{2q}\pi^{2q}}-\ldots;$$

aquí el coeficiente de z^k es igual a cero si k es par, e igual a $-\frac{2}{n^{2q}\pi^{2q}}$ si $k=2q-1$ (impar). Por esta razón, el coeficiente de z^k en el desarrollo de la función $\Phi(z)$ es igual a cero si k es par, e igual a $-2\sum\limits_1^\infty\frac{1}{(n\pi)^{2q}}$ si k es impar: $k=2q-1$.

Así, pues,

$$\Phi(z)=-2\sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^{2q}}\right]z^{2q-1}.$$

Esta es la serie de potencias buscada. Esta serie tiene que ser convergente en el círculo $|z|<\pi$, puesto que la función $\Phi(z)$ es analítica en este círculo. En el punto $z=\pi$, para cada término de la serie obtenemos la desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^{2q}}\pi^{2q-1}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}>\frac{1}{\pi},$$

de donde se deduce que no se cumple la condición necesaria de convergencia, y la serie es divergente. Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a π.

Supongamos que $f(z)$ viene expresada en la forma

$$f(z)=F[\varphi(z)], \tag{7.1:3}$$

donde

$$\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\ldots+\alpha_nz^n+\ldots,\ |z|<r \tag{7.1:4}$$

y

$$F(w)=A_0+A_1(w-\alpha_0)+A_2(w-\alpha_0)^2+\ldots+A_m(w-\alpha_0)^m+\ldots$$
$$|w-\alpha_0|<R, \tag{7.1:5}$$

donde los coeficientes de las series de potencias para $\varphi(z)$ y $F(w)$ son conocidos. Como en estas condiciones $\varphi(z)\to\alpha_0$ para $z\to0$, se puede señalar un número ρ, $0<\rho\leqslant r$, tal que el módulo

$|\varphi(z) - \alpha_0|$ será menor que R para $|z| < \rho$. Debido a esto, el punto $w = \varphi(z)$ pertenecerá al círculo de convergencia de la serie (7.1:5), y, por consiguiente, la función $f(z) = F(w) = F[\varphi(z)]$ será analítica para $|z| < \rho$. De aquí que tiene que existir un desarrollo de la función $f(z)$ en serie de potencias de z, convergente para $|z| < \rho$. El problema consiste en calcular los coeficientes de esta serie.

Consideremos el desarrollo

$$f(z) = F[\varphi(z)] = \sum_{0}^{\infty} A_n [\varphi(z) - \alpha_0]^n, \qquad (7.1:6)$$

respecto del cual ya sabemos que es convergente para $|z| < \rho$. Para que sea posible alegar a la convergencia uniforme de esta serie, sustituyamos ρ por un número no mayor ρ', $0 < \rho' \leqslant \rho$, de modo que en el círculo $|z| < \rho'$ se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(z) - \alpha_0| < \frac{R}{2}.$$

Como la serie (7.1:5) es uniformemente convergente para $|w - \alpha_0| < \frac{R}{2}$, la serie (7.1:6) también lo será para $|z| < \rho'$. Por consiguiente, el coeficiente de z^k en el desarrollo de Taylor de la función $f(z)$ puede obtenerse tomando la suma de los coeficientes homónimos en los desarrollos de cada una de las funciones $A_n [\varphi(z) - \alpha_0]^n$.

Los últimos desarrollos se obtienen mediante una multiplicación n-ple de la serie de la función $\varphi(z) - \alpha_0$ por sí misma. En el caso dado, la multiplicación término a término de las series es legítima, puesto que se trata de una serie de potencias en su círculo de convergencia, donde ésta es absolutamente convergente.

En resumen, llegamos a obtener la siguiente proposición: *para obtener el desarrollo de Taylor de una función* $f(z) = F[\varphi(z)]$, *donde* $\varphi(z)$ *es una función analítica en el origen de coordenadas y* $F(w)$ *es una función analítica en un entorno del punto* $\alpha_0 = \varphi(0)$, *se debe poner la serie de* $w = \varphi(z)$ (7.1:4) *en la serie de* $F(w)$ (7.1:5), *efectuar las elevaciones necesarias a potencias, es decir, multiplicar las series, y, finalmente, sumar los coeficientes de los términos que contienen iguales potencias de z. La serie obtenida será el desarrollo de Taylor buscado de la función* $f(z)$. *Esta será convergente en el círculo* $|z| < \rho$, *donde* ρ *se elige de tal modo que para* $|z| < \rho$ *sea* $|\varphi(z) - \alpha_0| < R$.

El método expuesto de obtención de desarrollos de potencias se llama s u s t i t u c i ó n d e u n a s e r i e e n o t r a. Ilustrémoslo con dos ejemplos.

Sea

$$f(z) = \sqrt{\cos z},$$

donde se considera aquella rama uniforme, en un entorno del origen de coordenadas, de esta función biforme que toma el valor 1 para $z = 0$. Para aplicar la regla anterior a este ejemplo, representemos $f(z)$ en la forma:

$$f(z) = [1-(1-\cos z)]^{\frac{1}{2}}.$$

En nuestro caso

$$w = \varphi(z) = 1-\cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots, \quad |z| < \infty,$$

$$F(w) = (1-w)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}w - \frac{1}{8}w^2 - \frac{1}{16}w^3 - \frac{5}{128}w^4 - \ldots, \quad |w| < 1.$$

Por consiguiente,

$$f(z) = F[\varphi(z)] = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \ldots\right) - \\ - \frac{1}{8}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \ldots\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{z^2}{2} - \ldots\right)^3 - \ldots$$

Limitémonos a calcular los coeficientes de las primeras potencias, hasta la sexta inclusive. Entonces, evidentemente, los términos no escritos pueden ser desechados, puesto que todos ellos figurarán solamente en la formación de los términos de la serie que contengan potencias de z mayores de la sexta. Se tiene

$$\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \ldots\right)^2 = \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \ldots, \quad \left(\frac{z^2}{2} - \ldots\right)^3 = \frac{z^6}{8} - \ldots,$$

por consiguiente,

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \ldots\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \ldots\right) - \\ - \frac{1}{16}\left(\frac{z^6}{8} - \ldots\right) + \ldots = 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} - \frac{19z^6}{5760} - \ldots$$

Como $f(z) = \sqrt{\cos z}$ es una función analítica en el círculo $|z| < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{pues posee derivada en el mismo, igual a } -\frac{\operatorname{sen} z}{2\sqrt{\cos z}}\right)$, la serie de $f(z)$ tiene que converger para $|z| < \frac{\pi}{2}$. Si $z = \frac{\pi}{2}$, como fácilmente se comprueba, se tiene un punto singular de la función $f(z)$, de donde se deduce que el radio de convergencia de la serie es igual a $\frac{\pi}{2}$.

Consideremos también

$$f(z) = \exp\frac{1}{1-z}.$$

Representando $f(z)$ en la forma $f(z)=e\exp\frac{z}{1-z}$, hagamos:

$$w=\varphi(z)=\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\ldots\ (|z|<1)\ \text{ y }\ F(w)=e^{w+1}=$$
$$=e\left(1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\ldots\right),\quad |w|<\infty.$$

Sustituyendo una serie en otra, resulta:

$$f(z)=e\left[1+(z+z^2+z^3+\ldots)+\frac{(z+z^2+z^3+\ldots)^2}{2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{(z+z^2+z^3+\ldots)^3}{3!}+\ldots\right].$$

En el ejemplo dado, donde $\varphi(z)=\frac{z}{1-z}$, se puede evitar la realización inmediata del producto de las series, observando que para $|z|<1$:

$$(z+z^2+z^3+\ldots)^k=\left(\frac{z}{1-z}\right)^k=z^k(1-z)^{-k}=$$
$$=z^k\cdot\left[1+\frac{k}{1}z+\frac{k(k+1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{k\ldots(k+n-1)}{n!}z^n+\ldots\right],$$

y como

$$\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{n!}=\frac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots(n+1)}{(k-1)!}=\binom{k+n-1}{k-1},$$

resulta:

$$(z+z^2+z^3+\ldots)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k-1}z^{n+k}.$$

Por lo tanto,

$$f(z)=e\left[1+\frac{1}{1!}\sum_0^{\infty}z^{n+1}+\frac{1}{2!}\sum_0^{\infty}(n+1)z^{n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3!}\sum_0^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{2!}z^{n+3}+\ldots+\frac{1}{k!}\sum_0^{\infty}\binom{k+n-1}{k-1}z^{n+k}+\ldots\right]=$$
$$=e\left\{1+z+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(\frac{1}{1!}+2\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)z^3+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{1!}+3\frac{1}{2!}+3\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)z^4+\ldots+\left[\frac{1}{1!}+\binom{n-1}{1}\frac{1}{2!}+\right.$$
$$\left.\left.+\binom{n-1}{2}\frac{1}{3!}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]z^n+\ldots\right\}.$$

Este es el desarrollo buscado. Como la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z| < 1$, la serie obtenida es convergente en el círculo unidad. Fácilmente se observa que $z = 1$ es un punto singular para $f(z)$. En efecto, cuando z tiende a 1, tomando valores positivos menores que la unidad, la función $\exp \frac{1}{1-z}$ tiende a ∞. De aquí se deduce que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a la unidad.

7.2. Pasemos ahora a estudiar el problema de la *división de series de potencias*.

Sean

$$a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots \tag{7.2:1}$$

y

$$b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a)^n + \ldots \tag{7.2:2}$$

dos series de potencias con los radios de convergencia positivos r y ρ, donde el término independiente b_0 de la segunda serie es distinto de cero. Hagamos la notación $\sigma = \min(r, \rho)$ (si $r = \rho$, entonces $\sigma = r = \rho$). Entonces ambas series serán convergentes en el círculo $|z-a| < \sigma$. Si en este círculo hay ceros de la suma de la serie (7.2:2), tomamos un nuevo círculo de menor radio, en cuyo interior la suma de la serie (7.2:2) no se anule. (Tal círculo existe, puesto que el punto a no es un cero de la suma de la serie (7.2:2), debido a la condición $b_0 \neq 0$). Así, pues, existe un círculo $|z-a| < R$, en el cual ambas series son convergentes y la suma de la segunda serie carece de ceros. En el interior de este círculo la relación

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots}{b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a)^n + \ldots} \tag{7.2:3}$$

representa una función analítica, lo cual es consecuencia de la regla de derivación del cociente. Por lo tanto, existe una serie de potencias

$$c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \tag{7.2:4}$$

que expresa a la función $f(z)$ en el interior del círculo $|z-a| < R$. A esta serie podemos llamarla *cociente* de las series (7.2:1) (*dividendo*) y (7.2:2) (*divisor*), y el proceso mismo de su búsqueda, *división de las series*.

Efectuemos primero la división de las series por el método de los *coeficientes indeterminados*. Para esto, escribamos la relación (7.2:3) en la forma:

$$\begin{aligned}&[c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots] \times \\ &\times [b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a^n) + \ldots] = \\ &= a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots\end{aligned}$$

y observemos que las series de potencias consideradas, siendo convergentes en el interior del círculo $|z-a|<R$, tienen que ser aquí absolutamente convergentes. Por esta razón, se pueden multiplicar término a término las series que figuran en el segundo miembro de la última igualdad. Efectuando la multiplicación obtendremos:

$$c_0b_0+(c_0b_1+c_1b_0)(z-a)+(c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0)(z-a)^2+\dots$$
$$\dots+(c_0b_n+c_1b_{n-1}+\dots+c_nb_0)(z-a)^n+\dots$$
$$\dots=a_0+a_1(z-a)+\dots+a_n(z-a)^n+\dots \qquad (7.2:5)$$

Como las sumas de las series de potencias que figuran en el primero y segundo miembros coinciden en el círculo $|z-a|<R$, según el teorema de identidad para las series de potencias los coeficientes de ambas series tienen que ser iguales. Resultan las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}
&c_0b_0=a_0,\\
&c_0b_1+c_1b_0=a_1,\\
&c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0=a_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_0b_n+c_1b_{n-1}+c_2b_{n-2}+\dots+c_nb_0=a_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (7.2:6)$$

Este es un sistema infinito de ecuaciones lineales respecto de los coeficientes desconocidos $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ La particularidad de este sistema, que extremadamente simplifica su solución, consiste en que para cualquier n $(n=0, 1, 2, 3, \dots)$ las primeras $n+1$ ecuaciones contienen a las primeras $n+1$ incógnitas. Determinando c_0 de la primera ecuación $c_0=\frac{a_0}{b_0}$ ($b_0\neq 0$, según la hipótesis) y sustituyéndolo en la segunda, obtenemos la ecuación $\frac{a_0}{b_0}b_1+$ $+c_1b_0=a_1$, de donde

$$c_1=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}.$$

Supongamos que, en general, se han hallado los valores de los primeros n coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$. Sustituyéndolos en la $n+1$ ecuación, obtenemos:

$$c_n=\frac{a_n-c_0b_n-c_1b_{n-1}-\dots-c_{n-1}b_1}{b_0^{n+1}}. \qquad (7.2:7)$$

De este modo se puede determinar el coeficiente con un índice previamente dado. Es fácil obtener una expresión para c_n mediante los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_0, b_1, \dots, b_n$ en forma de un determinante. El determinante del sistema formado por las primeras

$n + 1$ ecuaciones es igual a

$$\begin{vmatrix} b_0 0 & 0 & \dots 0 \\ b_1 b_0 & 0 & \dots 0 \\ b_2 b_1 & b_0 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ b_n b_{n-1} & b_{n-2} & \dots b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0,$$

y, por consiguiente,

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 0 & 0 & \dots a_0 \\ b_1 b_0 & 0 & \dots a_1 \\ b_2 b_1 & b_0 & \dots a_2 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ b_n b_{n-1} & b_{n-2} & \dots a_n \end{vmatrix}. \tag{7.2:8}$$

Esta fórmula resuelve completamente el problema de la división de las series.

Demostremos que el cociente (7.2:4) de dos series de potencias puede obtenerse dividiendo la serie (7.2:1) por la serie (7.2:2) según las mismas reglas por las que se dividen los polinomios, como si las series (7.2:1) y (7.2:2) fuesen polinomios dispuestos según las potencias crecientes de $z - a$. Para demostrar esto, empecemos a efectuar la operación indicada. Obtendremos:

$$\begin{array}{l|l}
a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots & b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \\ \hline
a_0 + \frac{a_0}{b_0} b_1 (z-a) + \dots + \frac{a_0}{b_0} b_n (z-a)^n + \dots & \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} (z-a) + \dots \\ \cline{1-1}
\frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0} (z-a) + \dots + \frac{a_n b_0 - a_0 b_n}{b_0} (z-a)^n + \dots & \\
\frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0} (z-a) + \dots + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} b_n (z-a)^n + \dots & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Los primeros dos coeficientes del cociente obtenido coinciden con los valores de c_0 y c_1 hallados anteriormente de las ecuaciones (7.2:6). Supongamos que de este modo hemos obtenido que los primeros n coeficientes coinciden con los valores de $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, hallados al resolver las ecuaciones (7.2:6). Entonces, tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_n(z-a)^n + \dots & b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \\ \hline
b_0 c_0 + b_1 c_0 (z-a) + b_2 c_0 (z-a)^2 + \dots + b_n c_0 (z-a)^n + \dots & c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + \dots \\ \cline{1-1}
(a_1 - b_1 c_0)(z-a) + (a_2 - b_2 c_0)(z-a)^2 + \dots + (a_n - b_n c_0)(z-a)^n + \dots & \\
\qquad b_0 c_1 (z-a) + \qquad b_1 c_1 (z-a)^2 + \dots + \qquad b_{n-1} c_1 (z-a)^n + \dots & \\ \cline{1-1}
(a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1)(z-a)^2 + \dots + (a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1)(z-a)^n + \dots & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \cline{1-1}
(a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \dots - b_1 c_{n-1})(z-a)^n + \dots & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

El primer término del n-ésimo residuo es: $(a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \ldots$ $\ldots - b_1 c_{n-1})(z-a)^n$, por lo cual, el término del cociente que sigue después de $c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ es igual a

$$\frac{a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \ldots - b_1 c_{n-1}}{b_0}(z-a)^n.$$

Pero el coeficiente de este término coincide con el valor de c_n determinado de las ecuaciones (7.2:6) por la fórmula (7.2:7).

En resumen, *el método de los coeficientes indeterminados, al ser aplicado a la división de las series de potencias, da lugar al mismo resultado que se obtiene al operar por las reglas de la división de los polinomios dispuestos según las potencias crecientes de* $x = z - a$.

Veamos un ejemplo de división de series de potencias. Consideremos la función

$$F(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Esta función es analítica en todos los puntos del plano, a excepción de los ceros de la función $e^z - 1$, es decir, a excepción de los puntos: $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ Sustituyendo $e^z - 1$ por el desarrollo en serie:

$$e^z - 1 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

y simplificando el numerador y denominador de la fracción por z, obtenemos la siguiente expresión para $F(z)$ (que determinará la función $F(z)$ también para $z = 0$):

$$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \ldots}$$

La serie que figura en el denominador es convergente para cualquier z y tiene todos los mismos ceros que la función $e^z - 1$, a excepción de un cero en el origen de coordenadas. (Todo esto se debe a que esta serie representa la función $\frac{e^z - 1}{z}$ (para $z \neq 0$)). Por esta razón, en el interior del círculo $|z| < 2\pi$ su suma no se anula. Por consiguiente, la función $F(z)$ se puede desarrollar en serie en este círculo aplicando la división de series. La primera de las ecuaciones (7.2:6) da:

$$c_0 \cdot 1 = 1, \text{ es decir, } c_0 = 1.$$

Como todos los coeficientes de la serie del dividendo, a excepción del coeficiente inicial, son iguales a cero, la $(n+1)$-ésima ecuación (7.2:6) tiene la forma

$$c_0 \frac{1}{(n-1)!} + c_1 \frac{1}{n!} + \ldots + c_{n-1} \frac{1}{2!} + c_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (7.2:9)$$

Esta ecuación permite determinar los números c_n uno tras otro. Para determinar el coeficiente c_n se puede utilizar también la fórmula (7.2:8):

$$c_0 = 1, \quad c_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Los números $c_n n!$ se llaman **números de Bernoulli** y se designan mediante $B_n : B_n = c_n n!$.

Mediante estos números se expresan simplemente los coeficientes de muchas relaciones importantes. Para calcularlos se tienen las fórmulas: $B_0 = c_0 \cdot 0! = 1$,

$$B_n = c_n n! = (-1)^n \, n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{7.2:10}$$

Por cierto, el cálculo de los números de Bernoulli es más cómodo efectuarlo sucesivamente, empleando la fórmula (7.2:9). De ésta obtenemos:

$$B_0 \cdot \frac{1}{0!\,(n+1)!} + B_1 \frac{1}{1!\,n!} + \dots + B_n \frac{1}{n!\,1!} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

o bien, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(n+1)!$ y observando que $\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$ es el coeficiente binomial $\binom{n+1}{k}$,

$$B_0\binom{n+1}{0}+B_1\binom{n+1}{1}+\ldots+B_n\binom{n+1}{n}=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Esta fórmula puede representarse en la siguiente forma simbólica:

$$(1+B)^{n+1}-B^{n+1}=0. \tag{7.2:11}$$

Después de elevar a la potencia según la fórmula binomial, todos los exponentes de la potencia se deben sustituir aquí por los subíndices.

Como $B_0=1$, sucesivamente hallamos:

$$B_0+2B_1=0;\quad B_1=-\frac{1}{2}B_0=-\frac{1}{2};$$

$$B_0+3B_1+3B_2=0;\quad B_2=-\frac{1}{3}B_0-B_1=\frac{1}{6};$$

$$B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0;\quad B_3=-\frac{1}{4}B_0-B_1-\frac{3}{2}B_2=0;$$

$$B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4=0;$$
$$B_4=-\frac{1}{5}B_0-B_1-2B_2-2B_3=-\frac{1}{30};$$

$$B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0;$$
$$B_5=-\frac{1}{6}B_0-B_1-\frac{5}{2}B_2-\frac{10}{3}B_3-\frac{5}{2}B_4=0;$$

$$B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5+7B_6=0;$$
$$B_6=-\frac{1}{7}B_0-B_1-3B_2-5B_3-5B_4-3B_5=\frac{1}{42};$$

. . . .

En resumen,

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,$$
$$B_4=-\frac{1}{30},\quad B_5=0,\quad B_6=\frac{1}{42},\ \ldots$$

Demostremos que todos los números de Bernoulli de subíndices impares mayores que la inidad son iguales a cero:

$$B_{2k+1}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Para demostrar esto, sustituyamos z por $-z$ en el desarrollo

$$\frac{z}{e^z-1}=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$
$$\ldots=B_0+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}z^n+\ldots; \tag{7.2:12}$$

obtenemos:

$$\frac{-z}{e^{-z}-1}=-\frac{ze^z}{(e^{-z}-1)\,e^z}=\frac{ze^z}{e^z-1}=B_0-\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2-\frac{B_3}{3!}z^3+\ldots,$$

o bien, restando esta última relación de (7.2:12),

$$\frac{z}{e^z-1}-\frac{ze^z}{e^z-1}=-z=2\frac{B_1}{1!}z+2\frac{B_3}{3!}z^3+\ldots+2\frac{B_{2k+1}}{(2k+1)}z^{2k+1}+\ldots$$

De aquí, basándose en la unicidad del desarrollo en serie de potencias, se deduce que:

$$2B_1=-1,\quad B_3=B_5=\ldots=B_{2k+1}=\ldots=0,$$

como se quería demostrar.

Aplicando la propiedad demostrada de los números de Bernoulli, se puede escribir el desarrollo (7.2:12) en la forma:

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}. \qquad (7.2:13)$$

Como los puntos singulares de la función $\frac{z}{e^z-1}$ más próximos al origen de coordenadas son $z_1=2\pi i$ y $z_2=-2\pi i$ (en estos puntos la función no está definida y no puede definirse de modo que se conserve la continuidad), el radio de convergencia de la serie (7.2:13) es igual a 2π. De aquí que, según la fórmula de Cauchy-Hadamard, se deduce que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}}=\frac{1}{2\pi},$$

y como $B_{2k+1}=0$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, se tiene:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[2k]{\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}}=\frac{1}{2\pi}.$$

Debido a esto, para cualquier $\varepsilon>0$ existe un conjunto infinito de números B_{2k} que satisfacen a la desigualdad

$$|B_{2k}|>\frac{(2k)!}{(2\pi+\varepsilon)^{2k}},$$

es decir, que son extremadamente grandes en comparación con sus subíndices $2k$.

Del desarrollo (7.2:13) se pueden obtener sin dificultad los desarrollos de las funciones $z\operatorname{cotg} z$, $\operatorname{tg} z$ y $z\operatorname{cosec} z$. Representemos $\operatorname{cotg} z$ en la forma

$$\operatorname{cotg} z=\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}=i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=i+\frac{2i}{e^{2iz}-1},$$

de donde

$$z \operatorname{cotg} z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1}.$$

La función $\frac{2iz}{e^{2iz}-1}$ se puede desarrollar según la fórmula (7.2:13) si se sustituye en esta fórmula z por $2iz$. Como la serie (7.2:13) era convergente para $|z| < 2\pi$, la serie nuevamente obtenida será convergente para $|2iz| < 2\pi$, es decir, para $|z| < \pi$.

Así, pues,

$$\frac{2iz}{e^{2iz}-1} = 1 - \frac{2iz}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k} = 1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

y, por consiguiente,

$$z \operatorname{cotg} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k} z^{2k}}{(2k)!}. \qquad (7.2{:}14)$$

Para obtener el desarrollo de Taylor de $\operatorname{tg} z$, es más fácil observar que

$$\operatorname{cotg} z - \operatorname{tg} z = 2 \operatorname{cotg} 2z,$$

de donde

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} z - 2 \operatorname{cotg} 2z.$$

Sustituyendo en la fórmula (7.2:14) z por $2z$, obtendremos una serie que es convergente para $|2z| < \pi$, es decir, para $|z| < \frac{\pi}{2}$:

$$2z \operatorname{cotg} 2z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{4k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \qquad (7.2{:}14')$$

Restando término a término (7.2:14′) de (7.2:14), hallaremos:

$$z \operatorname{cotg} z - 2z \operatorname{cotg} 2z = z \operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} (1 - 2^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

o bien

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \qquad (7.2{:}15)$$

Del método mismo de obtención de esta serie se deduce que ésta es convergente si $|z| < \frac{\pi}{2}$, y que $\frac{\pi}{2}$ es el radio de conver-

gencia de la serie (esto se debe a que los puntos $z=\pm\frac{\pi}{2}$ son singulares para la suma de la serie).

Pasando a examinar la función $z \operatorname{cosec} z$, obsérvese que

$$\operatorname{cotg} z+\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{\cos z\cos\frac{z}{2}+\operatorname{sen} z\operatorname{sen}\frac{z}{2}}{\operatorname{sen} z\cos\frac{z}{2}}=\frac{\cos\frac{z}{2}}{\operatorname{sen} z\cos\frac{z}{2}}=\operatorname{cosec} z.$$

Sustituyendo en (7.2:15) z por $\frac{z}{2}$, obtenemos una serie que será convergente para $\left|\frac{z}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$, es decir, para $|z|<\pi$. De aquí y del desarrollo (7.2:14), que también es convergente para $|z|<\pi$, hallamos:

$$z\operatorname{cosec} z=z\operatorname{cotg} z+z\operatorname{tg}\frac{z}{2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2^{2k}-2)\,B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}. \quad (7.2:16)$$

Hallemos, finalmente, el desarrollo de $\sec z$. Como los puntos singulares de la función más próximos al origen de coordenadas son: $z=-\frac{\pi}{2}$ y $z=\frac{\pi}{2}$, el desarrollo buscado posee el círculo de convergencia: $|z|<\frac{\pi}{2}$. Para hallarlo, apliquemos el método de división de series. Tendremos:

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\ldots}=$$
$$=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

Como $\sec z$ es una función par, todos los coeficientes de las potencias impares a_1, a_3, a_5, ... son iguales a cero:

$$\sec z=\frac{1}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots}=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\ldots \quad (7.2:17)$$

Está admitido escribir los coeficientes a_0, a_2, a_4, ... de este desarrollo en la forma

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{E_{2k}}{(2k)!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Los números E_{2k}, determinados de este modo, se llaman **números de Euler**. Escribiendo de nuevo (7.2:17) del modo siguiente:

$$1=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\left(E_0-\frac{E_2}{2!}z^2+\frac{E_4}{4!}z^4-\ldots\right)$$

y efectuando la multiplicación en el segundo miembro, hallaremos

$$1 = E_0 - \left(\frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!}\right) z^2 + \left(\frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2!\,2!} + \frac{E_4}{4!}\right) z^4 -$$
$$- \left(\frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4!\,2!} + \frac{E_4}{2!\,4!} + \frac{E_6}{6!}\right) z^6 + \ldots,$$

de donde

$$E_0 = 1;$$
$$\frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!} = 0;$$
$$\frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2!\,2!} + \frac{E_4}{4!} = 0;$$
$$\frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4!\,2!} + \frac{E_4}{2!\,4!} + \frac{E_6}{6!} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Estas ecuaciones permiten hallar sucesivamente los números de Euler. Obtenemos:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5; \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \ldots$$

Si, en general, se han hallado los números $E_0, E_2, \ldots, E_{2n-2}$, para determinar E_{2n} se tiene la ecuación

$$\frac{E_0}{(2n)!} + \frac{E_2}{(2n-2)!\,2!} + \frac{E_4}{(2n-4)!\,4!} + \ldots + \frac{E_{2n}}{(2n)!} = 0,$$

o bien

$$E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \ldots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0.$$

De aquí que, si los números $E_0, E_2, \ldots, E_{2n-2}$ son enteros, el número E_{2n} también lo será. Pero los primeros números hallados son enteros. Por consiguiente, todos los números de Euler son enteros.

El desarrollo de $\sec z$ se escribe definitivamente en la forma

$$\sec z = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \qquad (7.2:18)$$

Esta es convergente para $|z| < \frac{\pi}{2}$. Los números de Euler E_{2k}, que figuran en el desarrollo, se determinan completamente por las condiciones:

$$E_0 = 1, \quad E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \ldots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (7.2:19)$$

7.3. Aquí estudiaremos algunas cuestiones ligadas con el comportamiento de una serie de potencias en la frontera del círculo de convergencia. Los ejemplos más sencillos de series con el radio de convergencia $R = 1$ muestran que en la frontera del círculo de convergencia la serie puede ser divergente en cada

punto (la serie geométrica: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$), puede ser convergente en unos puntos y ser divergente en otros $\left(\text{la serie } z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right.$ $\left.\ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots \text{ es convergente para } z = 1 \text{ y es divergente para } z = -1\right)$ y, finalmente, puede ser convergente en todos los puntos de la frontera $\left(\text{la serie } z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \ldots + \frac{z^n}{n^2} + \ldots \text{ es convergente y, además, absolutamente, en toda la circunferencia unidad}\right)$.

Ocupémonos primero de establecer algunas relaciones entre la convergencia de la serie de potencias en algunos puntos de la frontera del círculo de convergencia y el comportamiento de la suma de la serie en este círculo.

Obsérvese que, en todos los casos, sin restringir la generalidad de los resultados, se pueden considerar series de potencias con el círculo unidad de convergencia y suponer que el punto frontera en el cual es convergente la serie de potencias es el punto $z = 1$. En efecto, el caso general de la serie

$$\alpha_0 + \alpha_1(\zeta - \zeta_0) + \ldots + \alpha_n(\zeta - \zeta_0)^n + \ldots$$

con el radio finito de convergencia R y con el punto de convergencia ζ_1, $|\zeta_1 - \zeta_0| = R$ se reduce al indicado mediante la transformación lineal entera

$$z = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0}.$$

El primer resultado en este sentido, por el tiempo y su importancia, pertenece a Abel.

Segundo teorema de Abel. *Si la serie de potencias*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{7.3:1}$$

es convergente en el punto frontera del círculo de convergencia $z = 1$, *entonces, si el punto* z *del círculo unidad tiende al punto* 1 *por el interior de cualquier ángulo* g_0 de magnitud $2\theta < \pi$ con el vértice en el punto $z = 1$, *el cual es simétrico respecto del eje real, la suma de la serie de potencias* $f(z)$ *tiende a un límite que es igual a la suma de la serie en el punto frontera, es decir,*

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in g_0}} f(z) = \sum_0^\infty a_n. \tag{7.3:2}$$

Demostración. Consideremos la diferencia

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty a_k - f(z) = \sum_0^\infty a_k(1 - z^k).$$

Representémosla en la forma

$$\Delta(z) = \sum_0^n a_k(1 - z^k) + \sum_{n+1} a_k(1 - z^k), \tag{7.3:3}$$

donde n es un número natural fijo.

El primer término del segundo miembro tiende a cero cuando z tiende a 1. Por lo tanto, para demostrar el teorema es suficiente cerciorarse que el segundo

término puede hacerse arbitrariamente pequeño en el interior del ángulo g_0 cuando n es suficientemente grande. Con este fin consideremos la suma

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1-z^k) = (1-z) \sum_{n+1}^{n+p} a_k (1+z+\ldots+z^{k-1}).$$

Introduciendo las notaciones: $\sum_{n+1}^{m} a_k = \alpha_m$ $(m > n)$, $\alpha_n = 0$, de modo que $a_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ $(k = n+1, \ldots)$, haciendo luego $1 + z + \ldots + z^{k-1} = b_k$ y aplicando la transformación de Abel (cap. primero, ap. 3.4) tendremos:

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1-z^k) = (1-z) \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, b_k =$$

$$= (1-z) \left[\alpha_{n+p} b_{n+p} - \sum_{n+1}^{n+p-1} a_k (\alpha_{k+1} - b_k\right] =$$

$$= (1-z) \left[\sum_{n+1}^{n+p} a_k \sum_{0}^{n+p-1} z^k - \sum_{n+1}^{n+p-1} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k\right]. \qquad (7.3{:}4)$$

Como las sumas $\sum_{n=1}^{n-p} a_k = (1 - z^k) = \sum_{n+1}^{n+p} a_k - \sum_{n+1}^{n+p} a_k z^k$, $\sum_{n+1}^{n+p} a_k$ y $\sum_{0}^{n+p-1} z^k$ tienden a límites finitos cuando $p \to \infty$ (sus series correspondientes son convergentes), también tiene que tender a un límite la suma $\sum_{n+1}^{n+p} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k$. Pasando a límites, de (7.3:4) obtenemos:

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_k (1-z^k) = (1-z) \left[\sum_{n+1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{0}^{\infty} z^k - \sum_{n+1}^{\infty} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k\right] =$$

$$= \sum_{n+1}^{\infty} a_k - (1-z) \sum_{n+1}^{\infty} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k. \qquad (7.3{:}5)$$

Sea ε un número positivo arbitrario. Tomemos n tan grande, $n > N(\varepsilon)$ que se cumpla la desigualdad.

$$\left|\sum_{n+1}^{k} a_j\right| < \frac{\varepsilon \cos\theta}{6}$$

para cualquier k natural. Entonces, en particular, tiene que ser:

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon \cos\theta}{6}.$$

Por consiguiente,

$$\left|\sum_{n+1} a_k (1-z^k)\right| \leqslant \frac{\varepsilon\cos\theta}{6} + \frac{\varepsilon\cos\theta}{6} |1-z| \sum_{n+1}^{\infty} |z|^k \frac{\varepsilon\cos\theta}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \frac{|1-z|\cos\theta}{1-|z|}.$$

Pero cerca del vértice del ángulo g_θ y en su parte d_θ comprendida entre los lados del ángulo y el arco de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas que es tangente a los lados del ángulo (fig. 64), se tiene:

$$AB \cdot AB' = AC \cdot AC',$$

de donde

$$\frac{AB}{AC} = \frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{AC'}{AB'} < \frac{AD}{AE} < \frac{AD}{AF} = \frac{2}{\cos\theta},$$

es decir,

$$|1-z|\cos\theta < 2(1-|z|).$$

Por lo tanto, para $z \in d_\theta$ y $n > N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k (1-z^k)\right| < \frac{\varepsilon\cos\theta}{6} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fijando un $n > N(\varepsilon)$ y tomando después $\delta(\varepsilon)$ de modo que para

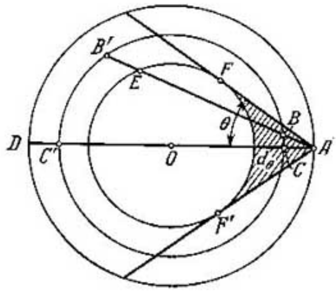

FIG. 64

$|1-z| < \delta(\varepsilon)$ en el interior de d_θ se cumpla la desigualdad

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k (1-z^k)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

obtendremos de (7.3:3):

$$|\Delta(z)| = \left|\sum_{0}^{\infty} a_k - f(z)\right| < \varepsilon \quad (z \in d_\theta,\ |1-z| < \delta(\varepsilon)),$$

de donde se deduce que

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in g_\theta}} f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k.$$

Como ilustración del segundo teorema de Abel, consideremos la serie logarítmica $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$.

Demostremos, ante todo, que esta serie converge en cada punto $z=e^{i\theta}$ de la circunferencia unidad, distinto de -1.

Para esto apliquemos el teorema del ap. 3.4 del cap. primero.

Haciendo $a_k=(-1)^{k-1}e^{ik\theta}$ y $b_k=\frac{1}{k}$, tendremos:

$$\left|\sum_{1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{1}^{n}(-1)^{k-1}e^{ik\theta}\right|=\left|\frac{e^{i\theta}-(-1)^n e^{i(n+1)\theta}}{1+e^{i\theta}}\right|\leqslant\frac{2}{|1+e^{i\theta}|},$$

o sea, las sumas $\sum_{1}^{n}a_k$ están acotadas uniformemente (respecto de n) en valor absoluto.

Por otra parte, $|b_{k+1}-b_k|=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, por lo cual la serie $\sum_{1}^{\infty}|b_{k+1}-b_k|$ es convergente. De aquí, según el teorema citado, la serie $\sum_{1}^{\infty}a_kb_k=$ $=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{ik\theta}}{k}$ es convergente, lo cual se afirmaba.

Pero si $|z|<1$, la suma de la serie $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}$ es $f(z)=\ln(1+z)=$ $=\ln|1+z|+i\arg(1+z)$. Por lo tanto, según el segundo teorema de Abel, para cualquier θ $(-\pi<\theta<\pi)$, se tiene

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{ik\theta}}{k}=\lim_{z\to e^{i\theta}}\ln(1+z)=\ln|1+e^{i\theta}|+$$

$$+i\arg(1+e^{i\theta})=\ln\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta}+$$

$$+i\arg\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right]=\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\theta}{2}.$$

Separando las partes real e imaginaria en esta relación, obtenemos dos desarrollos en series trigonométricas que son convergentes para $-\pi<\theta<\pi$:

$$\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k\theta}{k},$$

$$\frac{\theta}{2}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\operatorname{sen} k\theta}{k}.$$

En particular, para $\theta=0$, de la primera fórmula resulta:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

y de la segunda, para $\theta=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Veamos también como ejemplo la serie binomial $\sum\limits_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$, donde $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$ y α es un número complejo: $\alpha=\beta+i\gamma$. Supongamos primero que $\beta>-1$. Designando con λ_n el módulo de la razón $\binom{\alpha}{n}:\binom{\alpha}{n-1}$, se tiene:

$$\lambda_n=\left|\binom{\alpha}{n}:\binom{\alpha}{n-1}\right|=\left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right|=\left|1-\frac{\alpha+1}{n}\right|=$$

$$=\left|1-\frac{1+\beta}{n}-\frac{i\gamma}{n}\right|=\sqrt{1-2\frac{1+\beta}{n}+\frac{(1+\beta)^2+\gamma^2}{n^2}}.$$

Sea β' un número real que satisfaga a la condición $\beta>\beta'>-1$. Entonces, para $n>N(\beta')$, tendremos:

$$\frac{(1+\beta)^2+\gamma^2}{n}<2(\beta-\beta')$$

y, por consiguiente,

$$\lambda_n<\sqrt{1-2\frac{1+\beta}{n}+2\frac{\beta-\beta'}{n}}=$$

$$=\sqrt{1-2\frac{1+\beta'}{n}}<1-\frac{1+\beta'}{n}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\beta'}} \text{ *)},$$

o bien

$$\lambda_n<\frac{n^{1+\beta'}}{(n+1)^{1+\beta'}}=\mu_n.$$

---

*) Como

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(1+\beta')}=1-\frac{1+\beta'}{n}+$$

$$+\frac{(1+\beta')\left(1+\frac{\beta'}{2}\right)}{n^2}-\frac{(1+\beta')\left(1+\frac{\beta'}{2}\right)\left(1+\frac{\beta'}{3}\right)}{n^3}+\ldots$$

y para $\frac{1+\beta'}{n}<1$ los términos de esta serie decrecen en valor absoluto, se tiene: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(1+\beta')}>1-\frac{1+\beta'}{n}$.

Escribiendo las desigualdades análogas para los valores $N(\beta')+1$, $N(B')+2$, ..., n y multiplicándolas término a término, obtendremos:

$$\lambda_{N(\beta')+1}\cdot\lambda_{N(\beta')+2}\dots\lambda_n<\mu_{N(\beta')+1}\cdot\mu_{N(\beta')+2}\dots\mu_n,$$

o bien, sustituyendo λ y μ por sus valores y simplificando:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\right|<\frac{C(\beta')}{(n+1)^{1+\beta'}}.$$

Aquí mediante $C(\beta')$ se ha designado el valor, que no depende de n:

$$C(\beta')=\left|\binom{\alpha}{N(\beta')}\right|[N(\beta')+1]^{\beta'+1}.$$

De aquí que la sucesión de los coeficientes $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}$ de la serie binomial converge a cero si $\beta=\operatorname{Re}\alpha>-1$.

Cuando $\beta>0$, el número β', que está sujeto a la única condición $-1<$ $<\beta'<\beta$, se puede tomar positivo.

Como la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{1+\beta'}}$ es convergente para $\beta'>0$, de las desigualdades obtenidas se deduce que la serie binomial es absoluta y uniformemente convergente en todos los puntos de la circunferencia unidad si $\beta=\operatorname{Re}\alpha>0$.

Observando que en el interior del círculo unidad la suma de la serie binomial es $(1+z)^\alpha=\exp[\alpha\ln(1+z)]$, en virtud del segundo teorema de Abel, hallamos:

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}e^{in\theta}=\lim_{z\to e^{i\theta}}(1+z)^\alpha.$$

Si $e^{i\theta}=-1$, obtenemos, que $\lim\limits_{z\to-1}(1+z)^\alpha=0$. Para $e^{i\theta}\neq-1$ $(-\pi<\theta<\pi)$, se tiene:

$$\lim_{z\to e^{i\theta}}(1+z)^\alpha=(1+e^{i\theta})^\alpha=\exp[\alpha\ln(1+e^{i\theta})]=$$
$$=\exp\left\{\alpha\left[\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\,\frac{\theta}{2}\right]\right\}=$$
$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\alpha\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha\theta}{2}\right).$$

Por consiguiente,

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}e^{in\theta}=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\alpha\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha\theta}{2}\right).$$

En particular, si α es un número real, separando las partes real e imaginaria, obtenemos:

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cos n\theta=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\cos\frac{\alpha\theta}{2},\quad \sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\operatorname{sen} n\theta=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha\theta}{2}.$$

Del método de obtención de estas series se deduce que ellas son absoluta y uniformemente convergentes en el segmento $[0, 2\pi]$.

La proposición recíproca al segundo teorema de Abel no es justa. En efecto, para la serie geométrica $\sum\limits_0^\infty z^n$ su suma $\frac{1}{1-z}$ tiende a un límite finito, igual a $\frac{1}{1-e^{i\theta}}$, cuando z se aproxima a cualquier punto $e^{i\theta}$ de la circunferencia unidad, distinto de la unidad, a pesar de que la serie $\sum\limits_0^\infty e^{in\theta}$ es divergente en cada punto de la circunferencia unidad.

Sin embargo, imponiendo algunas restricciones especiales a los coeficientes de la serie, se puede afirmar que de la existencia del límite $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ (aquí el punto $z = re^{i\theta}$ tiende al punto frontera $e^{i\theta}$ a lo largo del radio) se deduce la convergencia de la serie de potencias en el punto $e^{i\theta}$.

He aquí una de las proposiciones de este tipo.

T e o r e m a d e T a u b e r. *Si los coeficientes de una serie de potencias, con el círculo unidad de convergencia, satisfacen a la condición*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \tag{7.3:6}$$

y existe el límite

$$\lim_{x\to 1} f(x) = A,$$

entonces la serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ *es convergente (su suma es igual a* A*).*

D e m o s t r a c i ó n. Obsérvese primero que de la condición (7.3:6) se deduce también que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_1^m n\,|a_n|}{m} = 0. \tag{7.3:7}$$

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ tendremos que tener $n\,|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > N(\varepsilon)$. Fijemos un $n = n_0$ que satisfaga a esta condición y hallemos una cota para $\frac{\sum\limits_1^m n\,|a_n|}{m}$ cuando $m > n_0$ del siguiente modo:

$$\frac{\sum\limits_1^m n\,|a_n|}{m} = \frac{\sum\limits_1^{n_0} n\,|a_n|}{m} + \frac{\sum\limits_{n_0+1}^m n\,|a_n|}{m} < \frac{\sum\limits_1^{n_0} n\,|a_n|}{m} +$$

$$+ \frac{(m-n_0)\,\varepsilon}{2m} < \frac{\sum\limits_1^{n_0} n\,|a_n|}{m} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero si m es suficientemente grande, $m > M$, tendremos, evidentemente:

$$\frac{\sum_{1}^{n_0} n\,|a_n|}{m} < \frac{\varepsilon}{2};$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\sum_{1}^{m} n\,|a_n|}{m} < \varepsilon \text{ para } m > \max\{N(\varepsilon),\ M\},$$

de donde se deduce la relación (7.3:7).

Examinemos el módulo de la diferencia

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k - f(x)\right| = \left|\sum_{0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-x)\sum_{0}^{n} |a_k|(1+x+\ldots+x^{k-1}) + \sum_{n+1}^{\infty} |a_k|\,x^k <$$

$$< n(1-x)\frac{\sum_{0}^{n} k\,|a_k|}{n} + \sum_{n+1}^{\infty} k\,|a_k|\cdot\frac{x^k}{k}. \qquad (7.3{:}8)$$

Sea $m\,|a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ y, además, $\frac{\sum_{0}^{m} k\,|a_k|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m > M(\varepsilon)$; entonces para $n > M(\varepsilon)$, de la relación (7.3:8) deducimos que

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k - f(x)\right| < n(1-x)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n}\sum_{n+1}^{\infty} x^k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[n(1-x) + \frac{1}{n}\,\frac{x^{n+1}}{1-x}\right] < \frac{\varepsilon}{2}\left[n(1-x) + \frac{1}{n(1-x)}\right].$$

Por consiguiente, para $1-x=\frac{1}{n}$ y $n > M(\varepsilon)$:

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon,$$

de donde se deduce que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{1}{n}\right) = A,$$

o sea, la serie $\sum_{0}^{\infty} a_k$ es convergente (y su suma es igual a A).

El teorema queda demostrado.

En condiciones más generales también tienen lugar proposiciones análogas. Precisamente, es suficiente suponer que la sucesión $\{n \cdot a_n\}$ sea acotada, en lugar de exigir que converja a cero. La demostración de este teorema, perteneciente a Hardy y Littlewood, es mucho más complicada que la demostración del teorema de Tauber. Obsérvese que la sola tendencia a cero de los coeficientes de la serie de potencias no es suficiente para que sea cierto un teorema análogo al de Tauber.

En el ap. 6.3 se demostró que en la frontera del círculo de convergencia de una serie de potencias siempre existe al menos un punto singular de la suma de esta serie. Surge la pregunta: ¿Hay alguna relación entre la distribución de los puntos singulares en la frontera del círculo de convergencia de una serie de potencias y los puntos de convergencia o divergencia de esta serie en la misma frontera?

Los ejemplos con los que comenzamos este apartado muestran que aquí no hay una relación simple. Por ejemplo, en el caso de la serie $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$ el radio de convergencia es igual a 1 y, por consiguiente, en la circunferencia unidad existe al menos un punto singular de la suma de esta serie. No obstante, la serie es absoluta y uniformemente convergente en toda la circunferencia unidad, en particular, es absolutamente convergente también en el punto singular. En el caso de la serie geométrica $\sum_0^\infty z^n$, que representa el desarrollo de la función $\frac{1}{1-z}$, todos los puntos de la circunferencia unidad, distintos de $z = 1$, son regulares y el punto $z = 1$ es el único punto singular. Sin embargo, esta serie es divergente en todos los puntos de la circunferencia unidad, tanto en el punto singular como en los puntos regulares.

En los fenómenos que nos interesan se pueden observar algunas leyes sometiendo a ciertas restricciones las series de potencias consideradas. Así, por ejemplo, resulta la siguiente proposición.

Teorema de Fatou. *Si los coeficientes de la serie de potencias* (7.3:1), *con el círculo unidad de convergencia, tienden a cero:* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *entonces la serie de potencias es convergente y, además, uniformemente, en todo arco de la circunferencia unidad, cuyos puntos son todos (incluyendo los extremos del arco) regulares para la suma de la serie.*

Demostración. Como se deduce del enunciado, en el teorema se tienen en cuenta solamente aquellas series de potencias cuyos coeficientes tienden a cero, para las cuales existen puntos regulares en la circunferencia unidad. Puede servir de ejemplo la serie logarítmica

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

cuyos coeficientes tienden a cero y la suma $\ln(1+z)$ tiene el único punto singular $z = -1$. Y, en efecto, en la pág. 367 se demostró que la serie logarítmica es convergente en todos los puntos de la circunferencia unidad, a excepción del punto $z = -1$. Para la serie geométrica $\sum_0^\infty z^n$, cuya suma es igual a $\frac{1}{1-z}$ y, por consiguiente, todos los puntos de la circunferencia unidad, a excepción del punto $z = 1$, son regulares, el teorema, evidentemente, no es aplicable, puesto

que la serie geométrica es divergente en todos los puntos de la circunferencia unidad. Pero esta serie no satisface a las condiciones del teorema ya que sus coeficientes no tienden a cero.

Para demostrar el teorema, supongamos que cada punto de un arco σ de la circunferencia unidad es regular para la suma $f(z)$ de la serie. Esto significa que cada punto $\zeta \in \sigma$ (incluyendo los extremos del arco σ) posee un entorno U_ζ, en el cual existe una función analítica $\psi_\zeta(z)$ que coincide con $f(z)$ en los puntos comunes a U_ζ y a la circunferencia unidad. Adjuntando los puntos de todos los entornos U_ζ $(\zeta \in \sigma)$ al círculo unidad K, resulta un recinto Δ, para el cual

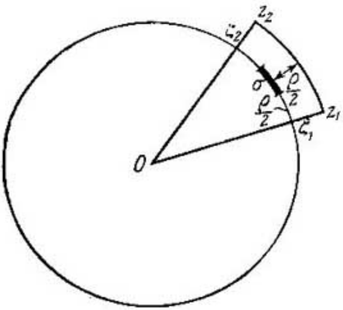

FIG. 65

todos los puntos del círculo K y todos los puntos del arco σ son interiores. (Compárese con los razonamientos del ap. 6.3, donde el papel del arco σ desempeñaba la circunferencia entera).

Definamos en el recinto Δ una función $\psi(z)$, haciéndola igual a $f(z)$ en los puntos del círculo K e igual a $\psi_\zeta(z)$ en los puntos de los entornos U_ζ. La función obtenida $\psi(z)$ será uniforme y analítica en el recinto Δ. Como ésta coincide con $f(z)$ en K, su serie de potencias coincide con la serie (7.3:1).

A continuación hablaremos precisamente de la función $\psi(z)$ y de la serie de potencias misma (7.3:1). Designando con $\rho > 0$ la distancia desde σ hasta la frontera del recinto Δ (esta frontera incluye una parte de la circunferencia unidad), tomemos en la circunferencia unidad dos puntos ζ_1 y ζ_2, no situados en el arco σ y separados de sus extermos próximos en $\frac{\rho}{2}$; entonces el arco $\widehat{\zeta_1\zeta_2}$ pertenecerá enteramente al recinto Δ y contendrá al arco σ. Tracemos los radios $O\zeta_1$ y $O\zeta_2$ y prolonguémoslos fuera de la circunferencia unidad en la longitud $\frac{\rho}{2}$. Unamos, finalmente, sus extremos mediante un arco de circunferencia, obtendremos un sector circular Oz_1z_2 (fig. 65) que, como se deduce de su construcción, está enteramente situado en el recinto Δ y contiene en su interior al arco σ.

Nuestra tarea consiste en demostrar que la serie $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge uniformemente en el arco σ. Demostraremos esto estableciendo a la vez que la suma

de la serie es igual a $\psi(z)$. Con este fin, consideremos la función

$$\omega_n(z)=\frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2), \tag{7.3:9}$$

donde

$$\varphi_n(z)=\psi(z)-(a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n).$$

En el interior del círculo unidad, donde la serie $\sum\limits_0^\infty a_kz^k$ es convergente, esta función puede expresarse en la forma

$$\omega_n(z)=\frac{\sum\limits_0^\infty a_kz^k-\sum\limits_0^n a_kz^k}{z^{n+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)=(a_{n+1}+a_{n+2}z+\ldots)(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)$$

y, por consiguiente, es analítica en un entorno del origen de coordenadas. De la fórmula (7.3:9) se deduce que ésta es analítica también en todo el recinto Δ (donde la función $\varphi_n(z)=\psi(z)-\sum\limits_0^\infty a_kz^k$ es analítica).

Para la acotación que necesitamos, la función $\omega_n(z)$ es más ventajosa que la función $\varphi_n(z)$. Precisamente, en los puntos de frontera del sector situados fuera del círculo unidad, puede utilizarse el hecho de que el módulo del denominador del quebrado $|z|^{n+1}$ es muy grande (para valores grandes de n), mientras que en los puntos de los radios que son próximos a ζ_1 o a ζ_2, las diferencias respectivas $z-\zeta_1$ y $z-\zeta_2$ son muy pequeñas en valor absoluto.

Después de estas explicaciones, acotemos superiormente el módulo de $\omega_n(z)$ en distintas partes de la frontera del sector.

Sea ε' un número positivo arbitrario. Elijamos $N(\varepsilon')$ de modo que sea $|a_k|<\varepsilon'$ para $k>N(\varepsilon')$. Entonces, en los puntos pertenecientes al intervalo $O\zeta_1$ (o al intervalo $O\zeta_2$), tendremos: $(n>N(\varepsilon'))$:

$$|\omega_n(z)|=\left|\frac{\psi(z)-\sum\limits_0^n a_kz^k}{z^{n+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n+1}^\infty a_kz^{k-n-1}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\right|\leqslant\varepsilon'\sum_{n+1}^\infty|z|^{k-n-1}|z-\zeta_1||z-\zeta_2|.$$

Observando que

$$\sum_{n+1}^\infty|z|^{k-n-1}=\frac{1}{1-|z|},\ |z-\zeta_1|=1-|z| \text{ y } |z-\zeta_2|<2,$$

obtenemos:

$$|\omega_n(z)|<2\varepsilon' \text{ para } n>N'(\varepsilon).$$

Examinemos ahora $|\omega_n(z)|$ en el intervalo ζ_1z_1 (o en ζ_2z_2). Designemos el radio $1+\frac{\rho}{2}$ del arco del sector mediante R. Observando que $|z-\zeta_1|=$ $=|z|-1$, $|z-\zeta_2|<|z|+|\zeta_2|<2R$ y designando con M el max $|\psi(z)|$

en el conjunto de todos los puntos del sector, para $n > N(\varepsilon')$, tendremos:

$$|\omega_n(z)| = \left| \frac{\psi(z) - \sum_0^n a_k z^k}{z^{n+1}} (z-\zeta_1)(z-\zeta_2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M + \sum_0^n |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z|-1) 2R = 2R \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z|-1) +$$

$$+ 2R \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^n |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z|-1) < 2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} +$$

$$+ 2R\varepsilon' \sum_{N(\varepsilon')+1}^n |z^k| \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} = 2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_n| R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} +$$

$$+ 2R\varepsilon' \frac{|z|^{n+1} - |z|^{N(\varepsilon')+1}}{|z|-1} \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} < 2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} + 2R\varepsilon'.$$

Pero

$$\frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} < \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}-1} = \frac{1}{|z|^n + \ldots + 1} < \frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$|\omega_n(z)| < \frac{2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k \right)}{n+1} + 2R\varepsilon',$$

y podemos elegir el número $N_1(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon')$ de tal modo que, para $n > N_1(\varepsilon')$, el primer sumando del segundo miembro de la desigualdad sea también menor que ε', y, por consiguiente,

$$|\omega_n(z)| < (2R+1)\varepsilon' \text{ para } n > N_1(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon').$$

Hallemos, finalmente, una cota para el módulo $|\omega_n(z_n)|$ en los puntos del arco $\widehat{z_1 z_2}$ (incluyendo sus extremos z_1 y z_2). Aquí se tiene: $|z-\zeta_1| < 2R$, $|z-\zeta_2| < 2R$ y

$$|\omega_n(z)| < \frac{M + \sum_0^n |a_k| R^k}{R^{n+1}} 4R^2 = 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} +$$

$$+ 4 \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^n |a_k| R^k}{R^{n-1}} \leqslant 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\varepsilon' \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^n R^k}{R^{n-1}} <$$

$$< 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + \frac{4R^2\varepsilon'}{R-1} = 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + \frac{8R^2}{\rho}\varepsilon'.$$

Tomando $N_2(\varepsilon') \geqslant N_1(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon')$ de modo que el primer sumando del segundo miembro de la desigualdad sea menor que ε' para $n > N_2(\varepsilon')$, obtenemos:

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8R^2}{\rho}+1\right)\varepsilon', \quad n > N_2(\varepsilon').$$

Obsérvese que en el punto $z=0$, $\omega_n(z)$ tiene el valor $a_{n+1}\cdot\zeta_1\zeta_2$ (igual al $\lim\limits_{z\to 0}\omega_n(z)$), de modo que $|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \varepsilon'$ para $n > N(\varepsilon')$ y en los puntos $z=\zeta_1$ y $z=\zeta_2$, $\omega_n(z)$ se anula. Por lo tanto, en todos los puntos de la frontera del sector, para $n > N_2(\varepsilon')$, se tiene:

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8R^2}{\rho}+1\right)\varepsilon' = \max\left\{2\varepsilon',\ (2R+1)\varepsilon',\ \left(\frac{8R^2}{\rho}+1\right)\varepsilon'\right\}.$$

En virtud del principio del módulo máximo, esta desigualdad se verifica también en los puntos del arco σ. Pero

$$\omega_n(z) = \frac{\psi(z) - \sum\limits_{1}^{n} a_k z^k}{z^{k+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)$$

y en los puntos del arco σ el módulo $|\omega_n(z)|$ satisface a la desigualdad

$$|\omega_n(z)| = \left|\psi(z) - \sum_{0}^{n} a_k z^k\right| |z-\zeta_1|\,|z-\zeta_2| > \left|\psi(z) - \sum_{0}^{n} a_k z^k\right| \left(\frac{\rho}{2}\right)^2,$$

de donde

$$\left|\psi(z) - \sum_{0}^{n} a_k z^k\right| < \frac{4(8R^2+\rho)}{\rho^3}\varepsilon' = \varepsilon \text{ para } n > N_1(\varepsilon').$$

Como ε' es arbitrariamente pequeño, de aquí se deduce el resultado pedido.

Como un ejemplo simple, consideremos de nuevo la serie binomial

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha.$$

En la pág. 368 se demostró que $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n} = 0$ si $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Por esta razón, la serie binomial tiene que converger en todos los puntos de la circunferencia unidad que son regulares para su suma $(1+z)^\alpha$, o sea, en todos los puntos $z = e^{i\theta} \neq -1$. La convergencia es uniforme en todo arco de la circunferencia que no contenga al punto $z = 1$ ni en su interior, ni como uno de sus extremos.

Obsérvese que del hecho de que los coeficientes de una serie de potencias, con el círculo unidad de convergencia, tiendan a cero y de que la serie sea uniformemente convergente en algún arco de la circunferencia unidad, no se deduce ni mucho menos que los puntos de este arco sean regulares. Esto nos muestra el ejemplo de la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$, para la cual, como ya se vio (pág. 340), todos los puntos de la circunferencia unidad son singulares.

En conclusión, veamos el ejemplo, perteneciente a N. Luzin, de una serie de potencias cuyos coeficientes tienden a cero y la cual es divergente en todos los puntos de la circunferencia unidad.

Consideremos el polinomio

$$g_p(z)=1+z+\ldots+z^{p-1}=\frac{1-z^p}{1-z}.$$

En el punto $\zeta=e^{i\theta}$, situado en la circunferencia unidad y distinto de 1, el módulo de $g_p(\zeta)$ tiene el valor siguiente:

$$|g_p(e^{i\theta})|=\left|\frac{1-e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|=\left|\frac{e^{\frac{ip\theta}{2}}\left(e^{\frac{ip\theta}{2}}-e^{\frac{-ip\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}\right|=\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{p\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right|.$$

Como para $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\pi}|\varphi|\leqslant|\operatorname{sen}\varphi|\leqslant|\varphi|,$$

para $0<|\theta|\leqslant\frac{\pi}{p}$ obtenemos la desigualdad:

$$|g_p(e^{i\theta})|\geqslant\frac{\frac{2}{\pi}\frac{p|\theta|}{2}}{\frac{|\theta|}{2}}=\frac{2}{\pi}p.$$

Esta desigualdad es válida también para $\theta=0$, puesto que $g_p(1)=p$. Evidentemente, para cualquier punto $\zeta_0=e^{i\theta}$ existe un número entero k_0, $0\leqslant\leqslant k_0\leqslant p-1$, tal que el punto $z=e^{-\frac{2\pi k_0 i}{p}}\zeta_0$ pertenece al arco de la circunferencia unidad para el cual $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{p}$. Para este valor k_0, obtenemos:

$$\left|g_p\left(e^{-\frac{2\pi k_0 i}{p}}\zeta_0\right)\right|\geqslant\frac{2}{\pi}p.$$

Por consiguiente,

$$\max_{k=0,\,1,\,\ldots,\,p-1}\left|g_p\left(e^{-\frac{2\pi k i}{p}}\zeta_0\right)\right|\geqslant\frac{2}{\pi}p.$$

Formemos ahora para cada número natural p el polinomio

$$H_p(z)=g_p(z)+z^pg_p\left(e^{-\frac{2\pi}{p}i}z\right)+$$
$$+z^{2p}g_p\left(e^{-\frac{2\pi\cdot 2}{p}i}z\right)+\ldots+z^{(p-1)p}g_p\left(e^{-\frac{2\pi(p-1)}{p}i}z\right).$$

Como $g_p(z)$ contiene términos con potencias de z desde cero hasta $p-1$, $z^pg_p\left(e^{\frac{-2\pi}{p}i}z\right)$ contiene términos con potencias de z desde p hasta $2p-1$, ..., $z^{(p-1)p}g_p\left(e^{\frac{-2\pi(p-1)}{p}i}z\right)$ contiene términos con potencias de z desde $(p-1)p$

hasta $p^2 - 1$, en la expresión de $H_p(z)$ no habrá términos semejantes y $H_p(z)$ será un polinomio de grado $p^2 - 1$, cuyos coeficientes todos son en valor absoluto iguales a la unidad.

Formemos, finalmente, la serie

$$H_1(z) + \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} z^{1^2+2^2+\ldots+(p-1)^2} H_p(z). \tag{7.3:10}$$

Como cada término de la serie que figura en el primer miembro representa un polinomio que contiene potencias de z desde $1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2$ hasta $1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 + p^2 - 1$, dos términos de la serie no contienen potencias iguales de z. Escribiendo todas las potencias de z en orden de crecimiento con los mismos coeficientes que poseen en la expresión (7.3:10), obtenemos una serie de potencias:

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n. \tag{7.3:11}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ($|\alpha_n| = \frac{1}{\sqrt{p}}$, donde p es un número natural que crece indefinidamente junto con n), la serie (7.3:11) es convergente en el interior del círculo unidad. Demostremos que ella es divergente en todo punto de la circunferencia unidad. Supongamos lo contrario, y sea convergente la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$, donde $|\zeta| = 1$. Entonces tiene que ser convergente también la serie

$$\sum_{1\le p<\infty,\ 0\le m<p} \frac{1}{\sqrt{p}} \zeta^{1^2+\ldots+(p-1)^2} \zeta^{mp} g_p\left(e^{-\frac{2\pi m}{p} i} \zeta\right),$$

obtenida de (7.3:11) uniendo grupos determinados de términos vecinos en uno. Pero esta última serie no puede ser convergente, puesto que sus términos no tienden a cero:

$$\max_{m=0,\,1,\,\ldots,\,p-1} \left| \frac{1}{\sqrt{p}} \zeta^{1^2+\ldots+(p-1)^2} \zeta^{mp} g_p\left(e^{-\frac{2\pi m}{p} i} \zeta\right) \right| =$$

$$= \max_{m=0,\,1,\,\ldots,\,p-1} \frac{1}{\sqrt{p}} \left| g_p\left(e^{-\frac{2\pi m}{p} i} \zeta\right) \right| \geqslant \frac{2p}{\pi\sqrt{p}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{p}.$$

Resumiendo, *la serie de Luzin* (7.3:11) *es una serie de potencias cuyos coeficientes tienden a cero y la cual no es convergente en ninguno de los puntos de la circunferencia unidad.*

Del teorema de Fatou se deduce que todos los puntos de la circunferencia unidad son singulares para la suma de la serie construida. En efecto, en los puntos singulares ésta tendría que converger.

Señalemos también que la serie de potencias

$$\alpha_0 - \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 - \alpha_1 z^3 + \ldots + \alpha_k z^{2k} - \alpha_k z^{2k+1} + \ldots,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ son los coeficientes de la serie de Luzin, es convergente en el punto $z = 1$ (ya que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$) y es divergente en todos los demás puntos de la circunferencia unidad. En efecto, suponiendo que ésta fuese convergente en cierto punto $\zeta \neq 1$, $|\zeta| = 1$, tendría que ser convergente también la serie

$$\alpha_0 (1-\zeta) + \alpha_1 \zeta^2 (1-\zeta) + \ldots + \alpha_k \zeta^{2k} (1-\zeta) + \ldots,$$

y, por consiguiente, la serie

$$\alpha_0 + \alpha_1 \zeta^2 + \ldots + \alpha_k \zeta^{2k} + \ldots,$$

o sea, la serie de Luzin sería convergente en el punto $z = \zeta^2$ de la circunferencia unidad, lo cual es imposible.